Quadraturformeln und ihre Konvergenz

Jan Assion
August-Bebel-Straße
33602 Bielefeld

August 2010

Bachelorarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
eines
Bachelor of Science (B.Sc.)

Betreut von
Prof. Dr. Etienne Emmrich

Im Rahmen des Seminars:

Angewandte Analysis

Belegnummer: 240096

An der
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Quadraturformeln zur näherungsweisen Berechnung von bestimmten Integralen haben eine lange Tradition; Keplers Faßregel ist 1615 veröffentlicht worden. Sie sind von theoretischem Interesse, weil in ihnen nur die Funktionswerte des Integranden an endlich vielen Stellen eingehen und weil es Funktionen gibt, die sich nicht geschlossen integrieren lassen. Sie sind von praktischem Interesse, weil sie sich leicht handhaben und weil einige von ihnen sich auf eine große Klasse von Funktionen anwenden lassen.
In dieser Arbeit werden drei Typen von Quadraturformeln vorgestellt: die summierte Trapezregel, die interpolatorischen und die Gaußschen Quadraturformeln. Bei den ersten beiden werden die Integranden durch einfache Funktionen interpoliert, im ersten Fall durch Polygonzüge und im zweiten Fall durch Polynome. Der dritte Typ besteht aus speziellen interpolatorischen Quadraturformeln. Bei ihm geht es zusätzlich um die optimale Wahl der Stützstellen.
Die vorgestellten Quadraturformeln unterscheiden sich wesentlich durch ihren Genauigkeitsgrad. Mit den Gauß-Formeln wird der höchstmögliche Genauigkeitsgrad erreicht. Im letzten Kapitel wird mit Hilfe des Satzes von Szegö gezeigt, dass sowohl die summierte Trapezregel, als auch die Gauß-Formeln für alle auf einem kompakten Intervall stetigen reellwertigen Funktionen konvergieren.

2 Summierte Trapezregel und Definition von Quadraturformeln

Sei $[a, b]$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, ein abgeschlossenes Intervall und f eine stetige Funktion von $[a, b]$ in $\mathbb{R}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ äquidistante Stützstellen $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), i = 0, 1, 2, ..., n$, in $[a, b]$ gegeben.
Dann kann man f stückweise linear interpolieren durch einen linearen Spline t mit

$$t(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, ..., n-1.$$

Es gilt $t(x_i) = f(x_i)$ für alle i.
Wegen der Stetigkeit von f existiert das Integral von f über $[a, b]$. Dieses kann man näherungsweise berechnen, indem man t anstelle von f integriert. Dazu genügt es, die Flächeninhalte der durch t entstehenden Trapeze aufzusummieren. Dabei ist $\frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$ die Mittellinie eines solchen Trapezes, und man erhält mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \\ &= \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Um den hierbei gemachten Fehler zu berechnen, gehen wir nach [5, S. 254f.] vor und setzen für f voraus, dass f'' in $[a, b]$ existiert und stetig ist. Wir benötigen das folgende Lemma, das wir auch an anderer Stelle benutzen werden.

Lemma 2.1. *Die Funktionen f und g seien im abgeschlossenen Intervall I n-mal differenzierbar. In I mögen sie n gemeinsame Nullstellen besitzen, wobei mehrfache Nullstellen auch entsprechend mehrfach gezählt werden.*
Haben die n-ten Ableitungen $f^{(n)}$ und $g^{(n)}$ im Innern von I keine gemeinsamen Nullstellen, so gibt es zu jedem $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$ ein ξ aus dem Innern von I mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

Den Beweis des Lemmas findet man in [5, S. 142].
Wir kommen nun zur Bestimmung des Fehlers in (2.1).
Für jedes i mit $i = 0, 1, ..., n-1$ setzen wir

$$S_i(t) := \int_{x_i}^{t} f(x)dx - \frac{t-x_i}{2}(f(x_i) + f(t)), \qquad x_i \leq t \leq x_{i+1}.$$

Dann folgt

$$S_i'(t) = f(t) - \frac{1}{2}(f(x_i) + f(t)) - \frac{t-x_i}{2}f'(t)$$

und

$$S_i''(t) = \frac{1}{2}f'(t) - \frac{1}{2}f'(t) - \frac{t-x_i}{2}f''(t) = -\frac{t-x_i}{2}f''(t).$$

Insbesondere gilt

$$S_i(x_i) = S_i'(x_i) = 0,$$

was bedeutet, dass S_i bei x_i eine doppelte Nullstelle hat. Die Anwendung des obigen Lemmas auf $S_i(t)$ und $(t-x_i)^3$ mit $n = 2$ liefert

$$\begin{aligned} \frac{S_i(t)}{(t-x_i)^3} &= \frac{S_i''(\xi_i)}{6(\xi_i - x_i)} \\ &= \frac{-\frac{\xi_i - x_i}{2}f''(\xi_i)}{6(\xi_i - x_i)} \\ &= -\frac{1}{12}f''(\xi_i), \end{aligned}$$

woraus für $t = x_{i+1}$

$$S_i(x_{i+1}) = -\frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{12}f''(\xi_i) \tag{2.2}$$

folgt.
Ist nun $R_n(f)$ der gemachte Fehler, so gilt nach (2.1) und der Äquidistanz der Stützstellen

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} S_i(x_{i+1}) \\ &= -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i), \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen nach (2.2) gilt.
Da $\min_{i\in\mathbb{N}} f''(\xi_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \leq \max_{i\in\mathbb{N}} f''(\xi_i)$, gibt es wegen der Stetigkeit von f'' ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i),$$

so dass schließlich

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \tag{2.3}$$

gilt.
Es folgt also die summierte Trapezregel mit Fehlerglied:

Satz 2.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $[a,b]$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi).} \tag{2.4}$$

Setzt man in (2.4)

$$T_n(f) := \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right],$$

so lässt sich ablesen, dass

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{2.5}$$

gilt, denn wegen der Stetigkeit von f'' ist f'' auf $[a,b]$ beschränkt.
Ferner liest man in (2.4) ab, dass in $T_n(f)$ sämtliche Koeffizienten von $f(x_i)$ feste Zahlen, also nur von $x_i, 0 \leq i \leq n$, aber nicht von f abhängig, sind.

