Orlicz - Räume

Ausarbeitung

im Rahmen des Seminars:
„Evolutionsgleichungen“
Prof. Dr. Etienne Emmrich

vorgelegt von:

Nora Müller
nora.mueller@uni-bielefeld.de

Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Juni 2011

Zusammenfassung

Hinter den Orlicz[1]-Räumen verbirgt sich die Idee, Vektorräume zu finden, die den bekannten Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ auf gewisse Art und Weise verallgemeinern. Auf dem uns bereits bekannten Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet ist, betrachtet man die zugehörige Norm durch

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\forall u \in L^p = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$. Dies kann jedoch durch die Notation einer Funktion $\Phi = \Phi(t) = t^p$ umgeschrieben werden, so dass man für die Definition von $L^p = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega \Phi(|u(x)|) dx < \infty \right\}$ erhält. Damit verändert sich die Norm zwangsläufig zu

$$\|u\|_{L^p} = \Phi^{-1} \left(\int_\Omega \Phi(|u(x)|) dx \right)$$

wobei Φ^{-1} die Umkehrfunktion von Φ mit $\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}$ darstellt. In den Lebesgue-Räumen L^p betrachten wir also Funktionen, die ein potentielles Wachstum aufweisen. Es stellt sich damit aber die Frage, ob es nicht auch möglich ist, diese Funktionen Φ durch allgemeinere Funktionen - beispielsweise mit exponentiellem Wachstum, zu ersetzen. Diese Fragestellung soll innerhalb dieser Ausarbeitung näher betrachtet werden und durch eine Einführung der Orlicz-Räume fundiert werden.

[1] Wladyslaw Roman Orlicz wurde 1903 in der Nähe von Krakau geboren und verstarb 1990 in Poznan (Polen). Orlicz studierte ab 1919 an der Jan Kazimier-Universität in Lvov u.a. bei Stefan Banach und Hugo Steinhaus. 1929/30 studierte W. Orlicz an der Universität Göttingen Physik. Anschließend arbeitete er wieder in Lvov und gehörte neben Stefan Banach, Hugo Steinhaus, Stansilaw Mazur, J. Schauder und vielen mehr der 'Lvov School of Mathematics' an. W. Orlicz erhielt eine Professur an der heutigen Adam-Mickiewicz Universität und lehrte zudem am 'Math. Institute of the Polish Academy of Science'.

Inhaltsverzeichnis

1 Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi$ **2**

2 Orlicz-Raum L_Φ und Luxemburg-Norm **8**

3 Raum E_Φ **12**

4 Dualräume **15**

5 Konvergenzbegriffe **17**

6 Δ_2-Bedingung **21**

Literaturverzeichnis **23**

Kapitel 1

Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Wie bereits in der Zusammenfassung beschrieben, gilt es die Funktion Φ näher zu charakterisieren, sowie in verallgemeinerter Form darstellen zu können. Aus diesem Grund ist zunächst die Definition einer Orlicz-Klasse zu nennen, die durch die uns interessierende Funktion Φ als Äquivalenzklasse wie folgt zu verstehen ist:

Definition 1.1 (Die Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$)**.** Sei $\Phi = \Phi(t)$ eine nicht-negative Funktion definiert auf $[0, \infty[$. Die *Orlicz-Klasse* $\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$ sei der Raum der Äqivalenzklassen f.ü. gleicher Lebesgue-messbarer Funktionen $u : \Omega \to K$ wobei $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und mit

$$\int\limits_\Omega \Phi(|u(x)|)dx < \infty$$

Definiere

$$\rho_\Phi(u) := \int\limits_\Omega \Phi(|u(x)|)dx$$

Setzt man nun $\Phi(t) = ct^p$ mit $c > 0$ beliebig, so erhält man, dass der uns bekannte Raum $L^p(\Omega)$ ein Spezialfall einer Orlicz-Klasse ist. Wie schon in der Idee beschrieben, können bereits mit Hilfe der Definition der Orlicz-Klasse die Funktionen $\Phi(t)$ verallgemeinert gewählt werden, u.a. auch mit exponentiellem Wachstum, wie das folgende Beispiel verdeutlicht:

Beispiel 1.2. 1. $\Phi(t) = t \cdot \log^+(t) = t \cdot \max(0, \log(t))$ gilt als 'Ersatz' für $L^1(\Omega)$, da sowohl die Orlicz-Klasse als auch der Lebesgue-Raum L^1, Räume von Äquivalenzklassen f.ü. gleicher Lebesgue-messbarer Funktionen $u : \Omega \to K$ beschreiben mit

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx = \int_\Omega |u(x)| \max(0, \log(|u(x)|))dx$$
$$= c \int_\Omega |u(x)|dx < \infty \ , \quad c \in \mathbb{R}$$

2. Auf $\Omega = [0,1]$ gilt für $\Phi(t) = \exp(t)$:

   - $u(x) = -\frac{1}{2}\log(x) \in \mathscr{L}_\Phi(\Omega)$, da $\int\limits_0^1 exp(\left|-\frac{1}{2}log(x)\right|)dx < \infty$
   - $v(x) = 2u(x) = -\log(x) \notin \mathscr{L}_\Phi$, da $\int\limits_0^1 exp(|-log(x)|)dx = \infty$

Anhand dieses Beispiels wird deutlich, dass die Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi$ kein Vektorraum sein muss. Zudem ist es unter der Annahme der Definition der Orlicz-Klasse nicht klar, ob die inverse Funktion Φ^{-1} existiert, welche wie schon zuvor bemerkt, für die Konstruktion der Norm notwendig ist. Das Problem der Existenz der inversen Funktion führt uns zu der Einführung der sogenannten *Young-Funktion*, d.h. einer Funktion Φ mit besonderen Eigenschaften:

Definition 1.3 (Young-Funktion)**.** Eine Funktion Φ heißt Young-Funktion, falls

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds, \quad t \geq 0$$

gilt, wobei $\phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften ist:

1. $\phi(0) = 0$
2. $\phi(s) > 0$ für $s > 0$
3. ϕ ist rechtsstetig in jedem Punkt $s \geq 0$
4. ϕ nicht fallend auf $]0, \infty[$

Doch welche Auswirkungen hat diese Definition 1.3 auf die Orlicz-Klassen? Ausgehend von der vorherigen Definition 1.1 lassen sich weitere Eigenschaften für die Young-Funktionen herleiten, die in dieser Ausarbeitung nur benannt, aber nicht bewiesen werden.

