Der Satz von Stone-Weierstraß

Bachelorarbeit

vorgelegt von
Ulf Biallas
Matrikelnummer 1830830
23. April 2010

Angefertigt im Rahmen des Seminars
Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld

betreut durch
Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn,
Prof. Dr. Etienne Emmrich,
Dr. Thorsten Hüls

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Karl Weierstraß formulierte 1885 einen Approximationssatz, der besagt, dass eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall beliebig gut durch Polynome approximiert werden kann. Dieser, nach ihm benannte, *(klassische) Satz von Weierstraß* trifft allerdings weder Aussagen über Funktionen, die auf anderen Mengen als einem kompakten reellen Intervall definiert sind noch über eine Approximation durch andere Funktionen als Polynome.

Eine Verallgemeinerung, die auch diese Problemstellung beinhaltet, ist 1937 dem amerikanischen Mathematiker Marshall Harvey Stone gelungen. Dieser allgemeinere Satz ist heute als *Satz von Stone-Weierstraß* bekannt und soll das Thema dieser Arbeit werden.

Wir wollen chronologisch mit dem Satz von Weierstraß beginnen und diesen Schritt für Schritt verallgemeinern, bis wir den Satz von Stone-Weierstraß formulieren können. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass wir den Zusammenhang der beiden, auf den ersten Blick sehr unterschiedlich erscheinenden, Sätze besser verstehen.
Der anschließende Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß erfordert einige Vorarbeit, da wir den klassischen Satz von Weierstraß für den Beweis nicht benutzen wollen und folglich die in einem der Hilfssätze benutzte Approximation der Wurzelfunktion auf andere Weise zeigen müssen. Wenn der Satz von Stone-Weierstraß dann aber bewiesen ist, erhalten wir den klassischen Satz von Weierstraß als einfachen Spezialfall.

Zum Schluss wollen wir an einigen Beispielen zeigen, wie sich der Satz von Stone-Weierstraß anwenden lässt. Dazu wollen wir diesen zuerst auch für komplexwertige Funktionen beweisen und dann auf zwei unterschiedliche Probleme anwenden.

2 Der Satz von Stone-Weierstraß

Wir beginnen mit dem klassischen Satz von Weierstraß aus dem Jahre 1885. Es existiert ein konstruktiver Beweis, der eine Approximation durch Bernsteinpolynome liefert, auf den wir aber in dieser Arbeit nicht eingehen wollen.

Satz 2.1. Approximationssatz von Weierstraß
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ die Menge der auf I definierten Polynome und $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Dann gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Da $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ mit der durch die Maximum-Norm induzierten Metrik

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty := \max_{x\in I} |f(x) - g(x)| \quad \text{für } f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$$

einen metrischen Raum $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}), d)$ bildet, ist jede Folge, die auf $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ konvergiert, eine Funktionenfolge, die auf I gleichmäßig konvergiert. Damit ist die Aussage des Satzes gleichbedeutend damit, dass es zu jedem $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ eine Folge $(p_n) \in \mathcal{P}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} p_n = f.$$

Denn wenn p_n gegen f konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f - p_n\|_\infty = \max_{x\in I} |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. Gilt aber $\max_{x\in I} |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$, so gilt erst recht $|f(x) - p_n(x)| < \epsilon$ für alle $x \in I$ und alle $n \geq N$. Dies entspricht aber gerade der gleichmäßigen Konvergenz auf I.

Als Teilmenge eines metrischen Raumes, lässt sich von $\mathcal{P}$ der Abschluss $\overline{\mathcal{P}}$ bezügliche der Metrik d bilden, dessen Elemente Grenzwerte von Folgen aus $\mathcal{P}$ sind. Wegen $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ ist f Grenzwert einer Folge aus $\mathcal{P}$ und es gilt damit $f \in \overline{\mathcal{P}}$ und folglich auch $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \subseteq \overline{\mathcal{P}}$, womit wir den Satz von Weierstraß auch wie folgt formulieren können:

Satz 2.2. Approximationssatz von Weierstraß: Alternative Formulierung
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ die Menge der auf I definierten Polynome. Dann gilt

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{C}(I,\mathbb{R}),$$

d.h. $\mathcal{P}$ liegt dicht in $C(I,\mathbb{R})$.

Auf der Menge $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf I sind Addition und der Multiplikation für alle $f, g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und}$$
$$(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x).$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass die in $\mathbb{R}$ geltenen Assoziativ- und Kommutativgesetze für Addition und Multiplikation sowie das Distributivgesetz auch für die Addition und Multiplikation von Funktionen in $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ gilt. Da zusätzlich $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ nicht nur mit einer Funktion f auch $-f$, sondern auch alle konstanten Funktionen einschließlich 0 und 1 enthält, erfüllt $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}), +, \cdot)$ alle Axiome eines Ringes.
Die Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ aller Polynome ist ein Unterring, denn sowohl Summe und Produkt von Polynomen sind wieder ein Polynom, als auch die Nullfunktion, als neutrales Element der Addition.
Der Unterring $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ hat dabei zwei Eigenschaften:
Zum einen enthält er mit den Polynomen vom Grad 0 alle konstanten Funktionen. Zum

anderen gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in I$ mindestens eine Funktion $f \in \mathcal{P}$ mit $f(x) \neq f(y)$, im einfachsten Falle nämlich ein lineares Polynom mit einer von Null verschiedenen Steigung.
Einen Funktionenraum, der diese zweite Eigenschaft hat, bezeichnet man auch als *punktetrennend.*

Wir wollen den Approximationssatz von Weierstraß nun soweit verallgemeinern, dass wir Funktionen auf einem beliebigen kompakten metrischen Raum X anstatt auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ betrachten und von dem Unterring nur noch diese beiden Eigenschaften verlangen, womit wir auch andere Funktionstypen als Polynome erfassen.

Satz 2.3. Satz von Stone-Weierstraß
Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{A}$ ein Unterring von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, der folgende Eigenschaften erfüllt:

1. *$\mathcal{A}$ enthalte alle auf X konstanten Funktionen,*

2. *$\mathcal{A}$ ist* punktetrennend.