Definition. *Eine Formel der Form*

$$Q_n(f) := \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f\left(x_i^{(n)}\right)$$

nennt man eine <u>Quadraturformel</u> für f, wobei f auf $[a,b]$ stetig ist, $x_i^{(n)}$ die <u>Stützstellen</u> und $A_i^{(n)}$ die von f unabhängigen Koeffizienten von $f(x_i^{(n)})$ sind, die man die <u>Gewichte</u> von $Q_n(f)$ nennt. $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ <u>konvergiert</u>, falls (2.5) gilt.

Schließlich liest man in (2.4) ab, dass die Folge $(T_n(f))$ für alle auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen konvergiert. Wir werden später sehen, dass dies sogar für alle stetigen Funktionen auf $[a,b]$ gilt.

3 Bernstein-Polynome und Weierstraßscher Approximationssatz

Für $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt $p_n^f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p_n^f(x) := \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \tag{3.1}$$

das n-te Bernstein-Polynom von f.
Im Folgenden gehen wir nach [1, S. 135ff.] vor.

Satz 3.1. *(Satz von Bernstein)*
Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann konvergiert die Folge $\left(p_n^f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Bernstein-Polynome von f gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f.

Bevor wir zum Beweis dieses wichtigen Satzes kommen, sind einige Vorüberlegungen notwendig.

Behauptung 3.1. *Es gilt für alle $x \in [0,1]$*

$$\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = (n-1)x.$$

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion nach n:
Man sieht sofort, dass die Gleichung für $n = 1$ stimmt.
Ist die Behauptung für $n = m$, $m \geq 1$ richtig, so folgt für $n = m + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} j\binom{m}{j}x^j(1-x)^{m-j} &= \sum_{j=1}^{m-1} j\binom{m}{j}x^j(1-x)^{m-j} \qquad + \qquad mx^m \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} j\binom{m-1}{j}x^j(1-x)^{m-j} + \sum_{j=1}^{m-1} j\binom{m-1}{j-1}x^j(1-x)^{m-j} + mx^m \\
&= (1-x)\sum_{j=0}^{m-1} j\binom{m-1}{j}x^j(1-x)^{m-1-j} \\
&\quad +mx^m + x\sum_{k=0}^{m-2}(k+1)\binom{m-1}{k}x^k(1-x)^{(m-1)-k},
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt $\binom{m}{j} = \binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1}$ benutzt wird. Mit der Induktionsvoraussetzung gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} j\binom{m}{j}x^j(1-x)^{m-j} &= (m-1)x(1-x) + mx^m + x\Bigg[\sum_{k=0}^{m-1} k\binom{m-1}{k}x^k(1-x)^{m-1-k} \\
&\quad -(m-1)x^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}x^k(1-x)^{m-1-k} - x^{m-1}\Bigg] \\
&= (m-1)x(1-x) + mx^m \\
&\quad +x\Big((m-1)x - (m-1)x^{m-1} + (x+(1-x))^{m-1} - x^{m-1}\Big) \\
&= (m-1)x(1-x) + mx^m + (m-1)x^2 - mx^m + x \\
&= mx.
\end{aligned}$$

Nach vollständiger Induktion folgt also die Behauptung. □

Behauptung 3.2. *Für $k = 0, 1, 2$ seien $f_k(x) = x^k$. Dann gilt*

$$p_n^{f_0}(x) = 1, p_n^{f_1}(x) = x \text{ und } p_n^{f_2}(x) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x.$$

Beweis. Es ist klar, dass $p_n^{f_0}(x) = 1$. Wegen $\frac{j}{n}\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1}$ folgt

$$\begin{aligned}
p_n^{f_1}(x) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} = x\sum_{j-1=0}^{n-1}\binom{n-1}{j-1}x^{j-1}(1-x)^{(n-1)-(j-1)} \\
&= x\cdot(x+(1-x))^n = x
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
p_n^{f_2}(x) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \\
&= x \sum_{j-1=0}^{n-1} \frac{j}{n} \binom{n-1}{j-1} x^{j-1} (1-x)^{(n-1)-(j-1)} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\
&= \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{1}{n}(1-x)x,
\end{aligned}$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen nach Behauptung 3.1 gilt.

□

Nach dieser Vorarbeit kommen wir zum Beweis des Satzes von Bernstein:

Beweis. Da f auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| < \delta$.
Aus dem binomischen Lehrsatz folgt

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - p_n^f(x) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right] \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.
\end{aligned}$$

Teilt man nun die Menge der Summationsindizes wie folgt in die Mengen

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\{ j \in \{0,1,...,n\} \;\middle|\; \left| \frac{j}{n} - x \right| < \delta \right\}, \\
I_2 &= \left\{ j \in \{0,1,...,n\} \;\middle|\; \left| \frac{j}{n} - x \right| \geq \delta \right\}
\end{aligned}$$

auf, dann folgt für I_1

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I_1}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} &\leq \sum_{j\in I_1}\frac{\epsilon}{2}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}=\frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Für die zweite Teilmenge I_2 machen wir die folgenden Überlegungen:
Da f als stetige Funktion auf $[0,1]$ beschränkt ist, gibt es ein $r\in\mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x)|\leq r,\qquad \text{für alle } x\in[0,1].$$

Es folgt nach der Dreiecksungleichung

$$\sum_{j\in I_2}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}\leq 2r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}.$$

Mit der Definition von I_2 gilt $\frac{\left(\frac{j}{n}-x\right)^2}{\delta^2}\geq 1$ für $j\in I_2$, und