Bemerkung 1.4.

- Eine Young-Funktion ist stetig, nicht-negativ, strikt wachsend und konvex auf $[0,\infty[$
- Es gelten für $\alpha \in [0,1]\,, \beta > 1$

$$\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$$
$$\Phi(\beta t) \geq \beta\Phi(t)$$

- $\Phi(t) = t \cdot \max(0, \log(t))$ ist eine Young-Funktion.

Satz 1.5. *Sei Φ eine Young-Funktion. Dann ist die Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$ eine konvexe Menge und es gilt für ein endliches Gebiet Ω:*

$$\mathscr{L}_\Phi(\Omega) \subset L^1(\Omega)$$

Beweis. Nach 1.4 wissen wir, dass Φ konvex ist auf $[0,\infty[$. Für die Konvexität betrachte

$$\Phi(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda\Phi(s) + (1-\lambda)\Phi(t)$$

Für $s = |u(x)|$ und $t = |v(x)|$ erhalte:

$$\Phi(\lambda\,|u(x)| + (1-\lambda)\,|v(x)|) \leq \lambda\Phi(|u(x)|) + (1-\lambda)\Phi(|v(x)|)$$

Integriert man nun über Ω und nutzt die Konvexität und Monotonie der Young-Funktion Φ aus, ergibt sich:

$$\int\limits_\Omega \Phi(\lambda\,|u(x)| + (1-\lambda)\,|v(x)|)dx \leq \lambda \underbrace{\int\limits_\Omega \Phi(|u(x)|)dx}_{<\infty} + (1-\lambda) \underbrace{\int\limits_\Omega \Phi(|v(x)|)dx}_{<\infty} < \infty$$

Damit ist $\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$ eine konvexe Menge. Es bleibt zu zeigen: $\mathscr{L}_\Phi(\Omega) \subset L^1(\Omega)$
Sei $u \in \mathscr{L}_\Phi(\Omega)$. Als eine weitere Eigenschaft der Young-Funktion $\Phi(t)$ kann sich folgendes überlegt werden: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty$. Mit $t = |u(x)|$ existiert dann ein k>0 mit $|u(x)| > k$ und

$$\frac{\Phi(|u(x)|)}{|u(x)|} > 1$$

und damit auch

$$|u(x)| < \Phi(|u(x)|)$$

Betrachte nun $\Omega_k = \{x \in \Omega : |u(x)| > k\}$ und teile das Integral wie folgt auf:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|dx &= \int_{\Omega_k} |u(x)|dx + \underbrace{\int_{\Omega\setminus\Omega_k} |u(x)|dx}_{\leq k\mu(\Omega\setminus\Omega_k)} \\
&\leq \underbrace{\int_{\Omega_k} |u(x)|dx}_{\leq \int_\Omega |u(x)|dx} + k\mu(\Omega) \\
&\leq \rho_\Phi(u) + k\mu(\Omega) < \infty
\end{aligned}$$

Wobei μ das Lebesgue-Maß auf Ω bezeichne. Nach Definition des Lebesgue-Raums $L^1(\Omega)$ ist damit $u \in L^1(\Omega)$. Damit ist die obige Inklusion gezeigt.

□

Erinnert man sich an das eigentliche Problem, eine Norm mit Hilfe einer Young-Funktion Φ konstruieren zu wollen, so führt dies zur näheren Untersuchung der komplementären Funktionen

Definition 1.6 (Komplementäre Funktion)**.** Sei Φ eine durch ϕ erzeugte Young-Funktion, d.h. $\Phi = \int_0^t \phi(s)ds$. Dann heißt

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds$$

komplementäre Funktion von Φ, wobei $\psi(t) = \sup_{\phi(s)\leq t} s\,, \quad t \geq 0$ die Pseudoinverse sei.

Bemerkung 1.7. Ist ϕ stetig und strikt wachsend auf $[0,\infty[$, dann ist ψ gerade die Umkehrfunktion von ϕ und umgekehrt, d.h.

$$\psi(t) = \phi^{-1}(t)\,, \quad \phi(t) = \psi^{-1}(t)$$

Im verallgemeinerten Sinne sind ϕ und ψ zueinander invers, so dass auch Φ und Ψ komplementär zueinander stehen. Man bezeichnet daher Φ, Ψ als Paar komplementärer Young-Funktionen.

Ein wichtiges Hilfsmittel bildet die Young-Ungleichung, welche sich auf ein Paar komplementärer Young-Funktionen übertragen lässt:

Satz 1.8. *Seien Φ, Ψ ein Paar komplementärer Young-Funktionen. Dann gilt*

$$u \cdot v \leq \Phi(u) + \Psi(v) \quad \forall u, v \in [0, \infty[$$

Die Gleichheit liegt genau dann vor, wenn entweder $v = \phi(u)$ oder $u = \psi(v)$.

Beweis. In dieser Ausarbeitung sei nur eine anschauliche Beweisidee aus [1] angegeben. Ausführliche Beweise können in verschiedenen Büchern gefunden werden, u.a. kann in [2] [§14, Young´s inequality; S.64] eine Version studiert werden, welche über die Konstruktion von Legendre Tranformationen die Ungleichung nachweist. Alternativ lässt sich der Beweis auch als Folgerung eines verallgemeinerten Theorems zeigen, welches in [4] [4.8 An inequality of Young, Theoreme 156,158; S.111/112] nachgelesen werden kann.