Dann gilt $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Wir wollen uns bei dem Beweis dieses Satzes an [1, S.54-60] orientieren. Bevor wir jedoch mit dem eigentlichen Beweis beginnen, müssen wir einige Hilfssätze formulieren und beweisen. Wir beginnen mit der Definition eines verallgemeinerten Binomialkoeffizienten, der im oberen Parameter reelle Zahlen zulässt und für das darauf folgende Lemma benötigt wird.

Definition 2.4. Verallgemeinerter Binomialkoeffizient
Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann sei der verallgemeinerte Binomialkoeffizient gegeben durch

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-(k-1))}{k!} & \text{,wenn } k > 0, \\ 1 & \text{,wenn } k = 0, \\ 0 & \text{,wenn } k < 0. \end{cases}$$

Es gelten dabei die Rechenregeln

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha - 1}{k} + \binom{\alpha - 1}{k - 1}, \tag{2.1}$$

$$\alpha\binom{\alpha - 1}{k} = (k + 1)\binom{\alpha}{k + 1}. \tag{2.2}$$

Eine ausführliche Herleitung dieser Regeln findet sich z.B im [4, S.401].

Lemma 2.5. Binomialreihe
Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ *und* $k \in \mathbb{Z}$*. Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < 1$ *gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^{\alpha}.$$

Beweis. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := \binom{\alpha}{k}$. Es gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}}x\right| = \left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k)}{(k+1)!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}}x\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}x\right|$$

sowie

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}x\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}x\right| = |x|.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|x| < 1$.

Nun müssen wir aber noch zeigen, dass die Reihe für $|x| < 1$ wirklich gegen $(1+x)^{\alpha}$ konvergiert. Dazu definieren wir eine Funktion f durch $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$.

Als nächstes werden wir zeigen, dass f der Differentialgleichung

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x) \tag{2.3}$$

genügt. Dazu benötigen wir die 1. Ableitung von f. Diese lautet

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty}k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k$$

und mit 2.2 folgt

$$f'(x) = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k.$$

Wir können nun allein mit den Rechenregeln 2.1 und 2.2 des Binomialkoeffizienten sowie einiger Indexverschiebungen die Differentialgleichung herleiten.

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k =$$

$$\alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^{k+1}\right) \tag{2.4}$$

Da der Summand $k = 0$ der linken Summe von 2.4 gleich 1 ist können wir durch Addition einer 1 die Summe bei $k = 1$ starten lassen. Bei der rechten Summe verschieben wir den

Index so, dass sie auch bei $k = 1$ startet. Dadurch hat der Faktor x in beiden Summen die gleiche Potenz und wir können die Summen zusammenziehen.

$$\alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^k\right)=\alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}\right)x^k\right)$$

Mit Anwendung von 2.1 folgt dann

$$\alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\right)=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k=\alpha f(x).$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$(1+x)^{-\alpha}f(x) \tag{2.5}$$

und ihre Ableitung

$$((1+x)^{-\alpha}f(x))'=(1+x)^{-\alpha-1}f(x)\left((1+x)f'(x)-\alpha f(x)\right).$$

Wegen der Differentialgleichung 2.3 ist der Faktor $((1+x)f'(x)-\alpha f(x))$ gleich Null und die Ableitung verschwindet. Demnach muss es sich bei 2.5 um eine konstante Funktion handeln.
Es gibt also ein $c \in \mathbb{R}$ mit $(1+x)^{-\alpha}f(x) = c$. Da wir wissen, dass $f(0) = 1$ ist, können wir das c durch $c = 1^{-\alpha}f(0) = 1$ bestimmen. Es gilt also

$$(1+x)^{-\alpha}f(x)=1$$

und durch Multiplikation von $(1+x)^{\alpha}$ folgt die Behauptung. □

Korollar 2.6. Potenzreihe der Wurzelfunktion
Für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \le x \le 1$ gilt

$$\sqrt{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^k.$$

Beweis. Mit der Binomialreihe für $\alpha = \frac{1}{2}$ und Einsetzen von $-x$ für x folgt die Behauptung für $0 \le x < 1$. Es bleibt noch zu zeigen, daß die Reihe auch für $x = 1$ konvergiert. Dazu rechnen wir zuerst $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ aus:

$$\binom{\frac{1}{2}}{k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-k+1)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-\frac{2}{2})\cdot(\frac{1}{2}-\frac{4}{2})\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-\frac{2k-2}{2})=$$

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{3-2k}{2}=\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2^k}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}$$

In dieser Form sieht man, daß $\binom{\frac{1}{2}}{k}$ immer nur bei ungeraden $k > 0$ einen positiven Wert annimmt, also genau dann, wenn $(-1)^k$ negativ ist. Folglich gilt für $k > 0$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k = -\left|\binom{\frac{1}{2}}{k}\right|$$

und weiter

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{k}\right| x^k. \tag{2.6}$$

Wir wollen im Folgenden den Abelschen Grenzwertsatz anwenden. Für $x = 1$ lautet 2.6

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty}\left|\binom{\frac{1}{2}}{k}\right|. \tag{2.7}$$

Konvergiert 2.7, so konvergiert die Potenzreihe 2.6 gleichmäßig auf $[0, 1]$.

Da wir bei 2.6 den Betrag des Binomialkoeffizienten summieren und x in einem positiven Intervall liegt, ist die Folge $a_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\left|\binom{\frac{1}{2}}{k}\right| x^k$ monoton fallend. Für $0 \leq x < 1$ wissen wir, daß $a_n(x)$ gegen $\sqrt{1-x} > 0$ konvergiert. Da $a_n(x)$ monoton fallend ist, können wir für $0 \leq x < 1$ sogar sagen, dass jedes Glied der Folge größer Null ist. Wegen der Stetigkeit von $a_n(x)$ in $x = 1$ für alle n gilt sogar $a_n(x) > 0$ für alle $0 \leq x \leq 1$.
Damit ist auch die Folge $a_n(1)$ monoton fallend und nach unten beschränkt und folglich konvergent. Die Reihe 2.7 konvergiert also.

Wir wissen nun, dass die Potenzreihe 2.6 gleichmäßig auf $[0, 1]$ konvergiert. Des Weiteren sind 2.6 und $\sqrt{1-x}$ auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig und 2.6 konvergiert für $0 \leq x < 1$ gegen $\sqrt{1-x}$. Also muss 2.6 auch für $x = 1$ gegen $\sqrt{1-x}$ konvergieren.