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I_2}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} &\leq \sum_{j\in I_2}\frac{(\frac{j}{n}-x)^2}{\delta^2}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}\\ &\leq \frac{1}{\delta^2}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{j}{n}-x\right)^2\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}\\ &= \frac{1}{\delta^2}\sum_{j=0}^{n}\left[\left(\frac{j}{n}\right)^2-2x\frac{j}{n}+x^2\right]\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}\\ &= \frac{1}{\delta^2}\left[p_n^{f_2}(x)-2xp_n^{f_1}(x)+x^2p_n^{f_0}(x)\right].\end{aligned}$$

Mit den zuvor berechneten Bernstein-Polynomen gilt also weiter

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\delta^2}\left[x^2+\frac{1}{n}x(1-x)-2x^2+x^2\right]\\ &= \frac{x(1-x)}{n\delta^2}\\ &< \frac{1}{n\delta^2}.\end{aligned}$$

Wählt man nun n_0 passend mit $\frac{1}{n_0\delta^2}<\frac{\epsilon}{4r}$, dann folgt für alle $x\in[0,1]$ und alle $n\geq n_0$

$$
\begin{aligned}
\left|f(x)-p_n^f(x)\right| &\le \sum_{j\in I_1}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} \\
&+ \sum_{j\in I_2}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} \\
&\le \frac{\epsilon}{2}+2r\frac{1}{n\delta^2} \le \frac{\epsilon}{2}+2r\frac{1}{n_0\delta^2} \\
&< \frac{\epsilon}{2}+2r\frac{\epsilon}{4r}=\epsilon.
\end{aligned}
$$

Damit folgt die gleichmäßige Konvergenz von p_n^f gegen f auf dem gesamten Intervall $[0,1]$. □

Da jedes kompakte Intervall $[a,b]$ stetig auf $[0,1]$ transformiert werden kann, ist damit auch der Weierstraßsche Approximationssatz bewiesen:

Satz 3.2. *(Approximationssatz von Weierstraß)*
Gegeben sei eine stetige, reellwertige Funktion f auf $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom p_n von passendem Grad n mit

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-p_n(x)| < \epsilon.$$

4 Interpolatorische Quadraturformeln und Genauigkeitsgrad

Ergebnis des letzten Kapitels ist, dass Polynome aussichtsreiche Kandidaten sein könnten, um damit die Fehlergenauigkeit von Quadratur-Formeln zu vergrößern. Interessant ist dabei insbesondere das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leq n$, das eine gegebene Funktion f mithilfe von $n+1$ Stützstellen interpoliert.

4.1 Interpolatorische Quadraturformeln

Sind $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_i, i = 0, 1, ..., n$, aus dem Intervall $[a, b]$, so seien

$$L_k(x) := \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \tag{4.1}$$

die zu diesen Stützstellen gehörigen Lagrange-Polynome vom Grad n.
Es gilt dann

$$L_i(x_k) = \delta_{ik}, \qquad \text{für alle } 0 \leq i, k \leq n.$$

Sei ferner f eine auf $[a, b]$ stetige, reellwertige Funktion. Dann ist

$$L_f(x) := \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

dasjenige Polynom vom Grad $\leq n$, welches f in den $n+1$ Stützstellen interpoliert. Für dieses Polynom gilt also:

$$L_f(x_i) = f(x_i), \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Dann heißt

$$I_n(f) := \int_a^b L_f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

die interpolatorische Quadraturformel vom Grad n für f mit den Gewichten

$$A_i = \int_a^b L_i(x) dx, \qquad 0 \leq i \leq n,$$

und dem Fehler

$$R_n(f) := \int_a^b f(x)dx - I_n(f).$$

In der Literatur wird oft eine geschlossenere Darstellung von L_k benutzt, die man folgendermaßen erhält:
Mit $\omega(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ ist $\omega'(x) = \sum_{k=0}^{n}\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x - x_i)$, also insbesondere

$$\omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k - x_i). \tag{4.2}$$

Man erhält

$$L_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}. \tag{4.3}$$

4.2 Fehlerabschätzung für interpolatorische Quadraturformeln

Wir gehen vor nach [2, S. 291f].

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar. Seien die Stützstellen
$a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$. Sei $x_i \neq x \in [a, b]$ für alle $i \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann hat die Funktion

$$F(t) := f(t) - L_f(t) - \frac{(t - x_0) \cdot ... \cdot (t - x_n)}{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n)}(f(x) - L_f(x)), \qquad t \in [a, b]$$

die Nullstellen $x, x_0, ..., x_n$.
In den durch diese Nullstellen bestimmten Intervallen liegt nach dem Satz von Rolle jeweils mindestens eine Nullstelle von F', und F' hat mindestens $n + 1$ Nullstellen. Nach n weiteren Schritten folgt, dass $F^{(n+1)}$ eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$ hat.
Wegen $L_f^{(n+1)} \equiv 0$ ist

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n + 1)!}{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_k)}(f(x) - L_f(x)),$$

und für $t = \xi$ folgt

$$f(x) - L_f(x) = \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad x \in [a, b]. \tag{4.4}$$

Diese Formel bleibt offensichtlich für $x = x_k$, $k = 0, 1, ..., n$, richtig.
Wegen der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ gibt es ein $M_{n+1} > 0$ mit $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ für alle $x \in [a, b]$, und wegen $|x - x_i| \leq b - a$ folgt

$$|f(x) - L_f(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}. \tag{4.5}$$

Für die Fehlerabschätzung der interpolatorischen Quadratur-Formel erhält man

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_n(f) \right| = \left| \int_a^b (f(x) - L_f(x))dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - L_f(x)|dx,$$

aufgrund von (4.5) also

$$\int_a^b |f(x) - L_f(x)|dx \quad \leq \quad \int_a^b \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} dx = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} M_{n+1},$$

und

$$\boxed{|R_n(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx - I_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} M_{n+1}}. \tag{4.6}$$

4.3 Genauigkeitsgrad

Sieht man sich (4.6) genauer an, fällt eines auf. Wenn man für f ein Polynom vom Grad $\leq n$ nimmt, so ist $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, was wegen (4.4) bedeutet, dass für diese Polynome die interpolatorischen Quadraturformeln exakt sind. Diese Beobachtung gibt nun also Anlass zur folgenden Definition, die aus [6, S. 309] stammt.