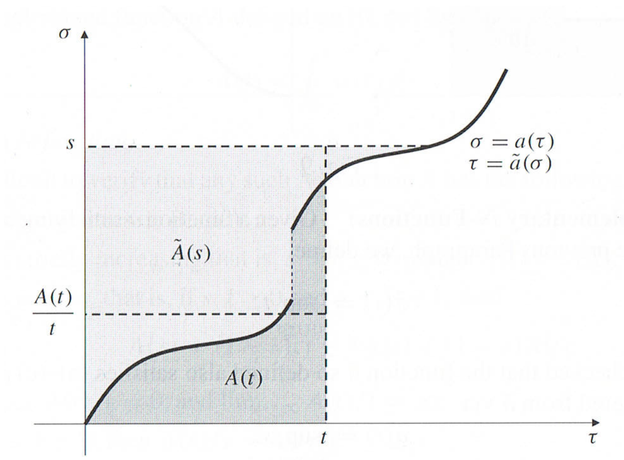

Abbildung 1.1: Mit Hilfe dieser Darstellung der Young-Ungleichung aus [1] [S.264] kann der Zusammenhang zwischen den komplementären Funktionen gut verdeutlicht werden. Demnach gilt in vereinfachter Form, dass das Rechteck $s \cdot t$ immer kleiner bzw. gleich der Summe der beiden Fläche der komplementären Funktionen, also der Summe der Integrale $A(t) + \widetilde{A}(s)$ ist.

□

Erinnerung (Hölder-Ungleichung)**.** Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Setze zudem bei $p = 1$ für $q = \infty$ bzw. bei $p = \infty$ für $q = 1$. Ist dann $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$, dann gilt:

$$f \cdot g \in L^1(\Omega) \text{ und } \|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

Bemerkung 1.9. Die bekannte Hölder-Ungleichung kann mit Hilfe der Young-Ungleichung auf ein Paar komplementärer Young-Funktionen übertragen werden und gilt damit auch für Orlicz-Klassen:

Seien Φ, Ψ ein Paar, $u \in \mathscr{L}_\Phi(\Omega), v \in \mathscr{L}_\Psi(\Omega)$. Dann gilt:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \rho_\Phi(u) \cdot \rho_\Psi(v)$$

und $u \cdot v \in L^1(\Omega)$.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge von Young-Funktionen und ihren komplementären Funktionen werde ein Beispiel skizziert, welches sich auch in [6] [Kap. 3.3, S.136] finden lässt.

Beispiel 1.10. Betrachte dazu die Young-Funktion $\Phi(t) = t \cdot \max(0, \log t)$ und bestimme zu dieser die zuvor definierte komplementäre Funktion $\Psi(t)$. Nach Definition 1.3 gilt

$$\phi(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{d}{dt}[t \cdot 0] = 0, & \text{für } 0 < t < 1, \\ \frac{d}{dt}[t \cdot \log(t)] = \log(t) + 1, & \text{für } t \geq 1, \end{cases}$$

Zur Bestimmung der komplementären Funktion ist nach Definition 1.6 ein $\psi(t)$ zu finden mit

$$\psi(t) = \begin{cases} \sup\limits_{\phi(s)=0} s = 0, & \text{für } t = 0 \\ \sup\limits_{0<\phi(s)\leq t<1} s = 1, & \text{für } 0 < t < 1 \\ \sup\limits_{\log(s)+1\leq t} s = \exp(t-1), & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

Man erhält damit für die komplementäre Funktion folgenden Ausdruck:

$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau = \begin{cases} t, & \text{für } 0 < t < 1 \\ \exp(t-1), & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

Zur Verdeutlichung der Beziehung zwischen den Young-Funktionen und den Orlicz-Klassen, sei das folgende Theorem genannt, dessen Beweis in [6] [Kap 3.5., S.140] nachgelesen werden kann.

Theorem 1.11. *Sei Ω ein endliches Gebiet und Φ_1, Φ_2 zwei Young-Funktionen. Dann gilt für alle $t \geq T$ genau dann*

$$\mathscr{L}_{\Phi_2} \subset \mathscr{L}_{\Phi_1}$$

wenn c>0, T>0 existieren mit

$$\Phi_1(t) \leq c \cdot \Phi_2(t)$$

Kapitel 2

Orlicz-Raum L_Φ und Luxemburg-Norm

Wir wollen uns nun wieder unserem eigentlichen Problem widmen, einen Raum, genauer einen Vektorraum zu finden, der sowohl mit einer Norm versehen ist, als auch die im vorherigen Abschnitt eingeführten Paare komplementärer Young-Funktionen beinhaltet. Dazu schaue man sich zunächst die sogenannte Orlicz-Norm an, welche 1931 durch W. Orlicz und Z. Birnbaum eingeführt und studiert wurde.

Definition 2.1. Seien Φ, Ψ ein Paar komplementärer Young-Funktionen und u eine messbare, f.ü. auf Ω definierte Funktion. Dann ist die Orlicz-Norm von u gegeben durch:

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\substack{v \in \mathscr{L}_\Psi(\Omega) \\ \rho_\Psi(v) \leq 1}} \int_\Omega |u(x)v(x)| \, dx$$

Mit Hilfe dieser Definition ist es nun möglich einen Orlicz-Raum zu definieren:

Definition 2.2. Der Raum aller messbaren Funktionen u mit $\|u\|_\Phi < \infty$ werde mit $L_\Phi(\Omega)$ bezeichnet und Orlicz-Raum genannt.

