Semilineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Science

an der

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

angefertigt im Rahmen des Seminars „Angewandte Analysis“

vorgelegt von

Robin Beier

betreut von

Prof. Dr. Etienne Emmrich

Bielefeld, 9. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Ausgangspunkt dieser Bachelorarbeit war das Seminar „Angewandte Analysis“ im Sommersemester 2010 bei Prof. Dr. Etienne Emmrich. In diesem Seminar habe ich mich, in einem Vortrag, mit dem Satz von Scorza Dragoni beschäftigt. Diesen Satz werde ich zum Ende dieser Ausarbeitung wieder aufgreifen.

Zunächst wird in einem vorbereitenden Kapitel die Theorie der Fixpunktsätze behandelt. Namentlich geht es dabei um die Fixpunktsätze von Banach, Brouwer und Schauder. Der inhaltliche Aufbau und insbesondere die Beweisanordnungen dieses Kapitels wurden von [6, Kapitel 10] inspiriert. Das Kapitel endet mit dem Satz von Arzelà und Ascoli. Dieser Satz wird zusammen mit dem Fixpunktsatz von Schauder bei dem Beweis des Satzes von Scroza Dragoni von Bedeutung sein.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit semilinearen Dirichletschen Randwertproblemen und ist an [3, Kapitel 2] orientiert. Nach einer Motivation und der Definition von Dirichletschen Randwertproblem folgt ein erster Satz zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Daraufhin wird die so genannte Greensche Funktion entwickelt. Diese Funktion und ihre Eigenschaften sind für den ganzen restlichen Teil dieser Arbeit ein außerordentlich wichtiges Hilfsmittel. Die darauffolgenden Sätze garantieren die Existenz einer eindeutigen Lösung unter einer gewissen Lipschitz - Bedingung. Dabei geben die letzten beiden Sätze Bedingungen für die maximale Länge eines Existenz- und Eindeutigkeitsintervalls an. Ich werde nur den zweiten Satz beweisen, für die anderen wird die Beweisidee angegeben. Zuletzt wird der zuvor erwähnte Satz von Scorza Dragoni vorgestellt. Dieser garantiert die Existenz einer Lösung unter Stetigkeits- und Beschränktheitsannahmen.

2 Fixpunktsätze

2.1 Motivation

In diesem Abschnitt wird die Betrachtung von Fixpunktproblemen zunächst mittels eines Beispiels motiviert.

Es sei M eine Menge und $A\colon M \to M$ eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit

$$x = A(x) \tag{2.1.1}$$

heißt *Fixpunkt* der Abbildung A.

Viele zu lösende Probleme der Mathematik lassen sich als Probleme der Form (2.1.1) formulieren.

Als ein Beispiel betrachten wir den Operator A gegeben durch Abbildungsvorschrift

$$(Au)(x) := \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad x \in [a,b].$$

Dabei sei f eine stetige Funktion auf $[a,b] \times \mathbb{R}$, G eine stetige Funktion auf $[a,b] \times [a,b]$ und u eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Dann schreibt sich (2.1.1) als

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad x \in [a,b]. \tag{2.1.2}$$

Nehmen wir nun an, dass ein G existiert mit $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$, wobei $\xi \in [a,b]$ ist, und es gilt

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi = -f(x, u(x)).$$

Dann wäre der Fixpunkt u aus (2.1.2) eine Lösung der so genannten *semilinearen Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x, u(x)), \quad x \in (a,b) \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0. \end{aligned}$$

In Kapitel 3 werden wir dieses Problem genauer betrachteten und es wird sich zeigen, dass solch eine Funktion G, unter gewissen Vorgaben, existiert. Mit Hilfe der Fixpunktsätze von Banach und Schauder kann die Existenz einer Lösung u, mit Hilfe der Abbildung A, nachgewiesen werden.

2.2 Vorbereitung

In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Begriffe, welche wir für die Formulierung der Fixpunktsätze von BANACH, BROUWER und SCHAUDER benötigen, wiederholt.

Definition 2.2.1. Eine Menge heißt BANACH-Raum, wenn sie ein vollständiger und normierter Vektorraum ist.

Dass bei einem Fixpunktproblem (2.1.1) gewisse Bedingungen an die Abbildung A gestellt werden müssen, damit ein Fixpunkt existiert, ist naheliegend. Aber folgendes Beispiel zeigt auch, dass gewisse Anforderung an die zugrunde liegende Menge M gestellt werden müssen.

Wir stellen uns einen Kreis K um den Punkt P vor. A sei die Drehung um dem Winkel $0 < \varphi < 2\pi$ auf K um den Punkt P. Eine Lösung der Gleichung (2.1.1) ist der Punkt P. Ist statt des Kreises ein Kreisring die Definitionsmenge von A, so ist sofort klar, dass (2.1.1) keine Lösung hat. Wir müssen also sicherstellen, dass solche Situationen nicht auftreten.

Aus diesem Grund werden im folgenden noch die Begriffe konvex, relativ kompakt, kompakt und totalbeschränkt eingeführt, womit wir Teilmengen eines BANACH-Raums charakterisieren können.

Definition 2.2.2. Eine Menge M heißt *konvex*, wenn für je zwei Elemente $x, y \in M$ auch deren Verbindungsstrecke in M liegt. Dabei besteht die Verbindungsstrecke von x, y aus allen Linearkombinationen $\lambda x + (1-\lambda)y$ mit $\lambda \in [0,1]$.

Beispiel 2.2.3. Sei $r > 0$. Die abgeschlossene Kugel $\bar{B}(0,r) := \{v \in X : \|v\|_X \leq r\}$ ist stets konvex, falls $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum ist. Seien $v, w \in \bar{B}(0,r)$. Die Konvexkombination dieser Elemente ist gegeben als

$$u := \lambda v + (1-\lambda)w, \quad \lambda \in [0,1].$$

Folglich ist

$$\|u\|_X \leq \lambda\|v\|_X + (1-\lambda)\|w\|_X \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

Dies lehrt uns, dass $\bar{B}(0,r)$ konvex ist.

Kreisringe und Donuts sind Beispiele für nicht konvexe Mengen, denn keine Verbindungsstrecke, die den Mittelpunkt enthält, liegt ganz in der Menge.

Definition 2.2.4. Die *konvexe Hülle* einer Menge M ist die kleinste konvexe Menge die M enthält. Wir schreiben kurz $\operatorname{conv} M$.

Beispiel 2.2.5. Sei X eine Menge und $X \supseteq M := \{x_1, \ldots, x_n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Die konvexe Hülle von M ist gegeben als die Menge aller Konvexkombinationen der Form

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \tag{2.2.1}$$

wobei die $\lambda_j \in [0,1]$ sind und $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ gilt. Der Beweis folgt mit Induktion nach n.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Mengen ist die relative Kompaktheit.

Definition 2.2.6. Sei $\mathcal{B}$ ein BANACH-Raum. Eine Teilmenge M von $\mathcal{B}$ heißt *relativ kompakt* in $\mathcal{B}$, wenn jede Folge von Elemente aus M eine konvergente Teilfolge hat. M heißt *kompakt*, wenn der Limes dieser Teilfolge stets in M liegt.

Bemerkung. Eine Menge ist genau dann kompakt, wenn sie relative kompakt und abgeschlossen ist.

Einen Beweis findet man zum Beispiel in [6, S.125 ff].

Definition 2.2.7. Sei $\mathcal{B}$ ein BANACH-Raum. Eine Teilmenge $M \subset B$ heißt *totalbeschränkt*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ endliche viele $\xi_1, \ldots, \xi_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, existieren, so dass jeder Punkt $x \in M$ höchstens ε weit von einem ξ_j mit $j \in \{1, \ldots, n\}$ entfernt ist. Die Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_n$ heißen ε - Netz von M.

Bemerkung. In einem BANACH-Raum ist die relative Kompaktheit äquivalent zu dem Begriff totalbeschränkt.

Für einen Beweis sei auf [6, S.125 ff] verwiesen.

2.3 Fixpunktsatz von Schauder

Der Beweis des SCHAUDERschen Fixpunktsatz baut auf dem Fixpunktsatz von BROUWER auf. Zuvor wird der Fixpunktsatz von BANACH angeben.

Satz 2.3.1 (Fixpunktsatz von BANACH)**.** *Sei M eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums (X, d). Eine kontrahierende Abbildung $A\colon M \to M$ besitzt genau einen Fixpunkt $\xi \in M$. Dieser Fixpunkt ist Grenzwert der Iterationsfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die erklärt wird durch die Vorschrift*

$$x_{n+1} = A(x_n).$$

Dabei ist $x_0 \in M$ ein beliebiger Startpunkt. Weiterhin gilt die Fehlerabschätzung

$$d(\xi, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1).$$

Hierbei bezeichnet α die Kontraktionskonstante von A.

Bemerkung. Eine Abbildung $A\colon M \to M$ heißt *kontrahierend*, wenn

$$d(A(x), A(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M \text{ und } 0 \leq \alpha < 1.$$

Hierbei sei $M \subset X$ und (X, d) ein metrischer Raum.

Interessant ist der Fixpunktsatz von BANACH aus zwei verschiedenen Gründen: Zum einen zeigt er die Existenz und die Eindeutigkeit des Fixpunktes, im Gegensatz zu den anderen noch folgenden Fixpunktsätzen, zum anderen bietet er ein Iterationsverfahren samt Fehlerabschätzung zur Bestimmung des Fixpunktes. Wir haben also ein numerisches Verfahren zur Hand, um den Fixpunkt zu bestimmen bzw. ihn anzunähern. Auf [3, Kapitel A.2] sei für einen Beweis verwiesen.