□

Lemma 2.7. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{A}$ ein Unterring von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Dann ist auch $\overline{\mathcal{A}}$ ein Unterring von $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Beweis. Seien $a, b \in \overline{\mathcal{A}}$. Dann gibt es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{A}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Betrachten wir nun die Folgen $a_n + b_n$ und $a_n \cdot b_n$, welche, da $\mathcal{A}$ als Unterring abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation ist, ebenfalls aus $\mathcal{A}$ sind. Nach den Grenzwertsätzen existieren die Grenzwerte dieser Folgen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \quad \text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

womit $a + b$ und $a \cdot b$ auch Grenzwerte von Folgen aus $\mathcal{A}$ und damit im Abschluss enthalten sind. $\overline{\mathcal{A}}$ ist also abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation und damit ein Unterring. □

Das folgende Lemma ist von entscheidender Bedeutung für den Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß. Insbesondere werden die beiden von 2.3 an $\mathcal{A}$ gestellen Bedingungen für dessen Beweis benötigt, aber nicht mehr direkt für den eigentlichen Beweis des Satzes. Vorher müssen wir jedoch noch das Maximum und Minimum von zwei Funktionen definieren.

Definition 2.8.
Seien f und g zwei Funktionen. Dann bezeichnen wir mit dem Maximum von f und g die Funktion

$$\max(f,g) = \begin{cases} f(x), & \textit{falls } f(x) \geq g(x), \\ g(x), & \textit{falls } f(x) < g(x). \end{cases}$$

Analog ist das Minimum von f und g die Funktion

$$\min(f,g) = \begin{cases} f(x), & \textit{falls } f(x) \leq g(x), \\ g(x), & \textit{falls } f(x) > g(x). \end{cases}$$

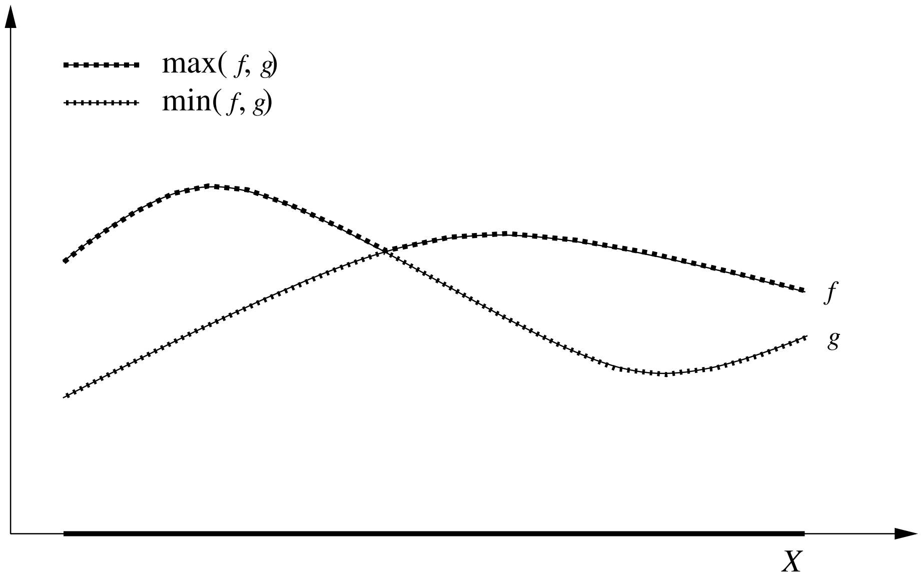

Abbildung 1: Die Graphen zweier Funktionen f und g sowie deren Minimum und Maximum

Lemma 2.9. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{A}$ ein Unterring von $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ mit den beiden geforderten Eigenschaften aus dem Satz von Weierstraß und Stone ($\mathcal{A}$ enthält alle konstanten Funktionen und ist punktetrennend). Dann gilt:*

a) Zu zwei beliebig gewählten voneinander verschiedenen Punkten $x, y \in X$ und beliebigen Werten a, b gibt es mindestens eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$.

b) *Gehört* g *zu* $\overline{\mathcal{A}}$, *so auch* $|g|$.

c) *Gehören* g_1 *und* g_2 *zu* $\overline{\mathcal{A}}$, *so gehören auch* $\min(g_1, g_2)$ *und* $\max(g_1, g_2)$ *zu* $\overline{\mathcal{A}}$.

Beweis. a) Da $\mathcal{A}$ punktetrennend ist gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{A}$ mit $g(x) = \alpha$ und $g(y) = \beta$, wobei $\alpha \neq \beta$. Definieren wir f durch

$$f(\xi) := a + \frac{b-a}{\beta-\alpha}(g(\xi) - \alpha) \quad , \xi \in X,$$

so haben wir eine Funktion gefunden, die, da $\mathcal{A}$ ein Ring ist und alle Konstanten enthält, ebenfalls in $\mathcal{A}$ liegt und die geforderte Bedingung erfüllt:

$$f(x) = a + \frac{b-a}{\beta-\alpha}(\alpha - \alpha) = a$$

$$f(y) = a + \frac{b-a}{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = a + b - a = b$$

b) Sei $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Wir können $|g|$ auch mit Hilfe der Wurzelfunktion ausdrücken durch

$$|g(x)| = \sqrt{g^2(x)}.$$

Mit Nullergänzung erhalten wir

$$\sqrt{\|g\|^2 - \|g\|^2 + g^2(x)} = \sqrt{\|g\|^2 - (\|g\|^2 - g^2(x))}$$

$$= \sqrt{\|g\|^2 - \frac{\|g\|^2(\|g\|^2 - g^2(x))}{\|g\|^2}} = \|g\|\sqrt{1 - \frac{\|g\|^2 - g^2(x)}{\|g\|^2}}. \tag{2.8}$$