Definition. *Eine Quadraturformel $Q_n(f)$ mit $n+1$ Stützstellen hat den Genauigkeitsgrad m, wenn für alle Polynome p vom Grad $\leq m$*

$$R_n(p) = 0$$

gilt, wenn also die Quadraturformel für all diese Polynome exakt ist, und wenn es ein Polynom p_{m+1} vom Grad $m + 1$ gibt mit

$$R_n(p_{m+1}) \neq 0.$$

Mit Hilfe dieser Definition kann man also sagen, dass die interpolatorische Quadraturformel $Q_n(f)$ den Genauigkeitsgrad $\geq n$ hat.

Interessant ist nun, dass auch die Umkehrung dieses Sachverhaltes gilt. Es gilt nämlich der folgende

Satz 4.1. *Ist eine Quadraturformel $Q_n(f)$ exakt für alle Polynome vom Grad $\leq n$, so ist sie interpolatorisch.*

Der folgende Beweis stammt aus [4, S. 80].

Beweis. Für die paarweise verschiedenen Stützstellen $x_k^{(n)}, k = 0, 1, ..., n$, aus dem Intervall $[a, b]$, wobei (n) nun einen weiteren Index bezeichnet, und eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \cdot f\left(x_k^{(n)}\right)$$

gegeben. Mit $f(x) = 1, x, ..., x^n$ erhält man nach Voraussetzung daraus das Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \cdot \left(x_k^{(n)}\right)^i = \int_a^b x^i dx, \qquad i = 0, ..., n.$$

Da die Vandermondesche Determinante $det\left(\left(x_k^{(n)}\right)^i\right)$ nicht verschwindet — denn die $x_k^{(n)}$ sind paarweise verschieden — ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar. Daraus folgt, dass

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx$$

gelten muss, und somit $Q_n(f)$ nach (4.3) interpolatorisch ist. □

Die durch die interpolatorischen Polynome erzielten Verbesserungen sind beachtlich, wenn man bedenkt, dass die summierte Trapezformel für alle n nur den Genauigkeitsgrad 1 besitzt. (Es ist nämlich klar, dass sie exakt für Polynome vom Grad $\leq$ 1 ist, was andererseits für $f(x) = x^2$ jedoch nicht mehr der Fall ist, wie man sofort mit (2.4) sieht.) Das bedeutet auch, dass der Genauigkeitsgrad einer Quadraturformel nicht mit dem absoluten Fehler korreliert, wie man ebenfalls in (2.4) ablesen kann.

5 Legendre-Polynome und Gauß-Integration

Wir gehen vor nach [5, S. 265ff.].
Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze $g_n(x) := (x^2-1)^n$. Dann ist g_n ein Polynom vom Grad $2n$ mit dem Leitkoeffizienten 1.
Also ist

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\left(g_n^{(n)}(x)\right) \tag{5.1}$$

ein Polynom vom Grad n mit dem Leitkoeffizienten

$$\frac{1}{2^n n!} \cdot 2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \tag{5.2}$$

Man bezeichnet P_n als das n-te Legendre-Polynom.
Da g_n eine gerade Funktion ist, ist P_n gerade oder ungerade, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist. Insbesondere ist mit jeder Nullstelle x von P_n auch $-x$ eine solche.

Bemerkung 5.1. *Die Nullstellen von g_n sind ± 1 mit der jeweiligen Vielfachheit n. Die Ableitung g_n' hat dann in ± 1 je eine genau $(n-1)$-fache Nullstelle und nach dem Satz von Rolle eine weitere Nullstelle in $(-1,1)$, die dann einfach sein muss. Nach n Schritten folgt, dass $g_n^{(n)}$ in $(-1,1)$ genau n einfache Nullstellen hat.*
Sind $x_1, ..., x_n$ die Nullstellen von $g_n^{(n)}$ bzw. von P_n, und ist $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, so folgt

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \omega_n(x).$$

Lemma 5.1. *Sei $n > 0$ und p ein Polynom vom Grad $\leq n-1$. Dann ist*

$$\int_{-1}^{1} p(x) P_n(x) dx = 0,$$

wobei P_n das n-te Legendre-Polynom ist.

Beweis. Sei $0 \leq m \leq n$. Setze für eine n-mal stetig differenzierbare Funktion g

$$s_m(g) = \int_{-1}^{1} g(x) g_n^{(m)}(x) dx,$$

wobei g_n das oben definierte Polynom ist.
Integriert man $s_n(p), n \geq 1$, partiell, so erhält man

$$s_n(p) = p(x) g_n^{(n-1)}(x) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} p'(x) g_n^{(n-1)}(x) dx.$$

Da $g_n^{(n-1)}$ bei ± 1 jeweils eine einfache Nullstelle besitzt, ist also

$$s_n(p) = -s_{n-1}(p').$$

Die n-malige partielle Integration liefert dann

$$s_n(p) = (-1)^n s_0 \left(p^{(n)}\right) = (-1)^n \int_{-1}^{1} p^{(n)}(x) g_n^{(0)}(x) dx = 0,$$

da p vom Grad $\leq n-1$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Satz 5.1. *Seien $x_1, ..., x_n$ die Nullstellen von P_n. Sei f ein Polynom vom Grad $\leq 2n-1$. Sei $Q_{n-1}(f)$ die interpolatorische Quadraturformel für f bezüglich der Stützstellen $x_1, ..., x_n$. Dann gilt*