Es kann gezeigt werden, dass ein Raum mit den zuvor beschriebenen Eigenschaften gefunden werden kann:

Theorem 2.3. *Der Orlicz-Raum $L_\Phi(\Omega)$ ist ein (komplexer) Vektorraum und*

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\substack{v \in \mathscr{L}_\Psi(\Omega) \\ \rho_\Psi(v) \leq 1}} \int_\Omega |u(x)v(x)| dx$$

definiert eine Norm.

Beweis. Siehe [6] [3.6.4 Theorem, S.145] □

Bemerkung 2.4. Die Hölder-Ungleichung kann direkt auf den Orlicz-Raum mit der zugehörigen Orlicz-Norm übertragen werden:

Seien $u \in L_\Phi, v \in L_\Psi$, dann gilt $u \cdot v \in L^1$ und $\int\limits_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_\Phi \cdot \|v\|_\Psi$

Doch auch hinter der neu eingeführten Orlicz-Norm verbirgt sich ein Problem, welches es erneut zu lösen gilt. Die Orlicz-Norm benötigt nämlich per Definition einen Ausdruck für die komplementäre Funktion Ψ. Auf diesen Ausdruck allerdings zu schließen, kann sich je nach Art der vorgegebenen Young-Funktion Φ als sehr schwierig erweisen. Obgleich ist es unser Ziel einen Banachraum zu konstruieren, der eine zuverlässige und damit universell einsetzbare Norm enthält. Eine zur Orlicz-Norm äquivalente Norm, die gerade das zuvor beschriebene Problem umgeht, kann durch die im folgenden definierte Luxemburg-Norm gefunden werden:

Definition 2.5. Sei Φ eine Young-Funktion und u eine messbare Funktion definiert auf Ω. Dann ist die Luxemburg-Norm gegeben durch

$$|||u|||_\Phi = \inf \left\{ k > 0 : \int\limits_\Omega \Phi\left(\tfrac{1}{k}|u(x)|\right)dx \leq 1 \right\}$$

Mit der Behauptung, dass die in diesem Abschnitt definierten Normen wirklich äquivalent sind, befasst sich das folgende Theorem:

Theorem 2.6. *$\forall u \in L_\Phi(\Omega)$ gilt:*

$$|||u|||_\Phi \leq \|u\|_\Phi \leq 2 \cdot |||u|||_\Phi$$

d.h. die Normen $\|\cdot\|_\Phi$ und $|||\cdot|||_\Phi$ sind äquivalent.

Beweis. Für den Beweis der ersten Ungleichung

$$|||u|||_\Phi \leq \|u\|_\Phi$$

betrachte zunächst folgendes Lemma, dessen Beweis in [4] [Lemma 3.7.2, S. 150] nachgelesen werden kann.

Lemma 2.7. *Sei Φ eine Young-Funktion und $u \in L_\Phi(\Omega)$ mit $\|u\|_\Phi \neq 0$. Dann gilt*

$$\int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{1}{\|u\|_\Phi} \cdot |u(x)|\right)dx \leq 1 \textit{ und damit auch } \rho_\Phi\left(\frac{u}{\|u\|_\Phi}\right) \leq 1$$

Unter Verwendung eines weiteren Hilfssatzes

Lemma 2.8. *Sei $u \in L_\Phi(\Omega)$. Dann gilt*

1. $\rho_\Phi(u) \leq |||u|||_\Phi$, *falls* $|||u|||_\Phi \leq 1$
2. $\rho_\Phi(u) \geq |||u|||_\Phi$, *falls* $|||u|||_\Phi > 1$

gilt damit für die zu betrachtenden Normen:

$$|||u|||_\Phi = \inf_{k>0} \left\{ \rho_\Phi \left(\frac{1}{k} |u(x)| \right) \leq 1 \right\} \text{ und somit auch}$$

$$\|u\|_\Phi = \sup_{v \in \mathscr{L}_\Psi(\Omega)} \int\limits_\Omega |u(x)v(x)|\, dx, \quad \rho_\Psi(v) \leq 1$$

Damit erhalte folgende Abschätzungen für $v = \frac{u}{\|u\|_\Phi}$:

$$\rho_\Phi \left(\frac{u}{\|u\|_\Phi} \right) \leq \frac{|||u|||_\Phi}{\|u\|_\Phi} \leq 1, \text{ wobei damit auch } |||u|||_\Phi \leq \|u\|_\Phi$$

Für den Beweis der zweiten Ungleichung

$$\|u\|_\Phi \leq 2|||u|||_\Phi$$

nutzt man zunächst eine Folgerung aus der Hölder Ungleichung für Olricz-Klassen, genaueres siehe [4] [Theorem 3.3.8., S.136]:

$$\|u\|_\Phi \leq \rho_\Phi(u) + \rho_\Phi(v) \leq \rho_\Phi(u) + 1$$

Wendet man diese Folgerung nun auf $w = \frac{u}{|||u|||_\Phi}$ an, erhält man:

$$\begin{aligned}
\|w\|_\Phi &\leq \rho_\Phi(w) + 1 \\
&= \int\limits_\Omega \Phi\left(|w(x)|\right) dx + 1 \\
&= \underbrace{\int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{1}{|||u|||_\Phi} |u(x)| \right) dx}_{\overset{*}{\leq} 1} + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Wobei man sich für $*$ die folgende Abschätzungen überlegen kann. Erinnert man sich an die bereits genannte Definition der Luxemburg-Norm $||| \cdot |||_\Phi$

zurück, so ist die Luxemburg-Norm gerade definiert als das Infimum über $k > 0$, so dass das Integral $\rho_\Phi(\frac{u}{k}) \leq 1$ abgeschätzt werden kann. Betrachtet man diese Definition unter der Annahme, dass $\liminf_{k>0, k\to\infty} k = |||u(x)|||_\Phi$ gilt, so ergeben sich mit Hilfe des Lemmas von Fatou [Für eine Folge messbarer, nichtnegativer Funktionen, die fast überall auf einem Gebiet definiert sind, gilt, dass dann der Limesinferior der Funktionenfolge integrierbar und das $\int \liminf \ldots dx \leq \liminf \int \ldots dx$]

$$\begin{aligned}
\rho_\Phi(\frac{u}{\liminf k}) &= \int \Phi(\frac{|u(x)|}{\liminf k})dx \\
&= \int \liminf \Phi(\frac{|u(x)|}{k})dx \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int \Phi(\frac{|u(x)|}{k})dx \\
&= \int \Phi(\frac{|u(x)|}{|||u(x)|||_\Phi})dx \leq 1
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir zusammenfassend

$$\frac{\|u\|_\Phi}{|||u|||_\Phi} \leq 2 \text{ und somit } \|u\|_\Phi \leq 2|||u|||_\Phi$$