Satz 2.3.2 (Fixpunktsatz von BROUWER)**.** *Jede stetige Abbildung einer nichtleeren konvexen und kompakten Teilmenge eines endlich dimensionalen Raums in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Für den Beweis sei auf [6, Kapitel 9] oder [9, Kapitel 1.14] verwiesen. Der Fixpunktsatz von SCHAUDER baut auf dem Satz von BROUWER auf. Insbesondere für endlich dimensionale Räume stimmt er mit dem BROUWERschen Fixpunktsatz überein.

Satz 2.3.3 (Fixpunktsatz von SCHAUDER)**.** *Ist M eine nichtleere konvexe und kompakte Teilmenge eines* BANACH*-Raums und ist f eine stetige Abbildung von M in sich, so besitzt f wenigstens einen Fixpunkt in M.*

Der nun folgende Beweis besteht aus drei Teilen.

Als erstes wird die gegebene Abbildung f durch eine Näherungsabbildung f_ε ersetzt. Dabei soll sich die Näherungsabbildung nur um höchstens $\varepsilon > 0$ von f unterscheiden. Aus dem BROUWERschen Fixpunktsatz folgern wir, dass f_ε mindestens einen Fixpunkt x_ε hat. Im letzten Teil wird gezeigt, dass eine Folge von Fixpunkte x_ε gegen einen Fixpunkt der Abbildung f konvergiert.

Beweis. Wir erinneren uns daran, dass jede kompakte Menge auch totalbeschränkt ist. Sei nun ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existieren Punkte $\xi_1, \ldots, \xi_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, die ein ε - Netz in M bilden. Es existiert also für jedes $x \in M$ ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\|f(x) - \xi_j\| < \varepsilon. \tag{2.3.1}$$

Wir betrachten nun die Funktionen $a_j \colon M \to \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$ erklärt durch die Abbildungsvorschrift

$$a_j(x) = \max\left(\varepsilon - \|f(x) - \xi_j\|, 0\right).$$

Aufgrund von (2.3.1) folgt, dass es zu jedem $x \in M$ mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $a_j(x) > 0$. Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) > 0 \tag{2.3.2}$$

für alle $x \in M$. Wir erklären $\lambda_j \colon M \to [0, 1]$, mit $j = 1, \ldots, n$, durch die Abbildungsvorschrift

$$\lambda_j(x) = \frac{a_j(x)}{\sum_{j=1}^{n} a_j(x)} > 0. \tag{2.3.3}$$

Die λ_j sind, wegen (2.3.2), auf ganz M definiert. Nun wird das eingangs erwähnte f_ε durch die Abbildungsvorschrift

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\xi_j, \quad x \in M$$

definiert.

Welche Eigenschaften hat diese Funktion?

f ist, nach Vorgabe, stetig auf M. Somit sind die Funktionen a_j, λ_j für $j = 1, \ldots, n$ und f_ε stetig auf M. Weiterhin gilt, wegen (2.3.3),

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) = 1, \quad x \in M. \tag{2.3.4}$$

f_ε ist von der Form (2.2.1). Somit ist $f_\varepsilon(x)$ für alle $x \in M$ ein Element von $\overline{\text{conv}}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ (dem Abschluß von $\text{conv}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$). Die Dimension von $\overline{\text{conv}}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ist endlich, denn sie liegt in der linearen Hülle des ε - Netzes.

Wir werden nun zeigen, dass sich die Näherungsabbildung f_ε nur um ε von f unterscheidet. Wir betrachten dazu ein $x \in M$ und

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| &= \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\xi_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \left(f(x) - \xi_j\right) \right\| \\
&\le \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(x)| \, \|f(x) - \xi_j\| \\
&\le \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hierbei wurden der Reihe nach die Aussagen (2.3.4), die Dreicks - Ungleichung, (2.3.3), (2.3.1) und nochmals (2.3.4) genutzt.

Wir haben eine Näherungsabbildung zu f gefunden, die in einen endlich dimensionalen Raum abbildet und dessen Bild sich nur um ein beliebiges $\varepsilon > 0$ von f unterscheidet. Damit ist der erste Teil des Beweises abgeschlossen.

Im folgenden, zweiten Teil soll nun die Existenz eines Fixpunktes für die Abbildung f_ε gezeigt werden.

Da M konvex und abgeschlossen ist, gilt dass $\overline{\text{conv}}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subset M$. $\overline{\text{conv}}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge. Folglich ist sie kompakt. Weiterhin ist sie konvex und Teilmenge eines endlich dimensionalen Raums. Aus dem Fixpunktsatz von BROUWER folgt die Existenz eines Fixpunkts für die Abbildung $f_\varepsilon \colon \overline{\text{conv}}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \to \overline{\text{conv}}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$.

Wir kommen nun zum dritten Teil. Dazu wählen wir das $\varepsilon > 0$ als eine Folge $(\varepsilon_k := 1/k)_{k \in \mathbb{N}}$. Es bezeichne f_k die Näherungsabbildung zu vorgegebenen ε_k, entsprechend x_k bezeichne einen Fixpunkt der Abbildung f_k.

Zuvor hatten wir gezeigt: Für alle $x \in M$ gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \le \varepsilon.$$

Damit folgt für die x_k

$$\|f(x_k) - f_\varepsilon(x_k)\| = \|f(x_k) - x_k\| \leq \frac{1}{k}. \tag{2.3.5}$$

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in M. Nach Vorgabe ist M kompakt, somit existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Sei $\tilde{x}$ der Grenzwert dieser Teilfolge. Dann gilt, aufgrund der Stetigkeit von f, dass

$$f(x_{k_i}) \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(\tilde{x}).$$

Schließlich folgt die endgültige Schlussfolgerung

$$\begin{aligned}\|f(\tilde{x}) - \tilde{x}\| &= \lim_{i\to\infty} \|f(x_{k_i}) - x_{k_i}\| \\ &\leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{k_i} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dabei gilt die Ungleichung wegen (2.3.5). Es wurde also gezeigt, dass ein $\tilde{x} \in M$ existiert mit der Eigenschaft

$$f(\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Damit ist die Behauptung des Fixpunktsatzes von SCHAUDER bewiesen. □

Diese Beweisanordnung ist orientiert an [6, Kapitel 11].

Bemerkung. Im ersten Teil dieses Beweises haben wir den folgenden bekannten Satz mitbewiesen.

Satz 2.3.4 (Approximationssatz für kompakte Operatoren)**.** *$\mathcal{B}, \mathcal{B}^*$ seien* BANACH-*Räume und M eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{B}$. Sei*

$$f\colon M \to \mathcal{B}^*$$

ein kompakter Operator. Dann existieren für $n = 1, 2, \ldots$ stetige Operatoren

$$f_n\colon M \to \mathcal{B}^*$$

mit den Eigenschaften

$$\sup_{u\in M} \|f(u) - f_n(u)\| \leq \frac{1}{n} \quad \textit{und} \quad \dim\left(\mathcal{L}\left(f_n(M)\right)\right) < \infty.$$

Weiterhin gilt $f_n(M) \subset \operatorname{conv} f(M)$.

Hierbei bezeichnet $\mathcal{L}$ die lineare Hülle einer Menge und ein Operator heißt *kompakt*, wenn er stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.

Mit dem folgenden Lemma von MAZUR werden wir den Fixpunktsatz von SCHAUDER für Anwendungen praktischer formulieren.

Lemma 2.3.5 (Lemma von MAZUR)**.** *Die abgeschlossene konvexe Hülle einer relativ kompakten Teilmenge eines* BANACH*-Raums ist stets kompakt.*

Bevor wir dieses Lemma beweisen, schauen wir inwieweit es uns hilft den Fixpunktsatz von SCHAUDER zu verallgemeinern.

Sei M eine konvexe und abgeschlossene Menge. Weiterhin sei $f\colon M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(M)$ relativ kompakt ist. Mit dem Lemma von MAZUR folgt nun, dass $\overline{\operatorname{conv}}\, f(M)$ kompakt ist. Weiterhin gilt, dass $\overline{\operatorname{conv}}\, f(M) \subset M$, aufgrund der Konvexität und Abgeschlossenheit von M. Betrachten wir die Einschränkung $f\colon\ \overline{\operatorname{conv}}\, f(M) \to \overline{\operatorname{conv}}\, f(M)$ so existiert, nach dem Fixpunktsatz von SCHAUDER, mindestens ein Fixpunkt der Abbildung f. Nun können wir den Fixpunktsatz von SCHAUDER für die Anwendung praktischer formulieren.

Satz 2.3.6 (Zweite Version des SCHAUDERschen Fixpunktsatzes)**.** *Sei f eine stetige Abbildung der nichtleeren konvexen Teilmenge M eines* BANACH*-Raums in sich. f besitzt mindestens einen Fixpunkt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- *M ist kompakt;*
- *M ist abgeschlossen und $f(M)$ relativ kompakt.*

Beweis. (von Lemma 2.3.5.) Es reicht zu zeigen, dass die konvexe Hülle einer relativ kompakten Menge relativ kompakt ist, denn eine abgeschlossene relativ kompakte Menge ist stets kompakt.

Sei M eine relativ kompakte Teilmenge eines BANACH-Raums, dann ist M totalbeschränkt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Folglich existiert ein $\varepsilon/3$ - Netz $x_1, \ldots, x_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, für M. Die Menge $\overline{\operatorname{conv}}\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist Teil eines endlich dimensionalen Raums. Weiterhin ist sie beschränkt und abgeschlossen. Insgesamt folgt, dass $\overline{\operatorname{conv}}\{x_1, \ldots, x_n\}$ kompakt ist. Damit existiert ein $\varepsilon/3$ - Netz $\xi_1, \ldots, \xi_s$, wobei $s \in \mathbb{N}$ ist, für $\overline{\operatorname{conv}}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Das Ziel ist es die relative Kompaktheit von $\operatorname{conv} M$ nachzuweisen. Dafür wird nun gezeigt, dass die $\xi_1, \ldots, \xi_s$ ein ε - Netz für $\operatorname{conv} M$ bilden.