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = Q_{n-1}(f).$$

Beweis. Die Polynomdivision von f durch P_n liefert die Polynome q und r vom Grad $\leq n-1$ mit

$$f = qP_n + r,$$

und $f(x_i) = r(x_i)$ für $1 \leq i \leq n$.
Da der Grad von r kleiner gleich $n-1$ ist, folgt

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \cdot r(x_i).$$

Hieraus folgt weiterhin

$$f(x) = q(x) P_n(x) + \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \cdot r(x_i),$$

und es gilt nach Lemma 5.1 und wegen $f(x_i) = r(x_i)$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} q(x)P_n(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{1} L_i(x)dx \cdot r(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{1} L_i(x)dx \cdot r(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{1} L_i(x)dx \cdot f(x_i) \\ &= Q_{n-1}(f).\end{aligned}$$

□

Dieser Satz zeigt, dass durch Benutzung der Nullstellen von P_n der Genauigkeitsgrad der interpolatorischen Formeln stark angestiegen ist. Die Idee dieser Nullstellenbenutzung stammt von Gauß. Ihm zu Ehren werden die entsprechenden interpolatorischen Formeln Gaußsche-Quadratur-Formeln genannt. Mit den Nullstellen $x_1, ..., x_n$ von P_n gilt also, für eine auf $[-1, 1]$ stetige Funktion f,

$$G_{n-1}(f) := \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{1} L_i(x)dx \cdot f(x_i)$$

und

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = G_{n-1}(f) + R_{n-1}(f),$$

wobei $R_{n-1}(f)$ der zugehörige Fehler ist.
Mit der linearen Transformation $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$ kann man die Integration einer stetigen Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ folgendermaßen auf das Intervall $[-1, 1]$ zurückführen:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \bar{f}(t)dt$$

mit

$$\bar{f}(t) := f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right), \qquad t \in [-1, 1].$$

In diesem Kapitel werden weiterhin nur auf $[-1, 1]$ definierte stetige Funktionen betrachtet.

Satz 5.2. *Es gibt keine Quadraturformel $Q_{n-1}(f)$ mit einem Genauigkeitsgrad $\geq 2n$.*

Der folgende Beweis wird nach [6, S. 324] geführt.

Beweis. Wir nehmen an, dass es doch eine solche gäbe:

$$Q_{n-1}(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \cdot f\left(x_k^{(n)}\right).$$

Setze

$$q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)^2, \qquad x \in [-1, 1],$$

mit fest gewählten Stützstellen $x_i \in [-1, 1]$ für $i = 1, 2, ..., n$. Wegen $q(x_i) = 0$ für alle i folgt $Q_{n-1}(q) = 0$, hingegen gilt offensichtlich

$$\int_{-1}^{1} q(x)dx > 0,$$

da $q(x) \geq 0$ für alle x ist, und q vom Grad > 0 ist. Das ist jedoch ein Widerspruch, aus dem die Behauptung folgt. □

Satz 5.3. *Ist f $2n$-mal stetig differenzierbar auf $[-1, 1]$, so ist der Fehler von G_{n-1}*

$$R_{n-1}(f) = \frac{(n!)^4 2^{2n+1}}{((2n)!)^2 (2n+1)!} f^{2n}(\zeta),$$

für ein passend gewähltes $\zeta \in [-1, 1]$.

Beweis. Sei L_f das Lagrangesche Interpolationspolynom von f bezüglich der Nullstellen $x_1, ..., x_n$ von P_n als Stützstellen.

Setze

$$g(t) := \frac{f(t) - L_f(t)}{P_n(t)}, \qquad t \in [-1, 1] \setminus \{x_i | 1 \leq i \leq n\}.$$

$g(t)$ ist offensichtlich nicht für x_i definiert, jedoch können wir $g(t)$ an diesen Stellen stetig erweitern, denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \to x_i} g(t) &= \lim_{t \to x_i} \frac{f(t) - L_f(t) - (f(x_i) - L_f(x_i))}{t - x_i} : \frac{P_n(t) - P_n(x_i)}{t - x_i} \\ &= \frac{f'(x_i) - L_f'(x_i)}{P_n'(x_i)} =: b_i. \end{aligned}$$

b_i ist wohldefiniert, denn x_i ist eine einfache Nullstelle von P_n, also $P_n'(x_i) \neq 0$. Setze also $g(x_i) = b_i$. Dann ist g auf ganz $[-1, 1]$ stetig.

Sei L_g das Lagrangesche Interpolationspolynom von g bezüglich der Stützstellen $x_1, ..., x_n$. Setze

$$G(t) := f(t) - L_f(t) - L_g(t)P_n(t), \qquad t \in [-1,1].$$

Dann ist $G(x_i) = 0$ für alle i. Aus dem Differenzenquotienten folgt

$$\begin{aligned} G'(x_i) &= \lim_{t\to x_i} \frac{G(t)}{t-x_i} \\ &= \lim_{t\to x_i} \frac{G(t)}{P_n(t)} \cdot \frac{P_n(t)-P_n(x_i)}{t-x_i} \\ &= \lim_{t\to x_i} (g(t) - L_g(t)) \cdot P'(x_i) = 0. \end{aligned}$$