□

Mit Hilfe der Luxemburg-Norm und der vorherigen Beobachtung, dass es sich bei dem Orlicz-Raum um einen Vektorraum handelt, kann man sich nun mit der Vollständigkeit befassen.

Theorem 2.9. *Der Orlicz-Raum $L_\Phi(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Beweis. Dieser Beweis kann in [6] [Kap. 3.9, S.156] nachgelesen werden. □

Eine etwas andere Definition des Orlicz-Raumes wird in [1] verwandt, auf die hier aufmerksam gemacht wird.

Satz 2.10. *Der Orlicz-Raum $L_\Phi(\Omega)$ ist die lineare Hülle der Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$, d.h.*

$$L_\Phi(\Omega) = span(\mathscr{L}_\Phi(\Omega))$$

Die Behauptungen, dass der Orlicz-Raum ein linearer Raum ist und das Verhältnis $\mathscr{L}_\Phi \subset L_\Phi$ gilt, kann durch diese Definition des Orlicz-Raumes direkt abgelesen werden.

Kapitel 3

Raum E_Φ

In den vorherigen Abschnitten konnten wir die Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi$ und den Orlicz-Raum L_Φ konstruieren, von denen die Orlicz-Klasse als Teilmenge des Orlicz-Raumes angesehen werden kann. In diesem Kapitel wollen wir einen Raum untersuchen der wiederum einen Unterraum der Orlicz-Klasse bilden soll.

Definition 3.1. Sei $\mathcal{B}(\Omega)$ die Menge aller beschränkten messbaren Funktionen definiert auf Ω. **Der Raum** $E_\Phi(\Omega)$ wird als Abschluss von $\mathcal{B}(\Omega)$ bzgl. der Orlicz-Norm $\|\cdot\|_\Phi$ definiert, d.h.

$$E_\Phi(\Omega) = clos_{\|\cdot\|_\Phi}\mathcal{B}(\Omega)$$

E_Φ ist offenbar ein Vektorraum und es gilt $E_\Phi(\Omega) \subset \mathscr{L}_\Phi(\Omega)$. Damit erhalten wir zusammenfassend

$$E_\Phi(\Omega) \subset \mathscr{L}_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)$$

wobei sowohl E_Φ als auch L_Φ Vektorräume sind; die Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi$ jedoch einen linearen Raum beschreibt. Diese besondere Stellung der Orlicz-Klasse wird in [5], wie folgt verdeutlicht.

Bemerkung 3.2. Sei Φ eine Young-Funktion. Bezeichne die Menge aller Funktionen $u(x) \in L_\Phi(\Omega)$, die die Eigenschaft

$$d(u, E_\Phi(\Omega)) = \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \|u - w\|_\Phi < r$$

erfüllen, mit $\Pi(E_\Phi, r)$. Zudem sei der Abschluss bzgl. $\|\cdot\|_\Phi$ durch $\overline{\Pi}(E_\Phi, r)$ gegeben. Wir betrachten damit eine Menge

$$\Pi(E_\Phi, r) = \{u \in L_\Phi : d(u, E_\Phi(\Omega)) < r\} \subset L_\Phi(\Omega)$$

Dann gilt nach einem Theorem aus [5]

$$\Pi(E_\Phi, 1) \subset \mathscr{L}_\Phi(\Omega) \subset \overline{\Pi}(E_\Phi, 1)$$

Mit anderen Worten: Die Orlicz-Klasse $\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$ ist **weder** eine *offene* **noch** eine *abgeschlossene* Teilmenge des entsprechenden Orlicz-Raumes. Die vollständige Betrachtung dieses Theorems mit ausführlichem Beweis kann in [5] [Kap. II §10, S.82] nachvollzogen werden.

Eine weitere Eigenschaft des Raumes E_Φ ist die Separabilität, die an dieser Stelle erwähnt sei.

Theorem 3.3. *Der Raum* $E_\Phi(\Omega)$ *ist separabel.*

Beweis. Der Beweis der Separabilität des Raumes $E_\Phi(\Omega)$ kann mit Hilfe beschränkter Funktionen und dem Theorem von Luzin ausgeführt werden. Eine verfasste Version kann in [5] [Chapter II, §10.2, S.81] studiert werden. □

Wie schon bei dem Orlicz-Raum $\mathscr{L}_\Phi$ gibt es auch für den Raum E_Φ eine alternative Einführung:

Bemerkung 3.4. Mit E_Φ bezeichne den Abschluss des Raumes $\mathscr{C}_0^\infty$ bzgl. der Orlicz-Norm $\|\cdot\|_\Phi$. Man erhält damit:

$$E_\Phi = clos_{\|\cdot\|_\Phi} \mathscr{C}_0$$

Lemma 3.5. $E_\Phi(\Omega)$ *ist maximaler linearer Unterraum der Orlicz-Klasse* $\mathscr{L}_\Phi(\Omega)$.