Da aus $\|g\| = \max_{y \in X} |g(y)| \geq g(x)\ \forall x \in X$ auch $\|g\|^2 \geq g^2(x)$ folgt gilt die Beziehung

$$0 \leq \frac{\|g\|^2 - g^2(x)}{\|g\|^2} \leq 1. \tag{2.9}$$

Setzen wir nun $z := \frac{\|g\|^2 - g^2(x)}{\|g\|^2}$, so können wir 2.8 schreiben als

$$\|g\|\sqrt{1-z}.$$

Wegen 2.9 gilt $0 \leq z \leq 1$ und wir können $\sqrt{1-z}$ mit Korollar 2.6 durch eine Potenzreihe ausdrücken. Da die Partialsummen dieser Potenzreihe Polynome sind und $\overline{\mathcal{A}}$ nach Lemma 2.7 abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation ist, liegt auch die Potenzreihe und damit $|g|$ in $\overline{\mathcal{A}}$.

c) Dass mit zwei Funktionen g_1 und g_2 aus $\overline{\mathcal{A}}$ auch deren Minimum und Maximum zu $\overline{\mathcal{A}}$ gehören folgt nun aus b), denn $\min(g_1, g_2)$ und $\max(g_1, g_2)$ lassen sich auch darstellen in der Form

$$\min(g_1, g_2) = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 - |g_1 - g_2|),$$
$$\max(g_1, g_2) = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + |g_1 - g_2|).$$

Davon kann man sich schnell überzeugen, denn $\frac{1}{2}(g_1+g_2)$ ist das arithmetische Mittel der beiden Funktionswerte und $\frac{1}{2}|g_1 - g_2|$ die Hälfte des Abstands zwischen den beiden Werten. Beim Minimum wird nun die Hälfte des Abstands vom Mittelwert abgezogen, womit man genau bei dem niedrigeren Wert landet, beim Maximum wird stattdessen addiert und man landet beim höheren der beiden Werte: dem Maximum. □

Nachdem wie die Hilfssätze bewiesen haben, können wir nun mit dem eigentlichen Beweis des Satzes von Stone-Weierstraß beginnen.

Beweis. Sei f eine beliebige Funktion aus $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$.
Weiter seien s, t zwei Punkte aus X. Gilt $s \neq t$, so gibt es nach Lemma 2.9.a) mindestens eine Funktion in $\mathcal{A}$, die bei s und t gerade die Werte $f(s)$ und $f(t)$ annimmt. Diese Funktion wollen wir $g_{s,t}$ nennen. Im Fall $s = t$ ist $g_{s,t}$ die konstante Funktion mit dem Wert $f(s)$, welche nach Voraussetzung in $\mathcal{A}$ liegt.

Da $g_{s,t}$ und f stetige Funktionen sind, ist auch ihre Differenz $g_{s,t} - f$ stetig. Insbesondere ist $g_{s,t} - f$ im Punkt s stetig und es gibt ein $\delta_s > 0$ so, dass für alle $\xi \in X$ mit $|\xi - s| < \delta_s$ gilt:

$$|(g_{s,t}(\xi) - f(\xi)) - \underbrace{(g_{s,t}(s) - f(s))}_{=0}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dies entspricht der zweiseitigen Ungleichung

$$-\frac{\epsilon}{2} < g_{s,t}(\xi) - f(\xi) < \frac{\epsilon}{2},$$

die sich auch in der Form

$$f(\xi) - \frac{\epsilon}{2} < g_{s,t}(\xi) < f(\xi) + \frac{\epsilon}{2} \tag{2.10}$$

schreiben lässt.
Diese δ_s-Umgebung von s wollen wir U_s nennen. Da $g_{s,t} - f$ auch in t stetig ist, gibt es dort für ein $\delta_t > 0$ ebenfalls eine solche offene Umgebung, die wir U_t nennen wollen. Wir können die zweiseitige Ungleichung 2.10 daher auch so formulieren:

$$\text{Für alle } \xi \in U_s \cup U_t \text{ gilt } f(\xi) - \frac{\epsilon}{2} < g_{s,t}(\xi) < f(\xi) + \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.11)$$

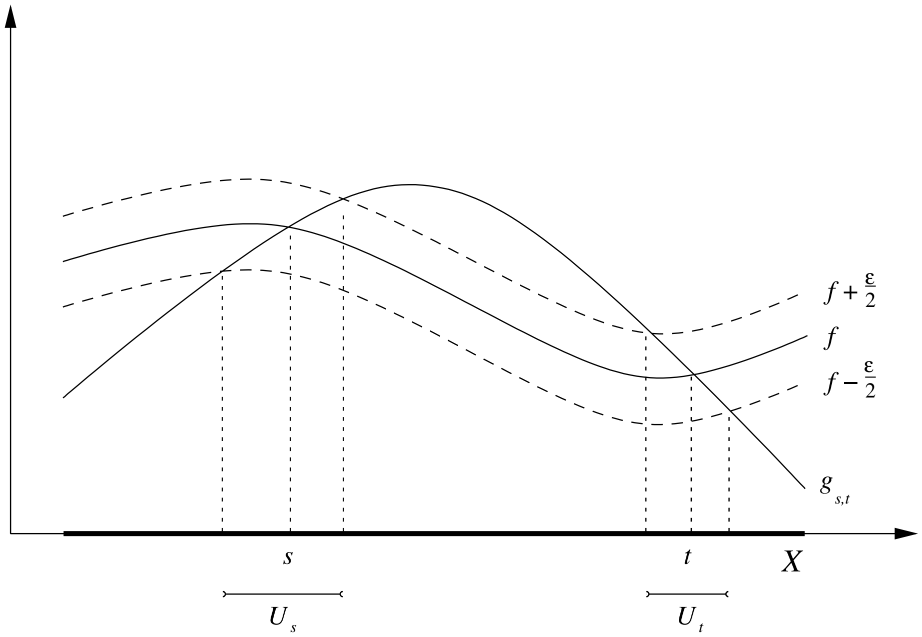

Abbildung 2: Die Umgebungen U_s und U_t

Wir halten nun den Punkt t fest und variieren s.
Für jedes $s \in X$ erhalten wir eine eigene Funktion $g_{s,t} \in \mathcal{A}$ sowie eine eigene Umgebung U_s. Und obwohl wir den Punkt t festhalten auch eine eigene Umgebung U_t, denn diese ist nicht nur von t, sondern auch von der Funktion $g_{s,t}$ abhängig.
Variiert s auf ganz X, so bilden die Umgebungen U_s eine offene Überdeckung von X. Dazu reichen wegen der Kompaktheit von X bereits endlich viele Umgebungen. Es gibt also endlich viele Punkte $s_1, \ldots, s_k \in X$, deren Umgebungen $U_{s_1}, \ldots, U_{s_k}$ eine vollständige Überdeckung von X bilden. Die k Umgebungen des Punktes t bezeichnen wir mit $U_{t_1}, \ldots, U_{t_k}$.