Sei $x \in \operatorname{conv} M$. Zu diesem wählen wir ein $y \in \overset{\circ}{\operatorname{conv}} M$ (dem inneren von $\operatorname{conv} M$), so dass y höchstens $\varepsilon/3$ weit von x entfernt ist und wir $\eta_1, \ldots \eta_p \in \operatorname{conv} M$, wobei $p \in \mathbb{N}$ ist, finden mit

$$y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \eta_i. \tag{2.3.6}$$

Hierbei sind die $\lambda_i \in [0, 1]$ und es gilt $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$. Nun findet sich zu jedem $\eta_k \in \{\eta_1, \ldots, \eta_p\}$ mindestens ein $x_{i_k} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, dass höchstens $\varepsilon/3$ von diesem entfernt ist. Wir wählen jeweils dasjenige mit dem kleinsten Abstand und definieren den neuen Punkt

$$y_0 = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_{i_k}.$$

Somit ist y_0 ein Element von $\overline{\operatorname{conv}}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Folglich existiert ein $j \in \{1, \ldots, s\}$, so dass y_0 höchstens $\varepsilon/3$ weit von ξ_j entfernt ist.

Die Punkte y und y_0 sind höchstens $\varepsilon/3$ weit von einander entfernt, denn

$$\begin{aligned}\|y - y_0\| &= \left\| \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\eta_k - x_{i_k}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left\|\eta_k - x_{i_k}\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \\ &= \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt wegen der Dreiecksungleichung. Die zweite aufgrund der Wahl der $x_{i_k} \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ zu den $\eta_k \in \{\eta_1, \ldots, \eta_p\}$. Insgesamt hat dies zu folgender Situation geführt: x ist von y, y ist von y_0 und y_0 ist von ξ_j höchstens $\varepsilon/3$ weit entfernt.

Damit wurde gezeigt, dass für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und ein beliebiges $x \in \operatorname{conv} M$ ein $\xi_j \in \{\xi_1, \ldots, \xi_s\}$ existiert, dass höchstens ε weit entfernt von x ist. Folglich ist $\operatorname{conv} M$ totalbeschränkt oder äquivelnt: $\operatorname{conv} M$ ist relativ kompakt. Damit ist $\overline{\operatorname{conv}} M$ kompakt. □

Diese Beweisanordnung ist orientiert an [6, Kapitel 11]. Wir erhalten folgendes Korollar, welches im vorherigen Beweis mit bewiesen wurde.

Korollar. *Die konvexe Hülle einer relativ kompakten Teilmenge eines* BANACH-*Raums ist relativ kompakt.*

2.4 Satz von Arzelà und Ascoli

Als letztes soll in diesem Kapitel noch der Satz von ARZELÀ und ASCOLI angeführt werden, damit alle Sätze die im folgenden gebraucht werden zum Nachschlagen bereit stehen. Wie zuvor wird auch hier auf den Beweis verzichtet und exemplarisch auf das Buch [5, Kaptiel 106] verwiesen. Eine allgemeinere Formulierung dieses Satzes findet man in [6, Kaptel 5].

Satz 2.4.1 (Satz von ARZELÀ und ASCOLI)**.** *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger stetiger Funktionen auf einer kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}$. Es existiert genau dann eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$, wenn die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist. In diesem Falle ist die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig beschränkt.*

Dieser Satz wird später hilfreich sein um zu zeigen, dass eine Funktionsfolge eine konvergente Teilfolge besitzt. Aus deren Existenz, werden wir mit dem Satz von SCHAUDER zeigen können, dass mindestens eine Lösung für eine Klasse von Differentialgleichungen existiert.

3 Dirichletsche Randwertprobleme

Angenommen wir möchten eine Hochspannungsstromleitung verlegen. Nun könnten wir uns dafür interessieren wie weit die Stromleitung durchhängen oder wie lang die Stromleitung sein wird, wenn sie zwischen zwei Masten hängt. Mit Hilfe der Physik erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese kann man auch lösen. Aber weder die Gleichung, noch die Lösung, sollen hier von Interesse sein. Es soll vielmehr darum gehen die Lösung den gegebenen Daten anzupassen. Normalerweise kennt man die Methode der Anfangswertprobleme. Problematisch ist die erste Ableitung, denn wir haben keine Informationen über die Steigung der Leitung in einem Punkt. Außerdem möchten wir vielmehr sicher gehen, dass die Funktion an den Masten a, b die Höhe h der Masten annimmt. Die gesuchte Funktion u soll also den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} u(a) &= h \\ u(b) &= h. \end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage: Existiert eine Lösung für dieses Problem?

3.1 Randwertprobleme für lineare und homogene Differentialgleichungen

Definition 3.1.1. Es seien α, β reellen Zahlen. Randdaten oder Randbedingungen einer Funktion $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ der Form

$$u(a) = \alpha \quad \text{und} \quad u(b) = \beta$$

heißen Randbedingungen *erster Art* oder Dirichletsche Randbedingungen. Ist $\alpha = \beta = 0$ so spricht man von *homogenen* Dirichletschen Randbedingungen. Ansonsten spricht man von *inhomogenen* Randbedingungen.

Der Unterschied zwischen Randwertproblemen und Anfangswertproblemen besteht darin, dass Randprobleme von zwei Stellen des Definitionsbereichs abhängen. Im Gegensatz dazu hängen Anfangswertprobleme nur von einer Stelle des Definitionsbereich ab. Um den Begriff der Lösung einer Differentialgleichung eindeutig festzulegen folgt nun

Definition 3.1.2. Unter einer *Lösung* für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit DIRICHLETschen Randbedingungen im Intervall (a, b) versteht man eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(a, b) \cap \mathcal{C}[a, b]$, die sowohl der Differentialgleichung als auch den Randbedingungen genügt.

Betrachten wir nun die folgende Situation

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu'(x) + du(x) &= 0 \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) &= \beta \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

wobei $x \in (a, b)$ und $\alpha, \beta, c, d \in \mathbb{R}$ gelte. Dann gilt

Satz 3.1.3. *Auf dem beliebigen Intervall $[a, b]$ zu beliebigen Randdaten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung u für das obige Problem, falls*

$$D := \frac{c^2}{4} + d \geq 0$$

gilt. Gilt hingegen $D < 0$, dann gibt es

- *genau eine Lösung, falls $\sqrt{-D}(b - a)$ kein ganzzahliges Vielfaches von π ist.*
- *unendlich viele Lösungen, falls $\sqrt{-D}(b - a)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist und gilt*
$$\beta = (-1)^k \alpha \exp\left(\frac{c}{2} \frac{k\pi}{\sqrt{-D}}\right). \tag{3.1.2}$$
- *keine Lösung, falls $\sqrt{-D}(b - a)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist und* (3.1.2) *nicht gilt.*

Für den Beweis sei auf [3, S. 22 ff] verwiesen. Jedoch kann dieser auch leicht selbst entwickelt werden. Die Idee besteht darin zunächst mit Hilfe des Ansatzes $\varphi(x) = \exp(\lambda x)$ eine Lösung für die Differentialgleichung zu finden. Seien die Lösungen u_1, u_2. Dann bildet die Linearkombination

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung. Zuletzt ist zu untersuchen, ob das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat. Dazu betrachtet man die Determinante.

Wer die Theorie der Anfangswertproblem kennt wird zunächst etwas verwundert sein, denn mit dem Satz von Picard - Lindelöf gibt es eine Existenz und Eindeutigkeitsaussage für eine große Klasse von Differentialgleichungen. Zu diesen gehört auch (3.1.1). Die Betrachtung von Randwertproblemen stellt uns somit vor ganz neue Herausforderungen.

Der Einfachheit wegen werden die folgenden Sätze nur für homogene Daten formuliert. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, denn die Transformation $\tilde{u}(x) = u(x) - r(x)$ für $x \in [a, b]$ mit

$$r(x) = \frac{(b-x)\alpha + (x-a)\beta}{b-a}$$

führt beliebige Randdaten in homogene über. Man beachte, dass die zugrunde liegende Differentialgleichung in eine Gleichung für $\tilde{u}$ transformiert werden muss.

Betrachten wir nun folgendes Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0 \end{aligned}$$

wobei $x \in (a, b)$ und $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Die homogene Gleichung hat, aufgrund der Randdaten, nur die triviale Lösung. Die Funktionen $v(x) = x - a$ und $w(x) = b - x$ sind für $x \in [a, b]$ linear unabhängige Lösungen. Denn:

Wir betrachten

$$c_1 v(x) + c_2 w(x) = 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in [a, b].$$

Differentiation dieser Gleichung liefert die Unabhängigkeit.

Mit dem Ansatz Variation der Konstanten erhalten wir die Lösung der inhomogenen Gleichung für $x \in [a, b]$:

$$u(x) = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^x (b-x)(\xi - a) f(\xi) d\xi + \int_x^b (x-a)(b-\xi) f(\xi) d\xi \right)$$

Diese Gleichung können wir auch kürzer schreiben, nämlich als

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

dabei ist

$$G(x, \xi) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} (b-x)(\xi - a) & \text{für } a \leq \xi \leq x \leq b \\ (x-a)(b-\xi) & \text{für } a \leq x \leq \xi \leq b \end{cases} \tag{3.1.3}$$

die so genannte Greensche Funktion.

Greensche Funktion

Einige Eigenschaften

Die Greensche Funktion wird von außerordentlicher Wichtigkeit sein, sie stellt sich nämlich als die gesuchte Funktion G aus (2.1.2) heraus. Aus diesem Grund sollen hier einige wichtige Eigenschaften zusammengefasst werden.