Also ist x_i eine doppelte Nullstelle von G.
Setze

$$R(t) := \frac{G(t)}{P_n^2(t)}, \qquad t \in [-1,1] \setminus \{x_i | 1 \le i \le n\},$$

was wiederum wohldefiniert ist, denn die x_i sind die einzigen Nullstellen von P_n. Da die x_i keine dreifachen Nullstellen von P_n^2 sind, folgt $(P_n^2(x_i))'' \neq 0$ für alle i, und nach der Regel von Bernoulli-de l'Hospital gilt:

$$\lim_{t\to x_i} R(t) = \frac{G''(x_i)}{(P_n^2(x_i))''} =: c_i.$$

Mit der Setzung $R(x_i) := c_i$ ist also R auf ganz $[-1,1]$ stetig. Ferner erhält man für alle $t \in [-1,1] \setminus \{x_i | 1 \le i \le n\}$ nach dem Lemma (2.1):

$$R(t) = \frac{G(t)}{P_n^2(t)} = \frac{(f(\xi))^{(2n)}}{(P_n^2(\xi))^{(2n)}} = \frac{2^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi) \tag{5.3}$$

für ein passendes $\xi \in (-1,1)$. Vergleiche auch (5.2) für die Gültigkeit des letzten Gleichheitszeichens.
Seien nun $W(R)$ und $W\left(\alpha f^{(2n)}\right)$ die Wertemengen von R bzw. $\alpha f^{(2n)}$ auf $[-1,1]$ für $\alpha := \frac{2^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^3}$. Da diese beiden Funktionen stetig sind, sind ihre Wertemengen kompakte Intervalle.
Setze $W := W(R) \setminus \{R(x_i) \mid 1 \le i \le n\}$. Nach (5.3) ist dann $W \subseteq W\left(\alpha f^{(2n)}\right)$, und für den Abschluss $\overline{W}$ von W gilt:

$$W(R) = \overline{W} \subseteq \overline{W(\alpha f^{(2n)})} = W\left(\alpha f^{(2n)}\right), \tag{5.4}$$

woraus folgt, dass auch $R(x_i) = c_i \in W\left(\alpha f^{(2n)}\right)$ für alle i.

Nach der Definition von G und R erhält man

$$\begin{aligned} f(t) &= L_f(t) + L_g(t)P_n(t) + G(t) \\ &= L_f(t) + L_g(t)P_n(t) + R(t)P_n^2(t), \qquad t \in [-1,1]. \end{aligned}$$

Da L_g einen Grad $\leq n-1$ hat, folgt aus Lemma 5.1 für die Integration

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} L_f(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)P_n^2(t)dt, \tag{5.5}$$

und nach dem verallgemeinerten ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung, vergleiche [5, S. 142], folgt mit (5.3) und (5.4):

$$\int_{-1}^{1} R(t)P_n^2(t)dt = R(\zeta)\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt = \frac{2^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi)\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt, \tag{5.6}$$

wobei $\zeta, \xi \in [-1,1]$ passend gewählt sind.

Setze nun $h(t) = (t^2-1)^n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} h(t)dt &= \int_{-1}^{1} (t-1)^n(t+1)^n dt \\ &= (t-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}(t+1)^{n+1}\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(t-1)^{n-1}(t+1)^{n+1}dt \\ &= -\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(t-1)^{n-1}(t+1)^{n+1}dt \\ &= -\frac{n}{n+1}\cdot\frac{-(n-1)}{n+2}\int_{-1}^{1}(t-1)^{n-2}(t+1)^{n+2}dt, \end{aligned}$$

und nach insgesamt n Schritten erhält man

$$\int_{-1}^{1} h(t)dt = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_{-1}^{1}(t+1)^{2n}dt = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}. \tag{5.7}$$

Nun gilt nach (5.1)

$$\begin{aligned} 2^{2n}(n!)^2\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt &= \int_{-1}^{1} h^{(n)}(t)h^{(n)}(t)dt \\ &= h^{(n-1)}(t)h^{(n)}(t)\Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} h^{(n-1)}(t)h^{(n+1)}(t)dt \\ &= -\int_{-1}^{1} h^{(n-1)}(t)h^{(n+1)}(t)dt, \end{aligned}$$

woraus nach insgesamt n Schritten folgt

$$
\begin{aligned}
2^{2n}(n!)^2 \int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt &= (-1)^n \int_{-1}^{1} h(t)h^{(2n)}(t)dt \\
&= (-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} h(t)dt \\
&\overset{(5.7)}{=} (-1)^n(2n)!(-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \cdot 2^{2n+1},
\end{aligned}
$$

so dass schließlich

$$
\int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt = \frac{2}{2n+1}
$$

gilt. Setzt man diesen Wert in (5.6) ein, so folgt aus (5.5) die Behauptung.

□

6 Satz von Szegö und Konvergenz von Quadraturformeln

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir verschiedene Quadraturformeln betrachtet und gezeigt, dass auf einem kompakten Intervall hinreichend oft differenzierbare Funktionen konvergieren.
In diesem Kapitel soll der Frage nachgegangen werden, welche dieser Quadraturformeln sogar für alle stetigen Funktionen konvergieren.

6.1 Die Sätze von Szegö und Stjeklov

Zunächst ist es zweckmäßig, sich gewisse funktionalanalytische Begriffe in Erinnerung zu rufen.
Mit $C[a,b]$ sei die Menge der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ bezeichnet. Es ist klar, dass $C[a,b]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Durch

$$d(x,y) := \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \tag{6.1}$$

wird auf diesem Raum eine Metrik definiert. Mit dem dadurch gegebenen Konvergenzbegriff ist $C[a,b]$ vollständig, vergleiche auch [7, S. 21], was bedeutet, dass jede Cauchy-Folge von Elementen aus $C[a,b]$ gegen eine Funktion aus $C[a,b]$ konvergiert.
Durch

$$||x|| := d(x,0)$$

wird schließlich auf $C[a,b]$ eine Norm definiert, womit dieser Raum zu einem Banach-Raum wird, also zu einem vollständig normierten Vektorraum.
(Nach dem Cauchyschen Konvergenzsatz ist $\mathbb{R}$ bezüglich der Betragsnorm ein weiteres Beispiel für einen Banach-Raum.)