Beweis. Annahmen: Seien $S \subset \mathscr{L}_\Phi(\Omega)$ linearer Unterraum und $u \in S$.
Dann gilt $\lambda u \in S \subset \mathscr{L}_\Phi$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien $\epsilon > 0$ sowie eine Folge definiert durch

$$u_j(x) = \begin{cases} u(x), & \text{falls } |u(x)| \leq j \text{ und } |x| \leq j \text{ für } x \in \Omega \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zudem nehme an, dass die Folge im Φ-Mittel konvergiert. Die Φ-Mittel-Konvergenz, die jedoch erst im Kapitel 5 genauer betrachtet wird, untersucht allerdings die Konvergenz in dem Orlicz-Raum $L_\Phi(\Omega)$. Für die oben definierte Folge gilt mit der Definition 5.2 der Φ-Mittel-Konvergenz

$$\lim_{j\to\infty} \rho_\Phi\left(\frac{u_j - u}{\epsilon}\right) = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \Phi\left(\left|\frac{u_j - u}{\epsilon}\right|\right) dx = 0$$

Damit gilt schließlich für (hinreichend) große j, dass

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{|u_j(x) - u(x)|}{\epsilon}\right) dx \leq 1$$

und damit für die Konvergenz in der Luxemburg-Norm gilt:

$$|||u_j(x) - u(x)|||_\Phi = \inf_{k>0} \left\{ \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u_j(x) - u(x)|}{k}\right) dx \le 1 \right\} = \epsilon \overset{\epsilon \to \infty}{\to} 0$$

Da die Luxemburg-Norm für messbare Funktionen und die Young-Funktion definiert ist und $u(x), u_j(x) \in S \subset \mathscr{L}_\Phi(\Omega)$ auf dem Raum der Äqivalenzklassen fast überall gleicher Lebesgue-messbarer Funktionen nach Voraussetzung messbar sind und die Young-Funktion durch Φ gegeben ist, kann mit der Kenntnis, dass stetige Funktionen immer messbar sind, $E_\Phi = clos_{\|\cdot\|_\Phi} \mathscr{C}_0(\Omega)$ ausgenutzt werden, so dass $u \in S \subset E_\Phi$. Damit haben wir gezeigt, dass für eine echte Teilmenge der Orlicz-Klasse eine Folge auf dem Olricz-Raum gefunden werden kann, die im Raum $E_\Phi(\Omega)$ liegt und damit auch die Teilmenge. $\square$

Kapitel 4

Dualräume

Im folgenden wollen wir uns mit den Dualräumen der bisher kennengelernten Räume beschäftigen. Zur Erinnerung sei angemerkt, dass in diesem Abschnitt Räume gesucht werden, die lineare stetige Funktionale auf dem entsprechenden Raum enthalten. Zunächst schaue man sich den Dualraum des Orlicz-Raumes L_Φ an.

Theorem 4.1. *Sei Φ, Ψ ein Paar komplementärer Young-Funktionen. Sei $v \in L_\Psi(\Omega)$ eine feste Funktion. Dann wird durch*

$$\begin{aligned} F: \quad & L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R} \\ & u \longmapsto F(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall u \in L_\Phi(\Omega) \end{aligned}$$

ein stetig lineares Funktional auf $L_\Phi(\Omega)$ definiert. Zudem gilt für die Norm auf dem Dualraum $[L_\Phi(\Omega)]^*$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \|v\|_\Psi \leq \|F\|_* \leq \|v\|_\Psi$$

wobei $\|F\|_* = \sup\limits_{\substack{u \in L_\Phi \\ \|u\|_\Phi \leq 1}} |F(u)|$ die Dualnorm definiere.

Beweis. Der Beweis kann in [6] [3.13.1 Theorem, S.167] nachgelesen werden. □

Bemerkung 4.2. 1. Die Form $F(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$ muss als Beispiel angesehen werden, da auch stetig lineare Funktionale auf $L_\Phi(\Omega)$ zu finden sind, welche nicht in der o.g. Form ausgedrückt werden können.

2. Nach dem obigen Theorem 4.1 kann der Raum $L_\Psi(\Omega)$ als Unterraum des Dualraumes von $L_\Phi(\Omega)$ betrachtet werden, d.h.

$$L_\Psi(\Omega) \subsetneqq (L_\Phi(\Omega))^*$$

Nun erweitern wir unsere Betrachtungen auf den Raum E_Φ und den Zusammenhang zum Orlicz-Raum L_Φ.

Theorem 4.3. *Sei F ein beschränktes lineares Funktional auf $E_\Phi(\Omega)$, d.h. $F : E_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $v \in L_\Psi$, derart dass*

$$F(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall u \in E_\Phi(\Omega)$$

Bemerkung 4.4. Erinnerung: $E_\Phi \subset \mathscr{L}_\Phi \subset L_\Phi$
Nach obigem Theorem ist $F = F \mid_{E_\Phi}$ ein lineares beschränktes Funktional auf E_Φ mit der Norm

$$\|F\|_{E^*} = \sup_{\substack{u \in E_\Phi \\ \|u\|_\Phi \leq 1}} |F(u)|$$

Damit gilt:

$$\sup_{\substack{u \in E_\Phi \\ \|u\|_\Phi \leq 1}} |F(u)| = \|F\|_{E^*} \leq \|F\|_* = \sup_{\substack{u \in L_\Phi \\ \|u\|_\Phi \leq 1}} |F(u)|$$

Unter der Annahme F(u)=$\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx \ \forall u \in E_\Phi$ und für alle $u \in L_\Phi$ gilt dann

$$\|F\|_{E^*} = \|F\|_*$$

Nun ist es möglich die obigen Behauptungen aus Theorem 4.3 sowie Theorem 4.1, so umzuschreiben, dass gilt:

$$L_\Psi(\Omega) = (E_\Phi(\Omega))^*$$

Hierbei wird der Isomorphismus $F(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx, \ u \in E_\Phi$ genutzt, der sich aus dem folgenden Satz ergibt:

Satz 4.5. *Der Dualraum $(E_\Phi(\Omega))^*$ ist isometrisch und homeomorph zu $L_\Psi(\Omega)$.*

Beweis. Der Beweis kann in [1] [S.273, 8.19 Theorem] nachgelesen werden. $\square$

Kapitel 5

Konvergenzbegriffe

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den Konvergenzarten auf den bisher eingeführten Räumen befassen. Auf dem Orlicz-Raum L_Φ kann der Begriff der starken Konvergenz (oder auch Norm-Konvergenz) analog zu den Lebesgue-Räumen eingeführt werden.