G ist symmetrisch und es gilt $G(x,\xi) \geq 0$ auf dem ganzen Definitionsbereich $[a,b] \times [a,b]$. Außerdem ist sie dort stetig. Eine einfache Rechnung ergibt:

$$\int_a^b G(x,\xi)d\xi = \frac{(b-x)(x-a)}{2}, \quad x \in [a,b].$$

Das Integral als Funktion von x hat ein Maximum bei $x_E = \frac{a+b}{2}$. Damit folgt

$$\int_a^b G(x,\xi)d\xi \leq \frac{(b-a)^2}{8}. \tag{3.1.4}$$

Die partielle Ableitung nach x ist integrierbar und wir erhalten mittels elementarer Integrationsregeln

$$\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)d\xi = \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2(b-a)}, \quad x \in (a,b).$$

Diese Funktion hat Maxima bei $x_1 = a$ und $x_2 = b$ und wir folgern

$$\int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)d\xi \leq \frac{b-a}{2}. \tag{3.1.5}$$

Von besonders wichtiger Bedeutung sind die folgenden beiden Eigenschaften.

1. Die Gleichung

$$u(x) := \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad x \in [a,b] \tag{3.1.6}$$

genügt der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (a,b) \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$ für alle $\xi \in [a,b]$ erfüllt sie die Randbedingungen. Ferner gilt

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (\xi-a)f(\xi)d\xi + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-\xi)f(\xi)d\xi \qquad (3.1.7) \\ u'(x) &= -\frac{1}{b-a}\int_a^x (\xi-a)f(\xi)d\xi + \frac{(b-x)(x-a)f(x)}{b-a} \\ &\quad + \frac{1}{b-a}\int_x^b (b-\xi)f(\xi)d\xi - \frac{(x-a)(b-x)f(x)}{b-a} \\ &= -\frac{1}{b-a}\int_a^x (\xi-a)f(\xi)d\xi + \frac{1}{b-a}\int_x^b (b-\xi)f(\xi)d\xi \\ u''(x) &= -\frac{x-a}{b-a}f(x) - \frac{b-x}{b-a}f(x) = -f(x). \qquad (3.1.8) \end{aligned}$$

Dies hätten wir auch sofort folgern können, da G aus Variation der Konstanten entstand. Diese Rechnung stellt gewissermaßen den Beweis oder die Probe obiger Aussage dar.

2. Sei u eine Lösung der oberen Randwertaufgabe. Dann gilt auch die Integralgleichung, denn für $x \in [a,b]$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi &= -\int_a^b G(x,\xi)u''(\xi)d\xi \\ &= -\frac{b-x}{b-a}\int_a^x (\xi-a)u''(\xi)d\xi - \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (b-\xi)u''(\xi)d\xi \\ &= -\frac{(b-x)(x-a)}{b-a}u'(x) + \frac{b-x}{b-a}\int_a^x u'(\xi)d\xi \\ &\quad + \frac{(x-a)(b-x)}{b-a}u'(x) - \frac{x-a}{b-a}\int_x^b u'(\xi)d\xi \\ &= u(x). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Diese Aussage bedeutet, dass jede Lösung der Randwertaufgabe von der Form

$$\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad x \in [a,b]$$

sein muss. Die vorherigen Eigenschaften der GREENschen Funktion gelten auch für $f(x) = f(x, u(x), u'(x))$ mit $u \in \mathcal{C}^1[a,b]$.

Definition und weitere Eigenschaften der Greenschen Funktion

Die bisherige Form der GREENschen Funktion wurde aus der Variation des Konstanten Ansatzes für das Problem

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u &= f(x), \quad x \in (a,b) \\ u(a) = 0, \quad u(b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

mit $c(x) = d(x) = 0$ für $x \in [a,b]$ entwickelt. Seien nun $c, d, f \in \mathcal{C}[a,b]$. Weiter seien u_1 und u_2 zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung. Die Wronski - Determinante ist von der Form

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x \in [a,b].$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist von der Form $c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ x \in [a,b]$. Mit den Randdaten folgt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

u ist also genau dann die triviale Lösung, wenn

$$R := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Im folgenden sei die Lösung des homogenen Problems die triviale Lösung. Die GREENsche Funktion für (3.1.10) ist definiert als

$$G(x,\xi) = \frac{1}{RW(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x) & \text{für } a \leq \xi \leq x \leq b \\ A(x)B(\xi) & \text{für } a \leq x \leq \xi \leq b \end{cases}. \tag{3.1.11}$$

Dabei ist

$$A(x) := \begin{vmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{vmatrix}, \quad B(x) := \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(b) & u_2(b) \end{vmatrix}$$

für $x \in [a,b]$.

Bemerkung. Eine ausführliche Entwicklung dieser Funktion findet man in [7, Kapitel IX]. Außerdem wird dort eine Konstruktion dieser Funktion dargestellt, für die die Lösung des homogenen Problems nicht trivial sein muss. Eine Situation die in dieser Arbeit keine weitere Erwähnung findet.

Wir können die GREENsche Funktion auch für beliebige inhomogene Randdaten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definieren. Dazu setzen wir

$$\tilde{G}(x,\xi) := G(x,\xi) + w(x), \quad x \in [a,b]$$

mit G definiert durch (3.1.11) und $w \in \mathcal{C}^2[a,b]$ mit $w(a) = \alpha$, $w(b) = \beta$ und $w''(x) = 0$ für $x \in [a,b]$. Die Gleichung (3.1) ist eine Beispiel für ein solches w.

Betrachten wir den Fall $c(x) = d(x) = 0$ für $x \in [a,b]$, so erhalten wir die GREENsche Funktion aus dem letzten Abschnitt, denn es sind $u_1(x) = x - a$ und $u_2(x) = b - x$ zwei lineare unabhängige Lösungen. Folglich ist

$$R = -(b-a)^2,\ W(x) = a - b,\ A(x) = -(b-a)(x-a),\ B(x) = -(b-a)(x-b)$$

einsetzen in (3.1.11), liefert die Behauptung.

Die Funktion G ist auf $[a,b] \times [a,b]$ stetig, denn die Funktionen A, B, W sind nur von den Lösungen u_1, u_2 abhängig.

Sei $x \in [a,b]$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_a^b G(x,\xi)d\xi &= \frac{d}{dx}B(x)\int_a^x \frac{A(\xi)}{RW(\xi)}d\xi + \frac{d}{dx}A(x)\int_x^b \frac{B(\xi)}{RW(\xi)}d\xi \\ &= B'(x)\int_a^x \frac{A(\xi)}{RW(\xi)}d\xi + B(x)\frac{A(x)}{RW(x)} \\ &\quad + A'(x)\int_x^b \frac{B(\xi)}{RW(\xi)}d\xi - A(x)\frac{B(x)}{RW(x)} \\ &= \int_a^x \frac{A(\xi)B'(x)}{RW(\xi)}d\xi + \int_x^b \frac{A'(x)B(\xi)}{RW(\xi)}d\xi. \end{aligned}$$

(3.1.12)

(3.1.13)

Die rechte Seite ist ein Kompositum von stetigen Funktionen, da A', B', W von den Lösungen u_1, u_2 abhängen. Es gilt sogar

$$\frac{d}{dx}\int_a^b G(x,\xi)d\xi = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)d\xi, \quad x \in [a,b]. \tag{3.1.14}$$

Dies folgt mit (3.1.13) und

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) = \begin{cases} \frac{B'(x)A(\xi)}{RW(\xi)} & \text{für } a < \xi \le x < b \\ \frac{B(\xi)A'(x)}{RW(\xi)} & \text{für } a < x \le \xi < b \end{cases}. \tag{3.1.15}$$

Betrachten wir die Rechnung von (3.1.13) für eine Funktion

$$(Tu)(x) := \int_a^b G(x,\xi)f(\xi, u(\xi), u'(\xi))d\xi, \quad x \in [a,b]$$

wobei $f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sei und $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sei, so erkennen wir, dass Tu stetig differenzierbar ist.

$$u(x) := \int_a^b G(x,\xi)f(\xi, u(\xi), u'(\xi))d\xi, \quad x \in [a,b] \tag{3.1.16}$$

ist eine Lösung des Randwertproblems für die inhomogene Gleichung. Umgekehrt erfüllt jede Lösung des Randwertproblems diese Integralgleichung. Dies nachzuweisen wird an dieser Stelle verzichtet, denn es ist eine analoge Rechnung und liefert keine neuen Erkenntnisse. Wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 3.1.4. *Es liege das Problem* (3.1.10) *vor. Besitzt die zugehörige homogene Gleichung nur die triviale Lösung, dann besitzt das Randwertproblem für die inhomogene Gleichung genau eine Lösung. Diese ist dann von der Gestalt* (3.1.16)*.*

Die Umkehrung gilt auch.

Satz 3.1.5. *Besitzt das Randwertproblem* (3.1.10) *genau eine Lösung, so besitzt das zugehörige homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung.*

Beweis. Sei u die eindeutige Lösung des inhomogenen Problems. Wir nehmen weiter an, dass u_h die nicht triviale Lösung des homogenen Problems ist. Dann folgt, dass $u + u_h$ ebenfalls eine Lösung des inhomogenen Problems ist. Dies widerspricht aber der Eindeutigkeit von u. □

Dieser Abschnitt ist von [3, Kapitel 2] inspiriert worden.

3.2 Semilineare Randwertprobleme

Definition 3.2.1. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0$$

heißt *semilinear*, wenn sie linear nach der höchsten Ableitung umgestellt werden kann. Das heißt, wenn F geschrieben werden kann als

$$-u''(x) = f(x, u(x), u'(x)).$$

Wir betrachten nun die folgende semilineare Aufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x, u(x), u'(x)), \quad x \in (a, b) \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

mit $c, d \in \mathcal{C}[a, b]$.