Sind X und Y normierte Räume, so sei mit $L(X,Y)$ der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen von X in Y bezeichnet. Nach [7, S. 75f] gilt der folgende

Satz 6.1. *Sei A eine lineare Abbildung von X in Y, wobei X und Y normierte Räume sind. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $A \in L(X, Y)$.
(2) A ist stetig bei 0.
(3) Es gibt ein $M \geq 0$ *mit*

$$||Ax|| \leq M||x||$$

für alle $x \in X$*, d.h.* A *ist beschränkt.*

Satz 6.2. *Sei* $A \in L(X, Y)$*. Setze*

$$||A|| := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{||Ax||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||. \tag{6.2}$$

Dann ist $||\cdot||$ *eine Norm auf* $L(X, Y)$*, und* $L(X, Y)$ *ist ein Banach-Raum, falls* Y *einer ist.*

Beweis. Vergleiche [7, S. 76f] und [3, S. 41]. □

Satz 6.3. *Sei* Q_n *eine beliebige Quadraturformel, dann ist* $Q_n \in L(C[a, b], \mathbb{R})$ *und*

$$||Q_n|| = \sum_{i=0}^{n} \left| A_i^{(n)} \right|.$$

Zum Beweis dieses Satzes gehen wir nach [7, S. 78f] vor.

Beweis. Es ist klar, dass Q_n linear ist. Sei $0 \neq x \in C[a, b]$ beliebig gewählt. Wegen

$$\begin{aligned}
|Q_n(x)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} x \left(t_i^{(n)} \right) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \left| A_i^{(n)} \right| \cdot \left| x \left(t_i^{(n)} \right) \right| \\
&\leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \cdot \sum_{i=0}^{n} \left| A_i^{(n)} \right| \\
&= ||x|| \cdot \sum_{i=0}^{n} \left| A_i^{(n)} \right|
\end{aligned}$$

ist Q_n nach (6.1) beschränkt, also stetig nach Satz 6.1, und nach (6.2) gilt

$$||Q_n|| \leq \sum_{i=0}^{n} \left| A_i^{(n)} \right|. \tag{6.3}$$

Betrachte nun $y_n \in C[a,b]$ mit

$$y_n(t) = \begin{cases} sgn\left(A_0^{(n)}\right), & a \leq t \leq t_0^{(n)} \\ sgnA_i^{(n)} + \frac{\left(sgnA_{i+1}^{(n)} - sgnA_i^{(n)}\right)}{\left(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\right)}\left(t - t_i^{(n)}\right), & t_i^{(n)} \leq t \leq t_{i+1}^{(n)}, 0 \leq i \leq n \\ sgnA_n^{(n)}, & t_n^{(n)} \leq t \leq b \end{cases}$$

Dann ist $|y_n(t)| \leq 1$ für alle t, also $||y_n|| \leq 1$ nach (6.1).
Somit gilt

$$\begin{aligned} ||Q_n|| &= \sup_{||x|| \leq 1} |Q_n(x)| \\ &\geq Q_n(y_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} y_n\left(t_i^{(n)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} sgnA_i^{(n)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left|A_i^{(n)}\right|. \end{aligned}$$

Zusammen mit (6.3) folgt daraus:

$$||Q_n|| = \sum_{i=0}^{n} \left|A_i^{(n)}\right|.$$

□

Für den folgenden Satz von Banach-Steinhaus [7, S. 126] benötigen wir noch die folgende

Definition. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt dicht in X, wenn X die abgeschlossene Hülle von A ist.*
Ist beispielsweise $X = C[a,b]$ und P der Raum der Polynome, so besagt der Approximationssatz von Weierstraß [vgl. Kapitel 2], dass P dicht in X liegt.

Mit diesem Begriff folgt der

Satz 6.4. *(Banach-Steinhaus)*
Dafür, dass die Folge (A_n) linearer stetiger Abbildungen A_n, die einen Banach-Raum X in einen Banach-Raum Y abbilden, auf X gegen eine stetige lineare Abbildung A punktweise konvergiert, sind die beiden folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

(1) Es gibt ein $M \geq 0$ mit $||A_n|| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) Die Folge $(A_n(x))$ ist für jedes $x \in D$ eine Cauchy-Folge, wobei D eine dichte Teilmenge von X ist.

Mit Hilfe dieses Satzes von Banach-Steinhaus, dessen Beweis ich hier nicht anführen werde, kann man sofort den folgenden Satz von Szegö beweisen [7, S. 130f], der für eine Folge $(Q_n(x))$ von Quadraturformeln ihre Konvergenz für alle $x \in C[a, b]$ charakterisiert.

Satz 6.5. *(Szegö)*
Sei $(Q_n(x))$ eine Folge von Quadraturformeln für $x \in C[a, b]$.
Genau dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = \int_a^b x(t)dt \tag{6.4}$$

für alle $x \in C[a, b]$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(a) Es gibt ein $M \geq 0$ mit

$$\sum_{i=0}^{n} \left| A_i^{(n)} \right| \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(p) = \int_a^b p(t)dt$$

für alle Polynome p.

Beweis. ($\Longrightarrow$): Setze $Q(x) := \int_a^b x(t)dt$. Dann ist Q offensichtlich linear, und wegen

$$|Q(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq \int_a^b |x(t)|dt \leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \cdot (b-a) = (b-a)||x||$$

ist Q stetig bei 0, also stetig nach Satz 6.1. Nach Satz 6.3 ist $Q_n \in L(C[a, b], \mathbb{R})$ für alle n.
Gilt nun (6.4), so gilt nach dem Satz von Banach-Steinhaus die Bedingung (1) dieses Satzes, woraus nach Satz 6.3 sofort (a) aus (1) folgt. (b) gilt nach Voraussetzung, da jedes Polynom in $C[a, b]$ liegt.
($\Longleftarrow$): Wiederum nach Satz 6.3 folgt aus (a) sofort die Bedingung (1) des Satzes von Banach-Steinhaus. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß kann man für D in Bedingung (2) den Raum der Polynome nehmen, und (2) folgt aus (b). Daher gilt nach dem Satz von Banach-Steinhaus für alle $x \in C[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = \tilde{Q}(x)$$

für eine passende stetige lineare Abbildung $\tilde{Q}$.
Sei $(p_n)_{n\to\infty}$ eine Folge von Polynomen, die nach dem Approximationssatz von Weierstraß gleichmäßig gegen x konvergiert. Nach [2, S. 553] und nach (b) folgt