Bemerkung 5.1. Eine Folge $(u_n)_n$ **konvergiert stark** gegen $u \in L_\Phi$ in der Orlicz-Norm $\|\cdot\|_\Phi$, d.h. $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \textit{ in } L_\Phi$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_\Phi = 0$$

Auf dem Orlicz-Raum soll jedoch ein anderer Konvergenzbegriff genutzt werden.

Definition 5.2. Eine Folge $(u_n)_n \subseteq L_\Phi(\Omega)$ konvergiert **im Φ-Mittel** gegen $u \in L_\Phi$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\Phi(u_n - u) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|u_n - u|)dx = 0$$

Nun stellt sich jedoch die Frage nach dem Zusammenhang dieser beiden Konvergenzbegriffe. Dazu erinnere man sich an das Theorem 2.3 zur Abschätzung der Orlicz-Norm und Luxemburg-Norm. Zudem nutze man, dass gilt:

$$\rho_\Phi(u) \leq |||u|||_\Phi \quad \text{falls} \quad |||u|||_\Phi \leq 1$$

Damit folgt für $w = u_n - u$:

$$\rho_\Phi(w) \leq \|w\|_\Phi$$

Mit Hilfe dieser Überlegung kann umgehend gesehen werden:

Die starke Konvergenz in $L_\Phi(\Omega)$ impliziert die Konvergenz im Φ-Mittel kurz: $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho_\Phi(u_n - u) = 0$

Die Umkehrung gilt jedoch **nicht**, welches sich der Leser in [5] [Kap. II §9, S. 75] verdeutlichen kann. Mit Hilfe des nachfolgenden Beispiels lässt sich zudem verdeutlichen, dass die Φ-Mittel Konvergenz nicht die punktweise Konvergenz impliziert.

Beispiel 5.3. Betrachte das Gebiet $\Omega = \left]0,1\right[$ mit folgender Partitionen $\Omega_1 = \left]0,\frac{1}{2}\right[, \Omega_2 = \left]\frac{1}{2},1\right[, \Omega_3 = \left]0,\frac{1}{3}\right[, \Omega_4 = \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[, \Omega_5 = \left]\frac{2}{3},1\right[, \ldots$
Definiere diesbezüglich eine Folge

$$u_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \Omega_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi\left(|u_n(x) - 0|\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi\left(|u_n(x)|\right) dx$$
$$= 0$$

Es liegt somit die Φ-Mittel Konvergenz vor. Nach Definition der Folge ist aber klar, dass u_n nicht punktweise gegen 0 konvergiert, womit ein Gegenbeispiel für Φ-Mittel Konvergent impliziert punktweise Konvergenz gefunden ist.

Satz 5.4. *Jede Funktion $u \in L_\Phi(\Omega)$ kann durch eine Folge wesentlich beschränkter messbarer Funktionen im Sinne der Konvergenz im Φ-Mittel approximiert werden.*

Beweis. Sei $u \in L_\Phi$; $u(x)$ damit eine endliche Zahl f.ü. in Ω.
Sei $\Omega_n = \{x \in \Omega : |u(x)| > n\}$, dann gilt $\Omega_n \supset \Omega_{n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = 0$ $(*)$.
Es kann eine Folge $(u_n)_n \subseteq L_\Phi$ gefunden werden mit

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \Omega_n \\ u(x), & \text{falls } x \in \Omega \backslash \Omega_n \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \rho_\Phi(u_n - u) &\overset{Def}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \Phi(|u_n(x) - u(x)|)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} \Phi(|u_n(x) - u(x)|)dx + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_n} \Phi(|u_n(x) - u(x)|)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n} \Phi(|u(x)|)dx + 0 \\
&\overset{*}{=} 0
\end{aligned}$$

□

Doch neben der starken und der Φ-Mittel-Konvergenz, kann auf dem Orlicz-Raum auch ein **schwacher** Konvergenzbegriff gefunden werden.

Definition 5.5. Eine Folge $(u_n)_n \subseteq L_\Phi(\Omega)$ heißt **E_Ψ-schwach konvergent** gegen $u \in L_\Phi$, falls

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\, v(x)dx = 0 \quad \forall v \in E_\Psi(\Omega)$$

Bemerkung 5.6. Schaut man sich die Definition des schwachen Konvergenzbegriffes etwas genauer an und erinnere man sich an die Definition der dualen Paarung bzw. der allgemeinen Theorie von schwacher und *schwach** Konvergenz, welche u.a. in [3] [Analytische Hilfsmittel, S.281] nachgelesen werden kann, so ergeben sich folgende Beobachtungen:

Erinnerung. Eine Folge $(f_n)_n \subset X^*$ auf dem Dualraum, konvergiert *schwach** gegen f, wenn

$$\langle f_n - f, u\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \; \forall u \in X$$

Nutzt man diese Idee der *schwach**-Konvergenz, so kann der Ausdruck aus obiger Definition 5.5

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega (u_n(x) - u(x))\, v(x)dx = 0$$

wie folgt umgeschrieben werden:

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(x) - u(x), v(x)\rangle_{L_\Phi(\Omega)\times E_\Psi(\Omega)} = 0$$