Wir haben nun k Funktionen $g_{s_i,t},\ i = 1, \ldots, k$ und können deren Minimum

$$g_t := \min(g_{s_1,t}, \ldots, g_{s_k,t})$$

bilden, welches nach Lemma 2.9.c) zu $\overline{\mathcal{A}}$ gehört.
Da jeder Punkt aus $\xi \in X$ in einer der Umgebungen $U_{s_1}, \ldots, U_{s_k}$ liegt und so eine der Funktionen $g_{s_1,t}, \ldots, g_{s_k,t}$ wegen Ungleichung 2.11 an diesem Punkt einen Wert kleiner als $f(\xi) + \frac{\epsilon}{2}$ liefert, gilt

$$g_t(\xi) < f(\xi) + \frac{\epsilon}{2}\ \forall \xi \in X. \quad (2.12)$$

Der linke Teil von Ungleichung 2.11 gilt zwingend nur für Elemente aus dem Schnitt aller $U_{t_i}, i = 1, \dots, k$.

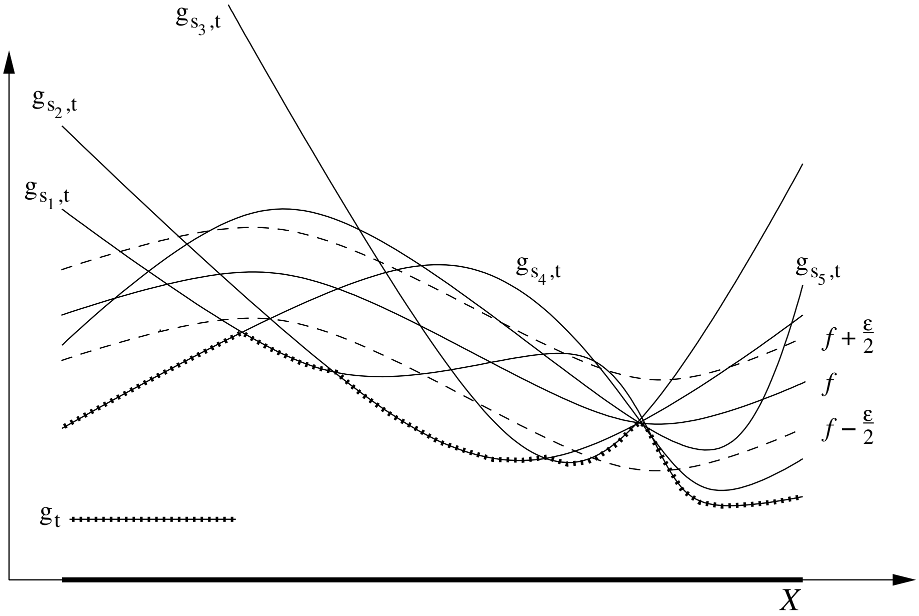

Abbildung 3: Das Minimum g_t

Wir fassen zusammen, was wir bereits gezeigt haben:
Zu einem beliebigen Punkt t aus X haben wir eine Funktion g_t aus $\overline{\mathcal{A}}$ gefunden, sodass für alle $\xi \in X$ die Ungleichung

$$g_t(\xi) \ < \ f(\xi) + \frac{\epsilon}{2} \tag{2.13}$$

erfüllt ist.

Für alle ξ aus dem Schnitt der Umgebungen $U_{t_1}, \dots, U_{t_k}$, den wir mit U_T benennen, gilt sogar die zweiseitige Ungleichung

$$f(\xi) - \frac{\epsilon}{2} \ < \ g_t(\xi) \ < \ f(\xi) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.14}$$

Nun lassen wir t auf ganz X variieren. Zu jedem t erhalten wir eine eigene Funktion g_t und eine eigene Umgebung U_T. Wegen der Kompaktheit von X bilden bereits endlich viele derartige Umgebungen $U_{T_1}, \dots, U_{T_n}$ eine offene Überdeckung von X. Von den dazugehörigen Funktionen $g_{t_1}, \dots, g_{t_n}$ bilden wir das Maximum

$$g := \max(g_{t_1}, \dots, g_{t_n}),$$

welches nach Lemma 2.9.c) ebenfalls eine Funktion aus $\overline{\mathcal{A}}$ ist. Des Weiteren ist für g die zweiseitige Ungleichung 2.14 auf ganz X erfüllt, denn jeder Punkt aus X liegt in einer der

Umgebungen $U_{T_1}, \ldots, U_{T_n}$, sodass eine der Funktionen $g_{t_1}, \ldots, g_{t_n}$ an diesem Punkt die zweiseitge Ungleichung 2.14 erfüllt. Damit ist das Maximum g an allen Punkten $\xi \in X$ größer als $f(\xi) - \frac{\epsilon}{2}$. Durch Ungleichung 2.13 ist sichergestellt, dass das Maximum den Epsilon-Schlauch nicht nach oben verlässt.