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) = \lim_{n\to\infty} Q(p_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} Q_m(p_n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tilde{Q}(p_n) = \tilde{Q}\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) = \tilde{Q}(x). \end{aligned}$$

Also gilt (6.4). □

Satz 6.6. *(Stjeklov)*
Seien sämtliche Gewichte einer Folge von Quadraturformeln $(Q_n)_{n\to\infty}$ nicht negativ. Dann ist die Bedingung (b) des Satzes von Szegö notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Folge $(Q_n(x))_{n\to\infty}$ für alle $x \in C[a,b]$.

Beweis. Aus der Konvergenz der Quadraturformeln für alle $x \in C[a,b]$ folgt die Bedingung (b) des Satzes von Szegö.
Gilt umgekehrt die Bedingung (b), so erhält man mit dem 1-Polynom

$$b - a = \int_a^b 1dt = \lim_{n\to\infty} Q_n(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left|A_k^{(n)}\right|$$

nach Voraussetzung, woraus Bedingung (a) folgt, und nach dem Satz von Szegö erhält man die Konvergenz der Quadraturformeln für alle $x \in C[a,b]$. □

6.2 Anwendungen

Satz 6.7. *Die summierte Trapezregel und die Gauß-Quadraturformeln konvergieren für alle $x \in C[a,b]$.*

Beweis. Da jedes Polynom zweimal stetig differenzierbar ist, folgt aus (2.3), dass die summierte Trapezregel für alle Polynome konvergiert. Wegen (2.4) sind die Gewichte sämtlicher T_n positiv. Nach dem Satz von Stjeklov folgt die Behauptung für die summierte Trapezregel.
Nun zu den Gauß-Quadraturformeln G_{n-1}. Vergleiche dazu [7, S. 135].
Sei P_n das n-te Legendre-Polynom mit den Nullstellen $x_1, ..., x_n$. Setze

$$f_i(x) = \left(\frac{P_n(x)}{x - x_i}\right)^2, \qquad i = 1, ..., n.$$

Dann ist $2n-2$ der Grad von f_i und

$$f_i(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ (P_n'(x_k))^2, & k = i \end{cases}$$

nach (4.3) und Bemerkung (5.1), denn P_n stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit ω_n überein.
Es folgt nach Satz 5.1

$$0 < \int_a^b f_i(t)dt = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \cdot f_i(x_k) = A_i^{(n)} \left(P_n'(x_i)\right)^2,$$

und $A_i^{(n)} > 0$ für alle i. Nun folgt die Behauptung aus dem Satz von Stjeklov. □

Wloka bemerkt auf Seite 132, dass für involutorische Quadraturformeln bei äquidistanten Stützstellen schon für $n = 9$ negative Gewichte auftreten. Ferner bemerkt er, dass Polya ein $x_0 \in C[a, b]$ konstruiert habe, sodass $Q_n(x_0)$ nicht konvergiert für $n \to \infty$. Allerdings gibt er nicht an, wo man dies nachlesen kann.

7 Fazit und Ausblick

Unter allen interpolatorischen Quadraturformeln haben die Gaußschen nach den Sätzen 5.1 und 5.2 den höchstmöglichen Genauigkeitsgrad. Sie konvergieren für alle auf einem kompakten Intervall stetigen Funktionen, was für beliebige interpolatorische Quadraturformeln im Allgemeinen nicht gilt (vgl. die sich an Satz 6.7 anschließende Bemerkung). Die Gaußschen Quadraturformeln $G_{n-1}(f)$ hängen nur von den n Nullstellen des n-ten Legendre-Polynoms und den Funktionswerten von f an diesen Stellen ab. In [4] sind 20-stellige Näherungswerte dieser Nullstellen für kleine natürliche Zahlen n angegeben. Für $G_{n-1}(f)$ haben wir den Fehler $R_{n-1}(f)$ in Satz 6.3 berechnet, falls f eine $2n$-mal stetig differenzierbare Funktion ist.
Leider scheint eine entsprechende Fehlerberechnung für beliebige stetige Funktionen nicht zu existieren. Ein weiteres offenes Problem scheint die Frage zu sein, ob man die Stützstellen so wählen kann, dass dann zwar der Genauigkeitsgrad kleiner als $2n-1$ ist, dafür jedoch der Fehler kleiner ist als der des Gauß-Verfahrens G_{n-1}. Ansätze dazu gibt es in [4, Kapitel 8].

Literaturverzeichnis

[1] Günther Hämmerlin and Karl-Heinz Hoffmann. *Numerische Mathematik*. Springer, Berlin [u.a.], 1994.

[2] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis Teil I*. Teubner, Stuttgart, 1994.

[3] John Horvath. *Topological vector spaces and distributions*. Addison-Wesley, Reading, Mass. [u.a.], 1966.

[4] Vladimir I. Krylov. *Approximate calculation of integrals*. MacMillan, New York, 1962.

[5] Alexander M. Ostrowski. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*. Birkhäuser, Basel [u.a.], 1960.

[6] Hans Rudolf Schwarz and Norbert Köckler. *Numerische Mathematik*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009.

[7] Joseph Wloka. *Funktionalanalysis und Anwendungen*. de Gruyter, Berlin [u.a.], 1971.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Jan Assion, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der im Literaturverzeichnis angegeben Quellen angefertigt habe.

Bielefeld, den _______________ ___________________________________

Jan Assion