Mit Hilfe der Bemerkung 4.4 ergibt sich dann der folgende Zusammenhang

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n(x)-u(x), v(x)\rangle_{(E_\Psi(\Omega))^*\times E_\Psi(\Omega)} = 0$$

Der in Definition 5.5 eingeführte schwache Konvergenzbegriff entspricht damit der *schwach**-Konvergenz auf dem Raum E_Ψ. Definition 5.5 kann damit wie folgt umgeschrieben werden:

$$\langle u_n - u, v\rangle_{(E_\Psi)^*\times E_\Psi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall v \in E_\Psi(\Omega)$$

Beispiel 5.7. Zu $u \in L_\Phi(\Omega)$ definiere Folge beschränkter Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & \text{für } x \in \Omega_n = \{x \in \Omega : |u(x)| \le n\} \\ 0, & \text{für } x \in \Omega\backslash\Omega_n \end{cases}$$

und mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(\Omega\backslash\Omega_n\right) = 0$ ($\circledast$), wobei μ ein Maß auf Ω darstelle. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (u(x)-u_n(x))v(x)dx &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} (u(x) - \underbrace{u_n(x)}_{=u(x) \text{ auf } \Omega_n})v(x)dx}_{=0} \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\backslash\Omega_n} (u(x) - \underbrace{u_n(x)}_{=0 \text{ auf } \Omega\backslash\Omega_n})v(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\backslash\Omega_n} u(x)v(x)dx \\
&\overset{\circledast}{=} 0 \quad \text{für alle } v \in L_\Psi(\Omega)
\end{aligned}$$

und folglich auch für alle $v \in E_\Psi(\Omega)$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(\Omega\backslash\Omega_n\right) = 0$. Damit gilt, dass u_n schwach-$*$ gegen u konvergiert, d.h. $u_n \overset{*}{\rightharpoonup}$ u (konvergiert E_Ψ-schwach)

Bemerkung 5.8. Im Beispiel wurde für alle $u \in L_\Phi$ eine Folge beschränkter Funktionen konstruiert, die E_Ψ-schwach gegen u konvergieren. Dies zeigt aber auch: **L_Φ ist Abschluss von E_Φ bzgl. der E_Ψ-schwachen Konvergenz.**

Kapitel 6

Δ_2-Bedingung

In diesem Abschnitt wird eine zusätzlich Bedingung definiert werden, welche eine Vielzahl von Vereinfachungen mit sich bringt. Bei der sogenannten Δ_2-Bedingung handelt es sich um eine sehr spezielle Eigenschaft der Young-Funktionen, die wie folgt definiert ist:

Definition 6.1. Eine Young-Funktion Φ erfüllt die Δ_2-Bedingung ($\Phi \in \Delta_2$), falls $K > 0, T \geq 0$ existieren, so dass

$$\Phi(2t) \leq K \cdot \Phi(t) \quad \text{für alle } t \geq T$$

gilt.

Die in der einleitenden Idee untersuchte Young-Funktion $\Phi(t) = ct^p$, welche den Orlicz-Raum mit dem Lebesgue-Raum verbindet, erfüllt gerade diese Δ_2-Bedingung, denn

$$\Phi(2t) = 2^p t^p c = 2^p \cdot ct^p = K \cdot \Phi(t)$$

Das folgenden Theorem, kann mittels einer hilfreichen Beschränktheits-Aussage die Frage nach der Erüllung der Δ_2-Bedingung beantworten.

Theorem 6.2. *Eine Young-Funktion Φ erfüllt die Δ_2-Bedingung genau dann, wenn*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)} < \infty$$

wobei $\phi(t)$ gegeben ist nach Definition 1.3 der Young-Funktion.

Beweis. Der Beweis kann in [6] [3.4.4 Theorem, S.138] nachgelesen werden. $\square$

Um die Vorstellung von Young-Funktionen, die die Δ_2-Bedingung erfüllen zu ergänzen, können neben dem Standardbeispiel $\Phi(t) = ct^p, c > 0, p > 1$ mit Hilfe des obigen Theorems 6.2 weitere Young-Funktionen mit dieser besonderen Eigenschaft angegeben werden.

Beispiel 6.3. Mit Hilfe des Theorems 6.2 erfüllt die Funktion

$$\Phi(t) = (1+t)\log(1+t) - t \text{ mit } \phi(t) = \frac{d}{dt}[(1+t)\log(1+t) - t] = \log(t+1)$$

gerade die Δ_2-Bedingung, da unter Beachtung das $\log(1+t)$ den Konvergenzradius 1 hat

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to\infty} \frac{t\phi(t)}{\Phi(t)} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{t\log(t+1)}{(1+t)\log(1+t) - t} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Im folgenden werden einzelne Theoreme und spezielle Sätze, die einige Vorzüge der Δ_2-Bedingung verdeutlichen genannt, jedoch nicht weiter erläutert:

1. $\Phi \in \Delta_2$. Dann ist $L_\Phi(\Omega)$ separabel.
2. $\Phi \in \Delta_2$. Dann gilt $L_\Phi(\Omega) = \mathscr{L}_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)$
3. $\Phi \in \Delta_2$. Dann gilt: $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ in L_Φ genau dann wenn $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ im Φ-Mittel
4. Es gilt: L_Φ ist genau dann reflexiv wenn Φ, Ψ die Δ_2-Bedingung erfüllen.

Literaturverzeichnis

[1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*. Pure and applied mathematics series ; 140. Acad. Press, 2009.

[2] Vladimir I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer, 1989.

[3] Etienne Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Univ. Press, Cambridge, 1967.

[5] M. A. Krasnoselskiĭ and Ja. B. Rutickiĭ. *Convex functions and Orlicz spaces*. P. Noordhoff Ltd., 1961.

[6] Alois Kufner, Oldřich John, and Svatopluk Fučík. *Function spaces*. Noordhoff International Publishing, 1977.