Satz 3.2.2. *Gegeben sei die Aufgabe* (3.2.1). *Dabei sei* $f\colon [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Außerdem erfülle sie eine* LIPSCHITZ *- Bedingung. Das heißt es gebe Zahlen* $L, K > 0$ *, so dass für alle* $x \in [a, b]$ *und für alle* $s, t, s', t' \in \mathbb{R}$ *die Ungleichung*

$$|f(x, s, s') - f(x, t, t')| \le L|s - t| + K|s' - t'|$$

erfüllt sei. Zudem habe das homogene Problem, das heißt

$$-u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = 0, \quad u(a) = 0 = u(b), \; x \in (a, b)$$

nur die Nulllösung. Durch (3.1.11) *sei die* GREEN*sche Funktion* G *definiert. Gilt dann*

$$\max_{x \in [a,b]} \int_a^b \left(L|G(x, \xi)| + K \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) \right| \right) d\xi < 1 \tag{3.2.2}$$

so hat das Problem (3.2.1) *genau eine Lösung.*

Bemerkungen zu Satz 3.2.2

Durch den folgenden Satz ist eine hinreichende Bedingung dafür gegeben, dass die homogene Gleichung von (3.2.1) nur die triviale Lösung hat.

Satz 3.2.3. *Zugrunde liege das homogene Problem von* (3.2.1). *Gilt* $d(x) \ge 0$ *für alle* $x \in [a, b]$, *dann ist die Lösung trivial.*

Für den Beweis betrachte man [3, Satz 2.5.2].

Mit dem nun folgenden Korollar erhalten wir eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für eine Klasse von linearen Randwertproblemen.

Korollar. *Es liege das Randwertproblem* (3.2.1) *mit* $f(x, u(x), u'(x)) = f(x)$ *vor, jedoch mit beliebigen Randdaten. Gilt* $d(x) \ge 0$ *für alle* $x \in [a, b]$, *dann gibt es genau eine Lösung für das zugrunde liegende Problem.*

Beweis. Zunächst überführen wir das Randwertproblem mit inhomogenen DIRICHLET Randdaten in ein Randwertproblem mit homogenen Randdaten. Satz 3.2.3 impliziert, dass die Lösung dieser Gleichung die triviale ist. Damit folgt, nach Satz 3.1.4, dass es genau eine Lösung des inhomogenen Problems gibt. □

Um die Bedingung (3.2.2) verifizieren zu können müssen wir die GREENsche Funktion kennen. Diese zu bestimmen ist, in den meisten Fällen, gar nicht möglich, da wir die linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung nicht kennen.

Aus diesem Grund werden wir im folgenden den Fall $c(x) = d(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ betrachten.
In [2, Theorem 1.1.1] wird für diese Situation die Bedingung

$$L\frac{(b-a)^2}{8} + K\frac{b-a}{2} < 1 \tag{3.2.3}$$

gefordert. Die Gleichung (3.2.2) ist identisch mit (3.2.3) für $c(x) = d(x) = 0$, denn in dieser Situation ist die homogene Gleichung von der Form $-u''(x) = 0$ für $x \in [a, b]$. Dann ist die GREENsche Funktion von der Form (3.1.3). Nun gelten (3.1.4) und (3.1.5). Damit folgt bereits die Behauptung.

Für einen Beweis von Satz 3.2.2 sei auf [3, S. 45ff] verwiesen. Dabei ist die Idee des Beweises einen Operator

$$(Tu)(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi, \quad x \in [a, b]$$

auf $\mathcal{C}^1[a, b]$ zu definieren. Mit der Norm $\|v\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}(L|v(x)| + K|v'(x)|)$ wird $\mathcal{C}^1[a, b]$ ein BANACH-Raum. T ist ein kontrahierender Operator, aufgrund der Bedingung (3.2.2). Dann folgt die Behauptung mit dem Fixpunktsatz von BANACH (siehe 2.3.1).

Satz 3.2.4. *Gegeben sei die Aufgabe* (3.2.1) *mit* $f(x, u(x), u'(x)) = f(x, u(x))$ *stetig auf* $[a, b] \times \mathbb{R}$. *Außerdem erfülle sie eine* LIPSCHITZ *- Bedingung. Das heißt es gebe eine Zahl* $L > 0$ *, so dass für alle* $x \in [a, b]$ *und für alle* $s, t \in \mathbb{R}$ *die Ungleichung*

$$|f(x, s) - f(x, t)| \leq L|s - t|$$

erfüllt sei. Gilt dann

$$L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

so hat das Problem (3.2.1) *genau eine Lösung.*

Gilt jedoch $L \geq \pi^2/(b-a)^2$ *so muss keine Lösung existieren oder, falls sie existiert, muss sie nicht eindeutig sein. Bedingungen dieser Art heißen* scharf.

Beweis. Wir betrachten die so genannte gewichtete Norm

$$\|u\|^* := \max_{x\in[a,b]} \frac{|u(x)|}{w(x)}$$

auf $\mathcal{C}[a, b]$, wobei $w(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gelte. Für die zugrunde liegende Differentialgleichung ist die GREENsche Funktion von der Form (3.1.3). Die Idee ist, wegen (3.1.6), einen Fixpunkt für den Operator

$$(Tu)(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) d\xi, \quad u \in \mathcal{C}[a, b], x \in [a, b]$$

nachzuweisen. Dazu betrachten wir zunächst für $x \in [a,b]$ und $u, v \in \mathcal{C}[a,b]$

$$\frac{|(Tu)(x) - (Tv)(x)|}{w(x)} \leq \frac{L}{w(x)} \|u - v\|^* \int_a^b G(x,\xi) w(\xi) d\xi.$$

Hier wurde die vorausgesetzte LIPSCHITZ-Bedingung von f genutzt. Damit wir einen Fixpunkt aus dem Fixpunktsatz von BANACH folgern können, muss gelten

$$\alpha := \max_{x \in [a,b]} \frac{L}{w(x)} \int_a^b G(x,\xi) w(\xi) d\xi < 1.$$

Außerdem muss natürlich $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|^*)$ ein BANACH-Raum sein. Die Idee ist nun ein w_0 zu finden, so dass gilt

$$1 = \frac{L}{w_0(x)} \int_a^b G(x,\xi) w(\xi) d\xi, \quad x \in [a,b].$$

Wegen (3.1.8) folgt nun für w_0 die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} w_0''(x) + Lw_0(x) &= 0, \quad x \in (a,b) \\ w_0(a) = 0 \quad w_0(b) &= 0 \\ w_0(x) &> 0, \quad x \in (a,b). \end{aligned}$$

Satz 3.1.3 impliziert, dass das obige Problem ohne die zusätzliche Bedingung $w(x) > 0$ genau eine Lösung hat, wenn $\sqrt{L}(b-a) \neq l\pi$, wobei $l \in \mathbb{Z}$ ist. Wählen wir $\sqrt{L}(b-a) < \pi$ so hat die allgemeine Lösung w_0 keine Nullstellen auf (a,b). Eine geschickte Wahl der Konstanten liefert $w_0(x) > 0$ für $x \in (a,b)$.

Die Bedingung $\sqrt{L}(b-a) < \pi$ lässt sich auch schreiben als $L < \pi^2/(b-a)^2$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $L < \lambda < \pi^2/(b-a)^2$ so ist die Lösung von

$$\begin{aligned} w''(x) + \lambda w(x) &= 0, \quad x \in [a,b] \\ w(a_0) = 0 \quad w(b_0) &= 0 \end{aligned}$$

wobei $a_0 < a < b < b_0$, stehts größer als Null auf dem Intervall $[a,b]$. Dazu brauchen wir nur die vorherige Überlegung wiederholen.

Mit dieser Lösung w definieren wir die Norm $\|\cdot\|^*$. Dies ist problemlos möglich, da $w(x) > 0$ für $x \in [a,b]$.

Es ist noch zu zeigen, dass $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|^*)$ ein BANACH-Raum ist. Wir beobachten dazu für ein $v \in \mathcal{C}[a,b]$ und mit der Notation $\underline{w} := \min_{x\in[a,b]} w(x)$ und $\overline{w} := \max_{x\in[a,b]} w(x)$

$$0 \leq \frac{1}{\underline{w}} \|v\|_{\mathcal{C}[a,b]} \leq \|v\|^* \leq \frac{1}{\overline{w}} \|v\|_{\mathcal{C}[a,b]}.$$

Damit sind $\|\cdot\|^*$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{C}[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}(|\cdot|)$ äquivalente Normen. Folglich ist $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|^*)$ ein BANACH-Raum, da $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_{\mathcal{C}[a,b]})$ einer ist.

(3.1.9) zeigt, dass jede Lösung eines homogenen Randwertproblems von der Form des Operators T ist. Addiert man eine Funktion h mit $h(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$, $h(a) = w(a)$, $h(b) = w(b)$ und $h''(x) = 0$ für $x \in [a,b]$ so lässt sich w schreiben als

$$w(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)w(\xi)d\xi + h(x) \geq \lambda \int_a^b G(x,\xi)w(\xi)d\xi, \quad x \in [a,b].$$

Die Funktion w wurde so motiviert, dass

$$\alpha = \max_{x\in[a,b]} \frac{L}{w(x)} \int_a^b G(x,\xi)w(\xi)d\xi \leq \frac{L}{\lambda}$$

gilt. Weiterhin ist $L < \lambda < \pi^2/(b-a)^2$. Damit existiert genau eine Lösung, wenn

$$L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

da $\alpha < 1$ und die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung aus dem BANACHschen Fixpunktsatz folgt.

Es ist noch zu zeigen, dass die Aussage des Satzes falsch ist, wenn $L = \pi^2/(b-a)^2$ ist. Wir betrachten dazu

$$\begin{aligned} y''(x) + \pi^2 y(x) &= 0, \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0, \quad y(1) &= 0. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $L = \pi^2$. Diese Gleichung hat die Lösung

$$y(x) = c_1 \sin(\pi x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, x \in [0,1].$$

Offenbar ist die Eindeutigkeit verletzt.