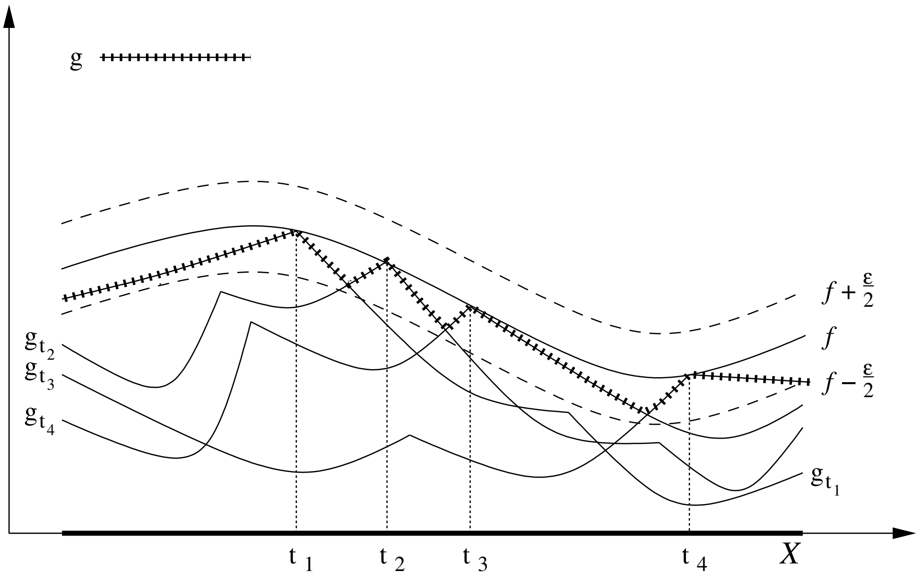

Abbildung 4: Das Maximum g

Wir haben nun gezeigt, dass es zu jedem $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ eine Funktion $g \in \overline{\mathcal{A}}$ gibt mit $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Da die Elemente von $\overline{\mathcal{A}}$ Grenzwerte von Folgen aus $\mathcal{A}$ sind, gibt es auch ein $h \in \mathcal{A}$ mit $\|g - h\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\|f - h\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty + \|g - h\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Funktionen aus $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ lassen sich also beliebig gut durch Funktionen aus $\mathcal{A}$ approximieren. Oder anders formuliert: $\mathcal{A}$ liegt dicht in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. $\square$

Da ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ kompakt und die Menge $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ aller Polynome ein Unterring von $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, der alle konstanten Funktionen enthält und punktetrennend (Man betrachte das Polynom $p(x) = x$) ist, folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß der Satz von Weierstraß.

3 Einige Anwendungen

Nun, wo wir mit dem Satz von Stone-Weierstraß eine mächtige Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß bewiesen haben, wollen wir dessen Anwendungsmöglichkeiten an einigen gängigen Beispielen demonstrieren.

3.1 Approximation komplexwertiger Funktionen

Als erstes wollen wir den Approximationssatz (2.3) auch auf komplexwertige Funktionen ausdehnen. Dazu müssen wir von dem Unterring $A \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ zusätzlich verlangen, dass er mit jeder Funktion f auch ihre komplex Konjugierte $\overline{f}$ enthält. Diese ist dabei definiert durch

$$\overline{f}(x) := \overline{f(x)}.$$

Wir formulieren also folgenden Satz:

Satz 3.1. Komplexer Satz von Stone-Weierstraß
Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{A}$ ein Unterring von $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, der folgende Eigenschaften erfüllt:

1. *$\mathcal{A}$ enthalte alle auf X konstanten Funktionen*
2. *$\mathcal{A}$ ist punktetrennend*
3. *Mit f liegt auch $\overline{f}$ in $\mathcal{A}$.*

Dann gilt $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, d.h. $\mathcal{A}$ liegt dicht in $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Beweis. Aufgrund der zusätzlichen Voraussetzung liegt mit einer Funktion f sowohl ihr Realteil $\operatorname{Re} f$ als auch ihr Imaginärteil $\operatorname{Im} f$ in $\mathcal{A}$, denn diese lassen sich schreiben als

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2i}.$$

Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \subset A$ die Teilmenge von $\mathcal{A}$, die nur die reellwertigen Funktionen aus $\mathcal{A}$ enthält. Da $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reellwertig sind gilt

$$f \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \operatorname{Re} f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \;\wedge\; \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}.$$

Umgekehrt erhält man aus zwei Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ eine Funktion $f_1 + if_2$ aus $\mathcal{A}$.

Diese Feststellung führt zu folgendem Ansatz:
Sei $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, dann sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reellwertige Funktionen und liegen in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Mit dem bereits bewiesenen Satz 2.3 können wir nun $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ durch Elemente f_{Re} und f_{Im} aus $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ approximieren. Die gesuchte Approximation von f in $\mathcal{A}$ ist dann

$f_{Re} + if_{Im}$.

$\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ enthält alle reellen Konstanten einschließlich der Null. Außerdem sind Summe und Produkt reellwertiger Funktionen reellwertig, sodass $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ ein Unterring von $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ ist. Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung punktetrennend ist, gibt es zu beliebigen Punkten $x, y \in X$ eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Bei einer komplexwertigen Funktion heißt das, dass sich entweder die Realteile ($(\operatorname{Re} f)(x) \neq (\operatorname{Re} f)(y)$), die Imaginärteile ($(\operatorname{Im} f)(x) \neq (\operatorname{Im} f)(y)$), oder sogar beide unterscheiden.
Da aber sowohl der Real-, als auch der Imaginärteil von f in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ liegen, gibt es in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ mindestens eine Funktion, die an den Punkten x und y unterschiedliche Werte annimmt. Damit ist auch $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ punktetrennend und erfüllt die Voraussetzungen für den Satz von Weierstraß und Stone.

Sei nun $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ und $\epsilon > 0$. Da $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ dicht in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ liegt finden wir in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ zwei Funktionen f_{Re} und f_{Im} mit

$$\|\operatorname{Re} f - f_{Re}\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|\operatorname{Im} f - f_{Im}\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mit $f_{Re} + if_{Im}$ erhalten wir dann eine Funktion aus $\mathcal{A}$, für die gilt:

$$\|f - (f_{Re} + if_{Im})\| \leq \|\operatorname{Re} f - f_{Re}\| + \|\operatorname{Im} f - f_{Im}\| < \epsilon.$$

$\square$

3.2 Approximation von Funktionen auf Produktmengen

Eine weitere interessante Anwendung wird in [6, S.327] beschrieben. Um den gerade bewiesenen Satz 3.1 auch nutzen zu können, wollen wir den folgenden Satz direkt für komplexwertige Funktionen beweisen, für die er nämlich auch gilt.