Für die Aufgabe

$$\begin{aligned} y''(x) + \pi^2 y(x) &= \pi^2, \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0, \quad y(1) &= 0 \end{aligned}$$

scheitert die Existenzaussage. Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$y(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x) - 1, \quad x \in [0,1], c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit den Randbedingungen folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 - 1 &= 0 \\ -c_1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

welches offenbar keine Lösung hat.

Insgesamt folgt die Behauptung. $\square$

Diese Beweisanordnung ist angelehnt an den Beweis von [1, Theorem 3.2]. Wir können die Bedingung $L < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ auch verstehen als Angabe der maximalen Intervalllänge, das heißt für die Randstellen $a < b$ darf höchstens $b - a < \pi/\sqrt{L}$ gelten, damit eine eindeutige Lösung existiert.

Satz 3.2.5. *Gegeben sei die Aufgabe* (3.2.1) *mit* $c(x) = d(x) = 0$ *für alle* $x \in [a, b]$. *Dabei sei* $f \colon [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Außerdem erfülle sie eine* LIPSCHITZ *- Bedingung. Das heißt es gebe Zahlen* $L, K > 0$ *, so dass für alle* $x \in [a, b]$ *und für alle* $s, t, s', t' \in \mathbb{R}$ *die Ungleichung*

$$|f(x, s, s') - f(x, t, t')| \leq L|s - t| + K|s' - t'|$$

erfüllt sei. Weiterhin gelte

$$L\frac{(b-a)^2}{8} + K\frac{b-a}{2} < 1$$

Sei w *eine Lösung von*

$$w''(x) + Lw'(x) + Kw(x) = 0, \quad x \in (a, b). \tag{3.2.4}$$

w *verschwinde für* $x = a$ *und* $\alpha(L, K)$ *sei die erste eindeutige Zahl, so dass* $w'(x) = 0$ *für* $x = a + \alpha(L, K)$. *Dann hat die zugrunde liegende Aufgabe genau eine Lösung, falls* $b - a < 2\alpha(L, K)$. *Diese Bedingung ist scharf.*

Man kann $\alpha(L, K)$ explizit bestimmen.

$$\alpha(L,K) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4K-L^2}} \arccos \frac{L}{2\sqrt{K}} & \text{für } 4K - L^2 > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{L^2-4K}} \operatorname{arcosh} \frac{L}{2\sqrt{K}} & \text{für } 4K - L^2 < 0; L, K > 0 \\ \frac{2}{L} & \text{für } 4K - L^2 = 0, L > 0 \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Aussage interessant, da sie sowohl einfach wie auch mächtig ist. Wenn wir nämlich die LIPSCHITZ - Bedingung für (3.2.1) im Fall $c(x) = d(x) = 0$ für $x \in [a, b]$ nachgewiesen habens, so wissen wir sofort, dass *nur* auf Intervallen $[a, b]$ mit $b-a < 2\alpha(L, K)$ eindeutige Lösungen existieren. Dabei ist das $\alpha(L, K)$ auch leicht zu bestimmen.

Der Beweis ist zunächst ähnlich zu dem Beweis von Satz 3.2.5. Wir suchen eine gewichtete Norm auf $\mathcal{C}^1[a, b]$, so dass die Kontraktionskonstante eines Operators gleich 1 ist. Die Funktion w mit der die gewichtete Norm definiert wird genügt in diesem Fall aber keiner Randwertaufgabe, sondern einer so genannten *gemischten* Aufgabe. Das heißt, man fordert $w(a) = 0, w'(d) = m$, wobei $d \in [a, b]$ und $m \in \mathbb{R}$ ist. Es existiert ein sehr interessanter Zusammenhang zwischen den gemischten Aufgaben und den Aufgaben erster Art. Wenn nämlich eine Lösung für eine gemischte Aufgabe auf der Intervalllänge α existiert, dann existiert eine Lösung für die Aufgabe erster Art auf der Intervalllänge 2α. Daraus kann die Behauptung gefolgert werden.

Den Beweis findet man in [1, S.37 f].

Beispiel 3.2.6. Als Beispiel für den Nachweis einer eindeutigen Lösung sei die Aufgabe des idealisierten oder mathematischen[1] Pendels vorgelegt. Das heißt es liegt die Aufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= g(x)\sin(u(x)) + s(x) \\ u(a) &= 0, \quad u(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

mit $x \in (a,b)$ und $s, g \in \mathcal{C}[a,b]$ vor.

$$f(x, u(x)) = g(x)\sin(u(x)) + s(x)$$

in der Notation von (3.2.1). Sei $[t,t']$ ein Intervall aus $\mathbb{R}$. Dann folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} |\sin(t) - \sin(t')| &\leq |\cos(\xi)||t-t'| \\ &\leq |t-t'| \end{aligned}$$

für $\xi \in [t,t']$. Folglich ist der Sinus Lipschitz-stetig. Seien nun $t, t' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x,t) - f(x,t')| &= |g(x)\sin(t) + s(x) - g(x)\sin(t') - s(x)| = |g(x)||\sin(t) - \sin(t')| \\ &\leq |g(x)||t-t'| \leq \max_{x\in[a,b]} |g(x)||t-t'|. \end{aligned}$$

Die Funktion g ist stetig und $[a,b]$ ist kompakt, somit ist $\max_{x\in[a,b]} |g(x)| < \infty$. Aufgrund von $c(x) = d(x) = 0$ für $x \in [a,b]$, in der Notation von (3.2.1), ist die homogene Gleichung von der Form $-u''(x) = 0$ für $x \in [a,b]$. Es wurde bereits gezeigt, dass, unter den Randbedingungen $u(a) = u(b) = 0$, diese Gleichung nur die Nulllösung hat. Satz 3.2.5 impliziert, dass eine eindeutige Lösung für (3.2.5), falls

$$\max_{x\in[a,b]} |g(x)| < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

Beispiel 3.2.7. Manchmal kann die Lösungsmenge $M \subset \mathcal{C}^2(a,b) \cap \mathcal{C}[a,b]$ aus (3.2.1) heraus bestimmt werden. Dann ist es möglich die Vorgaben aus Satz 3.2.2, insbesondere die Lipschitz - Bedingung, nur noch auf M zu fordern. Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} -u''(x) &= -g(x)\exp(u(x)) \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

wobei $x \in (a,b)$ und $g(x) \geq 0$ ist. Aus der Differentialgleichung folgt $u''(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Somit ist u eine konvexe Funktion und aus den Randdaten folgt $u(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Die Greensche Funktion G ist von der Form (3.1.3). G ist größer gleich Null auf $[a,b] \times [a,b]$ und $f(\xi, u(\xi)) = -g(\xi)\exp(u(\xi)) \leq 0$, daraus folgt

$$(Tu)(x) \leq 0, \quad x \in [a,b].$$

[1] Eine Herleitung der Gleichung findet man auf [4, S. 218 f].

Alle Funktion aus $M = \{u \in \mathcal{C}[a,b] : u(x) \leq 0 \; \forall x \in [a,b]\}$ bilden den Lösungsraum von (3.2.6). Insgesamt folgt, dass der Operator T eine Abbildung von M in sich ist. Wir formulieren nun die Suche nach einer Lösung als: Existiert ein $u \in M$, so dass $u = Tu$ gilt?

Mit Hilfe des BANACHschen Fixpunktsatzes, siehe Satz 2.3.1, wird dieses Problem nun gelöst. In diesem Beispiel ist M kein BANACH-Raum, da M kein linearen Raum über $\mathbb{R}$ ist. Dennoch ist $M \subset \mathcal{C}[a,b]$ normiert, nämlich mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}[a,b]}$. Somit auch ein metrischer Raum. Weiterhin ist M eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{C}[a,b]$ dies impliziert die Vollständigkeit von M.

Wir müssen noch zeigen, dass T ein kontrahierender Operator ist. Sei $[s,t]$ ein Intervall aus $(-\infty, 0]$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} |\exp(s) - \exp(t)| &= \exp(\xi)|s-t| \\ &\leq |s-t| \end{aligned}$$

für ein $\xi \in [s,t]$. Die Ungleichung folgt, da $\xi \leq 0$ für jedes Intervall $[s,t] \subset (-\infty, 0]$. Somit genügt $\exp(\cdot)$ auf $(-\infty, 0]$ der LIPSCHITZ - Bedingung mit $L = 1$.

Seien nun $v, w \in M$

$$\begin{aligned} \|Tv - Tw\|_{\mathcal{C}[a,b]} &= \max_{x \in [a,b]} \left| \int_a^b G(x,\xi)(g(\xi)\exp(v(\xi)) - g(\xi)\exp(w(\xi)))d\xi \right| \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} \int_a^b G(x,\xi)|g(\xi)\exp(v(\xi)) - g(\xi)\exp(w(\xi))|d\xi \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} \int_a^b G(x,\xi)g(\xi)|v(\xi) - w(\xi)|d\xi \\ &\leq \|v-w\|_{\mathcal{C}[a,b]} \max_{x \in [a,b]} g(x) \int_a^b G(x,\xi)d\xi \\ &= \frac{(b-a)^2}{8}\|v-w\|_{\mathcal{C}[a,b]} \max_{x \in [a,b]} g(x). \end{aligned}$$

Dabei wurde die gezeigte LIPSCHITZ - Bedingung und $v, w \in M$ genutzt. Die letzte Gleichung gilt wegen (3.1.4). Gilt nun $\max_{x \in [a,b]} g(x) < 8/(b-a)^2$ so hat die Aufgabe (3.2.6) genau eine Lösung auf dem Intervall $[a,b]$, da T eine Kontraktion ist.