Satz 3.2. *Seien X, Y kompakte metrische Räume und $\mathcal{A} \subset C(X \times Y, \mathbb{C})$ die Menge der Funktionen der Form*

$$z(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y) \quad (f_k \in C(X,\mathbb{C}), g_k \in C(Y,\mathbb{C}), k = 1, \ldots, n).$$

Dann gilt $\overline{\mathcal{A}} = C(X \times Y, \mathbb{C})$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus dem Satz von Stone-Weierstraß für komplexwertige Funktionen. Wir müssen allerdings vorher sicherstellen, daß alle Voraussetzungen erfüllt sind.
Sowohl $C(X,\mathbb{C})$ als auch $C(Y,\mathbb{C})$ enthält alle konstanten Funktionen, da diese stetig sind. Damit enthält auch $\mathcal{A}$ alle konstanten Funktionen, da sich diese in $\mathcal{A}$ zum Beispiel schreiben lassen als $z(x,y) = k(x) \cdot 1(y)$, wobei $k \in C(X,\mathbb{C})$ eine beliebige konstante Funktion

und $1 \in C(Y, \mathbb{C})$ die Funktion ist, die konstant den Wert 1 annimmt.
Seien $F, U \in \mathcal{A}$ mit

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{m} g_k(x)h_k(y) \quad \text{und} \quad U(x,y) = \sum_{l=1}^{n} v_l(x)w_l(y).$$

Es gilt

$$F(x,y) + U(x,y) = \sum_{k=1}^{m} g_k(x)h_k(y) + \sum_{l=1}^{n} v_l(x)w_l(y)$$

sowie

$$F(x,y) \cdot U(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \left(g_k(x)h_k(y) \sum_{l=1}^{n} v_l(x)w_l(y) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} g_k(x)h_k(y)v_l(x)w_l(y) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} (g_k \cdot v_l)(x)(h_k \cdot w_l)(y).$$

$\mathcal{A}$ ist also abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und enthält mit allen konstanten Funktionen auch die Nullabbildung. Damit ist $\mathcal{A}$ ein Unterring von $C(X \times Y, \mathbb{C})$.
Da die komplexe Konjugation mit Addition und Multiplikation verträglich ist gilt

$$\overline{z(x,y)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{f_k(x)} \cdot \overline{g_k(y)}.$$

Es ist sowohl $\overline{f_k(x)}$ in $C(X, \mathbb{C})$ als auch $\overline{g_k(y)}$ in $C(Y, \mathbb{C})$. Also liegt mit z auch $\overline{z}$ in $\mathcal{A}$.
$C(X, \mathbb{C})$ sowie $C(Y, \mathbb{C})$ sind punktetrennend, da sie zum Beispiel die identische Abbildung enthalten. Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ zwei verschiedene Punkte und o.B.d.A. $x_1 \neq x_2$. Dann gibt es eine Funktion $f \in C(X, \mathbb{C})$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Mit $z(x,y) = f(x) \cdot 1(y)$ erhalten wir eine Abbildung aus $\mathcal{A}$, die punktetrennend ist. $\square$

3.3 Approximation von periodischen Funktionen durch trigonometrische Polynome

Wir wollen nun zeigen, dass sich 2π-periodische Funktionen durch trigonometrische Polynome approximieren lassen sowie zum Schluss auch noch auf Funktionen mit beliebiger Periode eingehen. Vorher jedoch wollen wir erst einmal schauen, was ein trigonometrisches Polynom ist und wie es sich darstellen lässt.

Definition 3.3. *Eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ der Gestalt*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{3.15}$$

heißt trigonometrisches Polynom vom Grad n.
f heißt reell bzw. komplex, je nachdem ob die a_k, b_k aus $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind.

Mit Hilfe der Euler-Identität lassen sich trigonometrische Polynome auch in eine komplexe Darstellung überführen, mit der sich einfacher rechnen lässt. Dies gilt nicht nur für komplexwertige trigonometrische Polynome, sondern auch für reellwertige.

Lemma 3.4. komplexe Darstellung trigonometrischer Polynome
Sei f ein reelles oder komplexes trigonometrisches Polynom. Dann kann es auch in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad c_k \in \mathbb{C} \tag{3.16}$$

geschrieben werden.

Beweis. Die Koeffizienten der einen Darstellung lassen sich direkt in die Koeffizienten der anderen Darstellung umrechnen und umgekehrt.

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{-ikx} + c_k e^{ikx}$$

Mit Anwendung der Euler-Identität und den Beziehungen $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ folgt

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(\cos(kx) - i\sin(kx)) + c_k(\cos(kx) + i\sin(kx))$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k + c_{-k})\cos(kx) + (c_k - c_{-k}) i \sin(kx)$$

Koeffizientenvergleich mit der Darstellung 3.15 liefert

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = (c_k + c_{-k}), \quad b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{cases} c_k + c_{-k} = a_k \\ c_k - c_{-k} = -ib_k \end{cases}$$

erhalten wir auch die Umrechnung in die andere Richtung:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k). \tag{3.17}$$

□

Sind a_k, b_k reelle Zahlen, so folgt aus 3.17 die Beziehung $c_k = \overline{c_{-k}}$. Das Polynom ist also trotz komplexer Darstellung noch reellwertig. Umgekehrt sind a_k, b_k für $c_k = \overline{c_{-k}}$ reell.
Das folgende Lemma bezieht sich auf Funktionen, die auf der komplexen Einheitslinie

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

definiert sind.

Lemma 3.5. *Sei $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$ die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf der komplexen Einheitslinie und $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$ die Menge der Funktionen der Gestalt*

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C})$.

Beweis. S^1 ist beschränkt und abgeschlossen sowie mit der durch $\mathbb{C}$ induzierten Norm ein kompakter metrischer Raum. Es bleibt zu prüfen, ob $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen des komplexen Satz von Stone-Weierstraß erfüllt.