Da (3.2.6) den Vorgaben des Satzes von BANACH genügt, kann sogar, mit dem angegebenen Iterationsverfahren, die Lösung angenähert werden. Man wähle als Startpunkt die konstante Funktion $u_0 = 0$, das Intervall $[0,1]$ und die konstante Funktion $g = 1$, dann ergibt sich mit der Iterationsvorschrift und dem Operator T

$$u_1(x) = -\int_a^b G(x,\xi)\exp(0)d\xi = \frac{x}{2}(x-1), \quad x \in [0,1].$$

Die Kontraktionskonstante ist in diesem Fall gegeben als $\alpha = L(b-a)^2/8 = 1/8$. Mit der gegebenen Fehlerabschätzung folgt nun

$$\max_{x \in [0,1]} |u(x) - u_1(x)| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x}{2}(x-1) - 0 \right| = \frac{1}{56} \approx 0.018.$$

In diesem Fall erhalten wir schon nach einer Iteration eine gute Näherung.

Welche Eigenschaften der Gleichung (3.2.6) haben wir tatsächlich gebraucht?
Um zu folgern, dass die Lösungsmenge $M = \{u \in \mathcal{C}[a,b] : u(x) \leq 0 \; \forall x \in [a,b]\}$ ist brauchten wir lediglich, dass $u''(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$ ist und $u(a) = u(b) = 0$. Dies folgt also stets, wenn $f(x,\xi) \geq 0$ für $(x,\xi) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ und $u(a) = u(b) = 0$ gilt.
Die Lipschitz - Bedingung des Operators T wurde aus der Lipschitz-Stetigkeit auf $(-\infty, 0]$ von $f(x,\cdot)$ gefolgert. Schließlich kann der Fixpunkt gefolgert werden, wenn $L < 8/(b-a)^2$ ist.

Korollar. *Für $x \in [a,b]$ sei die Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x,u(x)) \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0 \end{aligned}$$

vorgelegt. f genüge auf der Menge $[a,b] \times (-\infty,0]$ einer Lipschitz *- Bedingung mit der Zahl L. Sei f auf $[a,b] \times \mathbb{R}$ kleiner gleich Null. Gilt weiterhin*

$$L < \frac{8}{(b-a)^2}$$

so besitzt diese Randwertaufgabe genau eine Lösung. Diese ist stets kleiner gleich Null.

Nehmen wir nun an, dass f auf $[a,b] \times \mathbb{R}$ stets größer gleich Null ist. Dann ist die Lösung u konkav und mit den Randdaten stets größer gleich 0. T bildet nun die Menge $M^* = \{u \in \mathcal{C}[a,b] : u(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,b]\}$ in sich ab. f genüge auf $[a,b] \times [0,\infty)$ der Lipschitz - Bedingung, so folgt auch die Lipschitz - Bedingung für T. Der Fixpunkt existiert unter der üblichen Forderung an L. Wir erhalten

Korollar. *Für $x \in [a,b]$ sei die Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x,u(x)) \\ u(a) &= 0 \\ u(b) &= 0 \end{aligned}$$

vorgelegt. f genüge auf der Menge $[a,b] \times [0,\infty)$ einer Lipschitz *- Bedingung mit der Zahl L. Sei f auf $[a,b] \times \mathbb{R}$ größer gleich Null. Gilt weiterhin*

$$L < \frac{8}{(b-a)^2}$$

so besitzt diese Randwertaufgabe genau eine Lösung. Diese ist stets größer gleich Null.

Satz von Scorza Dragoni

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt unter welchen Vorgaben genau eine Lösung existiert und welche Länge das Definitionsintervall maximal haben darf. Der folgende

Satz von SCORZA DRAGONI setzt nur die Stetigkeit und Beschränktheit der rechten Seite von (3.2.1) voraus und garantiert dann die Existenz einer Lösung. Dieser Satz und dessen Beweis waren auch Thema des Bachelorvortrags.

Satz 3.2.8 (Satz von SCORZA DRAGONI)**.** *Es liege das Problem* (3.2.1) *zugrunde. Hier sei* $f\colon [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige und beschränkte Funktion. Weiterhin habe das homogene Problem von* (3.2.1) *nur die Nulllösung. Dann existiert eine Lösung des zugrunde liegenden Randwertproblems* (3.2.1)*.*

Das Ziel des Beweises ist es die Existenz einer Lösung aus dem Fixpunktsatz von SCHAUDER zu folgern. Darum teilt sich der Beweis in drei Teile. Zunächst wird eine abgeschlossene und konvexe Menge eines BANACH-Raums gesucht. Auf dieser wird ein Operator T definiert. Als letztes wird gezeigt, dass T stetig und sein Bild relativ kompakt ist. Dann folgt unmittelbar aus dem Fixpunktsatz von SCHAUDER (siehe Satz 2.3.6), dass wenigstens ein Fixpunkt von T existiert.

Beweis. (von Satz 3.2.8). Zum ersten Teil:

Wir betrachten den BANACH-Raum $(\mathcal{C}^1[a,b], \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1[a,b]})$ dabei ist $\|v\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} := \max_{x\in[a,b]}(|v(x)| + |v'(x)|)$ für $v \in \mathcal{C}^1[a,b]$. Dort drin definieren wir die abgeschlossene Kugel als

$$\bar{B}(0,r) := \left\{ v \in \mathcal{C}^1[a,b] : \|v\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} \leq r \right\}.$$

Dabei ist

$$r := M \max_{x\in[a,b]} \int_a^b \left(|G(x,\xi)| + \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) \right| \right) d\xi.$$

M ist erklärt durch

$$|f(\xi,s,s')| \leq M < \infty, \quad (x,s,s') \in [a,b] \times \mathbb{R}^2.$$

Wir können die so definierte Kugel als nichtleer annehmen, denn $r = 0$ impliziert $M = 0$, da das Integral einen Wert größer als Null hat. $M = 0$ impliziert $f(\xi,s,s') = 0$ für $(\xi,s,s') \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$. Somit liegt nur das homogene Problem vor und dessen Lösung ist nach Voraussetzung gleich der trivialen Lösung.

Wir können annehmen, dass $r > 0$ und somit $\bar{B}(0,r) \neq \emptyset$. Weiterhin ist $\bar{B}(0,r)$ konvex, dies wurde in Beispiel 2.2.3 gezeigt. Damit ist der erste Teil des Beweises bereits abgeschlossen.

$$(Tu)(x) := \int_a^b G(x,\xi) f(\xi,u(\xi),u'(\xi)) d\xi, \quad x \in [a,b]$$

ist definiert auf $\mathcal{C}^1[a,b]$. Dabei ist G die in (3.1.11) definiert GREENsche Funktion. Sie ist definiert, da die homogene Gleichung von (3.2.1) nur die triviale Lösung hat. (3.1.13) zeigt, dass die Ableitung des Operators stetig ist. Deshalb ist T eine Abbildung von $\mathcal{C}^1[a,b]$ in sich. Sei $v \in \bar{B}(0,r)$, dann folgt mit (3.1.14)

$$
\begin{aligned}
|(Tv)(x)| + |(Tv)'(x)| &= \left| \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) d\xi \right| \\
&\quad + \left| \frac{d}{dx} \int_a^b G(x,\xi) f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) d\xi \right| \\
&\leq \int_a^b \left(|G(x,\xi)| + \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) \right| \right) |f(\xi, v(\xi), v'(\xi))| d\xi \\
&\leq M \int_a^b \left(|G(x,\xi)| + \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) \right| \right) d\xi
\end{aligned}
$$

Auf diese Weise ist r definiert. Es folgt also

$$\|Tv\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} \leq r. \tag{3.2.7}$$

Zusammengefasst: T ist ein Operator der abgeschlossenen konvexen Menge $\bar{B}(0,r)$ in sich. Wir haben den zweiten Teil des Beweises abgeschlossen.

Im dritten und letzten Teil wird nun gezeigt, dass T stetig und $T(\bar{B}(0,r))$ relativ kompakt ist.

Zur Stetigkeit: Auf der kompakten Menge $N := \{(\xi, s, s') \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |s| + |s'| \leq r\}$ ist f gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für ein beliebiges $(\xi, s, s') \in N$ und alle $(\xi, t, t') \in N$ mit

$$|s - s'| + |t - t'| < \delta$$

stets folgt, dass

$$|f(\xi, s, s') - f(\xi, t, t')| < \tilde{\varepsilon} := \varepsilon \frac{M}{r}.$$

Ist $v \in \bar{B}(0,r)$, dann ist $(\xi, v(\xi), v'(\xi)) \in N$ für alle $\xi \in [a,b]$. Sei nun $v \in \bar{B}(0,r)$ beliebig und $w \in \bar{B}(0,r)$, so dass

$$\|v - w\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} < \delta.$$

Für diese $v, w \in \bar{B}(0,r)$ folgt, wegen $\delta = \delta(\varepsilon)$, dass

$$|f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi))| < \tilde{\varepsilon}, \quad \xi \in [a,b].$$

Betrachten wir

$$\begin{aligned}
\|Tv - Tw\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} &= \max_{x\in[a,b]} \left(\left| \int_a^b G(x,\xi)(f(\xi, v(\xi)v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi)))d\xi \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{d}{dx} \int_a^b G(x,\xi)(f(\xi, v(\xi), v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi)))d\xi \right| \right) \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \int_a^b \left(|G(x,\xi)| + \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) \right| \right) |f(\xi, v(\xi)v'(\xi)) - f(\xi, w(\xi), w'(\xi))| d\xi \\
&< \tilde{\varepsilon} \max_{x\in[a,b]} \int_a^b \left(|G(x,\xi)| + \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) \right| \right) d\xi = \tilde{\varepsilon} \frac{r}{M} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Insgesamt wurde also gezeigt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für $v \in \bar{B}(0,r)$ und für alle $w \in \bar{B}(0,r)$ mit

$$\|v - w\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} < \delta \Rightarrow \|Tv - Tw\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} < \varepsilon$$

T ist also stetig.