Seien $f, g \in \mathcal{A}$ mit

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k \text{ und } g(z) = \sum_{l=-m}^{m} d_l z^l, \quad c_k, d_l \in \mathbb{C}; m, n \in \mathbb{N}.$$

Sei o.B.d.A. $m = n$. Dann gilt

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=-n}^{n} (c_k + d_k) z^k$$

sowie

$$f(z) \cdot g(z) = \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k\right)\left(\sum_{l=-n}^{n} d_l z^l\right) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n} c_k d_l z^{k+l}.$$

$\mathcal{A}$ ist demnach abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Da mit $c_k = 0$ für alle k auch die Nullabbildung in $\mathcal{A}$ liegt, ist $\mathcal{A}$ ein Unterring von $C(S^1, \mathbb{C})$.
Für $c_1 = 1$ und $c_k = 0$ für alle $k \neq 1$ enthält $\mathcal{A}$ die Funktion $f(z) = z$ und ist damit punktetrennend. Ebenso enthält $\mathcal{A}$ mit $c_k = 0$ für alle $k \neq 0$ und c_0 beliebig alle Konstanten.
Die komplexe Konjugation ist mit Addition und Multiplikation verträglich, also gilt

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k z^k} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\,\overline{z^k}.$$

Aus $|z|^2 = 1$ für alle $z \in S^1$ und der Beziehung $z\overline{z} = |z|^2$ folgt $\overline{z} = z^{-1}$ und damit

$$\overline{f(z)} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} z^{-k}.$$

Mit f liegt also auch $\overline{f}$ in $\mathcal{A}$. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß. □

Kommen wir nun zu dem eigentlichen Satz, der, in Anlenung an [2, S.64-66], nur noch eine Folgerung aus Lemma 3.5 ist. Der Satz von Stone-Weierstraß wird hier im Beweis nicht mehr verwendet.

Satz 3.6. *Sei $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f(x) = f(x + 2\pi)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ die Menge der stetigen komplexwertigen 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{A} \subset C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Teilmenge der trigonometrischen Polynome. Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Beweis. Jede Funktion $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist bereits durch die Werte auf dem Intervall einer Periodenlänge, also $[0, 2\pi)$, vollständig definiert, da sie dann nur noch periodisch fortgesetzt werden muss. Um die periodische Fortsetzbarkeit zu gewährleisten, betrachten wir die Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, 2\pi]$ mit der zusätzlichen Forderung $f(0) = f(2\pi)$. Sei also $f \in C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ mit $f(0) = f(2\pi)$.

Um das Lemma anwenden zu können, müssen wir f mit einer Funktion auf S^1 identifizieren. Wir betrachten daher die Funktion $s(x) = e^{ix}$, durch die das Intervall $[0, 2\pi)$ bijektiv und unter Erhaltung der Norm auf die Einheitskreislinie abgebildet wird.
Umgekehrt wird S^1 durch s^{-1} auf $[0, 2\pi)$ abgebildet. Jetzt können wir f mit einer Funktion g auf S^1 durch $g := f \circ s^{-1}$ identifizieren, die als Verkettung stetiger Funktionen, ebenfalls stetig ist. Auch können wir f nun als $g \circ s$ schreiben.

Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 3.5 gibt es eine Funktion

$$h(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$

mit

$$|g(x) - h(x)| < \epsilon \quad x \in S^1$$

Für alle $x \in [0, 2\pi)$ liefert s Werte aus S^1, also gilt auch

$$|g(s(x)) - h(s(x))| < \epsilon \quad x \in [0, 2\pi),$$

was nichts anderes ist als

$$|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}| < \epsilon \quad x \in [0, 2\pi).$$

$h(s(x))$ ist also ein komplexes trigonometrisches Polynom, das f approximiert. □

Dieser Satz lässt sich auch auf stetige reellwertige 2π-periodische Funktionen anwenden. Für ein $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und ein $\epsilon > 0$ finden wir mit Lemma 3.5 eine Funktion

$$h(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$

mit

$$|f - h(s(x))| < \epsilon \quad x \in [0, 2\pi).$$

Da h reellwertig sein muss gilt $h(s(x)) = \overline{h(s(x))}$ und damit auch

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\overline{e^{ikx}}.$$

Wegen $\overline{z} = z^{-1}$ können wir

$$\sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\overline{e^{ikx}} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_{-k}} e^{ikx}$$

folgern. Es gilt also die Beziehung $c_k = \overline{c_{-k}}$ womit $h(s(x))$ ein reelles trigonometrisches Polynom ist.

Es ist auch möglich periodische Funktionen einer beliebigen Periode p zu approximieren. Wir bezeichnen dazu mit

$$C_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f(x) = f(x+p)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der p-periodische stetigen Funktionen. Es gilt dann:

Korollar 3.7. *Sei $\mathcal{A} \subset C_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Teilmenge der trigonometrischen p-periodischen Polynome. Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Beweis. Auch hier reicht es ein $f \in \mathcal{C}([0,p], \mathbb{C})$ mit $f(0) = f(p)$ zu betrachten. Wir identifizieren f wieder mit einer Funktion g auf S^1, diesmal mit der Funktion $s(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}x}$. Sei nun $\epsilon > 0$, dann finden wir analog zum Beweis von Satz 3.6 mit Lemma 3.5 ein trigonometrisches Polynom mit

$$|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{2\pi i k x}{p}}| < \epsilon \quad x \in [0, p).$$

Hierbei handelt es sich um ein p-periodisches trigonometrisches Polynom, das f approximiert. $\square$

4 Schluss

Wir haben in dieser Arbeit einen sehr allgemeinen Approximationssatz und einige seiner vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten kennengelernt. Allerdings trifft der Satz von Stone-Weierstraß nur eine Aussage darüber, ob eine Approximation möglich ist oder nicht. Wir haben keinen konstruktiven Beweis gefunden, der uns direkt eine Approximation liefert, können aber in Spezialfällen wie Satz 3.2 oder Satz 3.6 immerhin sagen, welche Form die Approximation hat.

5 Literatur

[1] Josef Naas, Wolfgang Tutschke: *Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik*, Harri Deutsch Verlag (2009), S.50-63

[2] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, B.G. Teubner Stuttgart (1995)

[3] Walter Rudin: *Analysis*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag (2009), S. 185-192 (Deutsche Übersetzung von *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill (1964))

[4] Herbert Amann, Joachim Escher: *Analysis I*, Springer (2002)

[5] Helmut Pruscha, Daniel Rost: *Mathematik für Naturwissenschaftler: Methoden, Anwendungen, Programmcodes*, Springer (2008)

[6] Jürgen Appell, Martin Väth: *Elemente der Funktionalanalysis: Vektorräume, Operatoren und Fixpunktsätze*, Vieweg+Teubner Verlag (2005)

[7] Prof. Eberhard Freitag: *Skriptum Analysis II, Sommersemester 2009*, Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, S.39-42

[8] N. L. Carothers: *Real Analysis*, Cambridge University Press (2000)

6 Selbständigkeitserklärung

Ich versichere an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.
Bielefeld, den

Ulf Biallas