Zur relativen Kompaktheit von $T(\bar{B}(0,r))$: Wir betrachten eine beliebige Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{B}(0,r)$. Damit definieren wir die Bildfolge $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $T(\bar{B}(0,r))$. Die Tu_n sind definiert auf der kompakten Menge $[a,b]$ und nehmen Werte in $\mathbb{R}$ an. Außerdem ist $\max_{x\in[a,b]} |(Tu_n)(x)| \leq r$, wegen (3.2.7). Seien $x, y \in [a,b]$ beliebig, dann ist für festes $n \in \mathbb{N}$

$$|(Tu_n)(x) - (Tu_n)(y)| \leq M \int_a^b G(x,\xi) - G(y,\xi) d\xi.$$

Die GREENsche Funktion G ist stetig auf $[a,b] \times [a,b]$. Sei nun $|x-y|$ klein. Dann folgt aus der Stetigkeit von G, dass $|(Tu_n)(x) - (Tu_n)(y)|$ klein wird und dies unabhängig von n. Weiterhin ist Tu_n eine gleichmäßig stetige Funktion auf der Intervall $[a,b]$. Insgesamt ist die Folge Tu_n gleichgradig stetig.

Der Satz von ARZELÀ ASCOLI impliziert nun die Existenz einer Indexfolge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $(Tu_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ in $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_{\mathcal{C}[a,b]})$ konvergiert.

Betrachten wir nun die Ableitung $((Tu_{n_i})')_{i\in\mathbb{N}}$ dieser Teilfolge. Diese sind Funktionen des kompakten Intervalls $[a,b]$ in die reellen Zahlen. Weiterhin gilt
$\max_{x\in[a,b]} |(Tu_{n_i})'(x)| \leq r$,wegen (3.2.7).

Seien $x, y \in [a,b]$ und $i \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist

$$\begin{aligned}(Tu_{n_i})'(x) - (Tu_{n_i})'(y) &= \int_a^b \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(y,\xi) \right) f(\xi, u_{n_i}(\xi), u'_{n_i}(\xi)) d\xi \\ &= (B'(x) - B'(y)) \int_a^x \frac{A(\xi)}{RW(\xi)} f(\xi, u_{n_i}(\xi), u'_{n_i}(\xi)) d\xi \\ &\quad + \int_x^y \frac{A'(x)B(\xi) - A(\xi)B'(y)}{RW(\xi)} f(\xi, u_{n_i}(\xi), u'_{n_i}(\xi)) d\xi \\ &\quad + (A'(x) - A'(y)) \int_y^b \frac{B(\xi)}{RW(\xi)} f(\xi, u_{n_i}(\xi), u'_{n_i}(\xi)) d\xi.\end{aligned}$$

Mit einfachen Abschätzungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}|(Tu_{n_i})'(x) - (Tu_{n_i})'(y)| \le M|B'(x) - B'(y)| &\int_a^x \left| \frac{A(\xi)}{RW(\xi)} \right| d\xi \\ + M &\int_x^y \left| \frac{A'(x)B(\xi) - A(\xi)B'(y)}{RW(\xi)} \right| d\xi \\ + M|A'(x) - A'(y)| &\int_y^b \left| \frac{B(\xi)}{RW(\xi)} \right| d\xi.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist ausschließlich von den Lösungen $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(a,b) \cap \mathcal{C}[a,b]$ der homogenen Gleichung abhängig. Sei $|x-y|$ klein. Dann folgt aus der Stetigkeit von A', B' und der Integralfunktion, dass $|(Tu_{n_i})'(x) - (Tu_{n_i})'(y)|$ klein wird und dies unabhängig von i. Weiterhin ist $((Tu_{n_i})')_{i\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig stetige Funktion auf der Intervall $[a,b]$. Insgesamt ist die Folge $(Tu_n)'$ gleichgradig stetig.

Der Satz von Arzelá Ascoli impliziert nun die Existenz einer Indexfolge $(n_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass $((Tu_{n_{i_k}})')_{k\in\mathbb{N}}$ in $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_{\mathcal{C}[a,b]})$ konvergiert.

Mit der Vollständigkeit von $((\mathcal{C}^1[a,b], \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1[a,b]})$ können wir jetzt folgern, dass $T(\bar{B}(0,r))$ relativ kompakt ist.

Der Fixpunktsatz von Schauder liefert nun die Existenz von wenigstens einem Fixpunkt des Operators T. Dieser Fixpunkt ist Lösung des ursprünglich zugrunde gelegten Randwertproblems (3.2.1). Diese Tatsache folgt aus (3.1.16). □

Diese Beweisanordnung ist angelehnt an den Beweis von [3, Satz 2.7.2].

Beispiel 3.2.9. Betrachten wir das mathematische Pendel für inhomogenen Randdaten:

$$\begin{aligned}-u''(x) &= g(x)\sin(u(x)), \quad x \in [a,b],\ g \in \mathcal{C}[a,b] \\ u(a) &= \alpha, \quad u(b) = \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Die Randdaten beschreiben, dass das Pendel zum (Zeit)Punkt a auf der Höhe α und zum (Zeit)Punkt b auf der Höhe β ist.

Hat dieses Problem eine Lösung?

Wir transformieren dieses Problem mittels $\tilde{u}(x) := u(x) - r(x)$ in ein Problem mit homogenen Randdaten. Mit zweichfachem ableiten und Multiplikation mit -1 erhalten wir die Differentialgleichung

$$-\tilde{u}''(x) = g(x)\sin(\tilde{u}(x) + r(x)), \quad x \in [a,b]$$

mit homogenen Randdaten. Sei $x \in [a,b]$ und $\tilde{u} \in \mathcal{C}[a,b]$, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x,\tilde{u}(x))| &= |g(x)\sin(\tilde{u}(x) + r(x))| \\ &= |g(x)||\sin(\tilde{u}(x) + r(x))| \\ &\leq |g(x)| \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} |g(x)|. \end{aligned}$$

Folglich ist f beschränkt. Weiterhin ist f stetig auf $[a,b] \times \mathbb{R}$ also Komposition stetiger Funktionen. Die homogene Gleichung ($-\tilde{u}''(x) = 0$ für $x \in [a,b]$) hat nur die triviale Lösung. Der Satz von SCORZA DRAGONI sagt nun, dass das mathematische Pendel für beliebige Randdaten stets mindestens eine Lösung hat.

4 Ausblick und Kommentar

Durch die Bachelorarbeit ist es möglich erste Einblicke in die Theorie der DIRICHLETschen Randwertprobleme zu erhalten.

Sie bietet weiterhin verschiedene Anknüpfungspunkte zur Weiterarbeit:
Der Satz von SCORZA DRAGONI ist dadurch motiviert worden eine Existenzaussage für Randwertprobleme zu finden, die keiner LIPSCHITZ - Bedingung genügen. Jedoch liefert er nur eine Existenzaussage. Es liegt also nahe sich allgemeinere LIPSCHITZ - Bedingungen zu überlegen mit denen die Eindeutigkeit, für eine größere Klasse von Differentialgleichungen, gezeigt werden könnte. Das Thema der Iterationslösung kann ebenfalls interessant sein. Zum einen aus der Sicht der Numerik, nämlich mittels dieses Verfahren Lösung zu approximieren, alternativ ist es in manchen Fällen vielleicht möglich den Grenzwert dieser Gleichung zu bestimmen und dadurch eine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten. Für eine nähere Betrachtung dieser Themen sei auf [1] verwiesen.

In manchen Fällen ist die rechte Seite von (3.2.1) nur stetig. Für solche Gleichungen kann man so genannte *Ober-* und *Unterlösungen* einer Differentialgleichung betrachten. Bei diesem Konzept ist es die Idee eine Differentialgleichung nach oben und unten durch Differentialgleichungen abzuschätzen deren Lösung man kennt. Dadurch ist es möglich das Verhalten der gesuchten Lösung in einem gewissen Rahmen zu kontrollieren. Im Falle einer Differentialgleichung $-u''(x) = f(x, u(x))$ für $x \in [a, b]$ mit homogenen Randdaten und stetigem f reicht schon die Forderung der Existenz dieser Ober- und Unterlösungen um die Existenz einer Lösung u zu garantieren. Für eine kurze Einführung seien [3, Kapitel 2.8] und [8, S. 279 ff] empfohlen. Weiterführende Literatur stellt [2] dar.

Es war interessant zu erkennen wo und in welcher Form die gelernten Begriffe aus den Grundvorlesungen immer wieder auftauchen und welche zentrale Rolle sie spielen. Außerdem war es spannend neue Ideen und Einsichten zu bekommen. Als Beispiel sei hier die Tatsache erwähnt, dass bei dem Übergang von Anfangswertproblemen zu Randwertproblemen die Idee der Eindeutigkeit einer Lösung schon für einfache Gleichungen nicht mehr gültig ist. Das spannendste und schönste bei der Arbeit an dieser Ausarbeitung war es jedoch zu erkennen, dass man mit etwas Mühe und Geduld sich eingeständig in neue Themengebiete einarbeiten kann und dafür keine Vorlesung besuchen muss.

Literaturverzeichnis

[1] Paul Bernard Bailey, Lawrence F. Shampine, and Paul E. Waltman. *Nonlinear two-point boundary value problems.* Academic Press, 1968.

[2] Stephen R. Bernfeld and Vangipuram Lakshmikantham. *An introduction to nonlinear boundary value problems.* Academic Press, 1974.

[3] Etienne Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen.* Vieweg, 2004.

[4] Harro Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Teubner, 2006.

[5] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1.* Teubner, 2009.

[6] Wolfgang Naas, Josef und Tutschke. *Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik.* Akademischer-Verlag, 1986.

[7] Hans Sagan. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics.* Wiley, 1966.

[8] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 2000.

[9] Eberhard Zeidler. *Applications to mathematical physics*, volume 108 of *Applied mathematical sciences.* Springer, 1999.

Hiermit versichere ich, Robin Beier, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle zitierten oder sinngemäß übernommenen Textstellen sind als solche gekennzeichnet und die Zitierquellen vollständig angegeben.