

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	8
2.1	Steine und Pflasterungen	9
2.2	Cluster	10
2.3	Spezies	11
2.4	Inflation	14
2.5	Lokale Ableitbarkeit	16
2.6	Spezielle Bezeichnungen und Formeln	16
3	Die Trapezpflasterungen	17
3.1	Herleitung	17
3.2	Die Inflationsvorschrift	22
3.3	Eigenschaften der Trapezpflasterungen	24
4	Die Dreiecks- und die Rhombenpflasterungen	25
4.1	Die Grenzkanten	25
4.2	Die Diagonalen	27
4.3	Ein Vergleich zwischen RP und den Pflasterungen von Whittaker und Whittaker	28
5	Anmerkungen und Fragen	30
6	Beweise	31

1 Einleitung

Das wissenschaftliche Interesse an Pflasterungen hat im wesentlichen zwei geschichtliche Wurzeln: Das Kunsthandwerk, hier vor allem die Ornamentik und die Architektur, und die Kristallographie. Das Ornament, also ein 'sich wiederholendes Muster zur Verzierung von Gegenständen und Bauwerken' [BROC], entwickelte sich schon in vorgeschichtlicher Zeit. Es diente zur Verzierung von Gegenständen wie Töpferwaren und Textilien wie auch zur kunstvollen Ausgestaltung von Gebäuden. In der Entwicklung der Ornamentik sind zwei gegensätzliche Grundströmungen bemerkbar: die figürliche Ornamentik, die als Elemente der Muster natürliche, zum Teil hochkomplexe Darstellungen von Pflanzen, Tieren oder Menschen verwendet, und die abstrakte Ornamentik, die im Gegensatz dazu sehr einfache Grundelemente benutzt. Ein bekanntes Beispiel für die letztere sind die hellenischen und minoischen Mäander. Besonders hoch entwickelt war diese abstrakte Richtung im arabischen Kulturkreis. Das wird verständlich, wenn man sich vor Augen hält, dass es im Islam ein Tabu gibt, Menschen abzubilden. So mussten die Künstler sich zwangsläufig auf abstrakte Abbildungen beschränken.

Diesen Mustern ist gemeinsam, dass sie, im Gegensatz zu den hochkomplexen figürlichen Ornamenten z.B. des Barocks, aus relativ simplen geometrischen Formen aufgebaut sind und einer einfachen Konstruktionsvorschrift genügen (wobei das entstehende Muster durchaus so komplex sein kann, dass man ihm seinen einfachen Aufbau nicht auf den ersten Blick ansieht). Die Beschäftigung mit der strengen Regelmäßigkeit dieser Muster gab erste Anregungen, sich überhaupt theoretisch mit diesen auseinanderzusetzen. So kann man sich mittels der Konstruktionsregeln dieses Muster flächenfüllend bis ins Unendliche fortgesetzt vorstellen und so zur ersten einfachen Vorstellung von Periodizität gelangen: Würde man dieses Muster auf eine unendliche ebene Fläche übertragen, eine transparente, ebenfalls unendlich große Folie darauflegen und das Muster auf diese übertragen, und könnte man durch Verschieben der Folie das kopierte Muster wieder mit dem ursprünglichen zur Deckung bringen, dann ist es periodisch.

Durch das hohe Niveau dieser Kunst waren schon früh die 17 wesentlich verschiedenen doppelt periodischen Strukturen bekannt, mit denen man die Ebene pflastern kann. Allein in den berühmten maurischen Mosaiken der Alhambra in Granada finden sich bildliche Realisierungen für 13 dieser Strukturen([GRUN]).

Allerdings war den Künstlern dabei vermutlich weder klar, was hier mit 'wesentlich verschieden' gemeint ist, noch, dass es exakt 17 solcher Strukturen gibt. Auf diesen Begriff wird unten näher eingegangen.

Um sich überhaupt die Frage nach der Existenz nichtperiodischer Strukturen, wie sie heute in der Mathematik behandelt werden, zu stellen, mussten zunächst einige theoretische Begriffe zur Beschreibung von Pflasterungen zur Verfügung stehen.

Denn selbstverständlich kann auch eine Bruchsteinmauer (wenn man sie sich bis ins unendliche erweitert vorstellt) nicht periodisch sein nach obiger Beschreibung, da jeder Stein eine andere Form hat. Ein solches Muster ist aber nicht Gegenstand des heutigen Interesses an nichtperiodischen Strukturen. In der heutigen Mathematik werden fast aus-

schliesslich Pflasterungen mit nur endlich vielen verschiedenen Steintypen betrachtet. Ein weiterer wichtiger — und den Forschungsgegenstand fester unbreissender — Begriff geht auf den Mathematiker Reinhardt zurück. Er untersuchte in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts [REIN], wie man die Ebene mit unterschiedlichen Steintypen einer bestimmten Kategorie pflastern kann, also z.B. ausschliesslich mit Siebenecken. Das ist durchaus möglich, aber man benötigt unendlich viele verschiedene Steine, und sie entarten derart, dass entweder das Infimum der Inkreisradien null wird oder das Supremum der Umkreisradien unendlich. Daraus resultierte der Begriff der Normalität: Eine Pflasterung heisst normal, wenn man eine Zahl $\lambda > 0$ finden kann, so dass jeder Stein der Pflasterung, wenn man ihn um λ^{-1} verkleinert, in jeden anderen Stein der Pflasterung hineinpasst. Das war bei Reinhardts Siebeneckpflasterung eben nicht der Fall.

Die andere geschichtliche Wurzel, die das Interesse — zunächst an periodischen — Pflasterungen weckte, war die Kristallographie. Ein Kristall (griechisch: 'krystallos' : Eis) wird heute gerade definiert als ein Festkörper, dessen Bausteine wie Atome, Moleküle oder Ionen räumlich periodisch in einem Kristallgitter geordnet sind, genauer: Das Gitter G wird beschrieben durch die Wahl eines Ursprungs und dreier linear unabhängiger Vektoren a_1, a_2, a_3 . Dann ist $G = \{t | t = ka_1 + la_2 + ma_3 \text{ mit } k, l, m \in \mathbf{Z}\}$ eine Menge von Gittervektoren, a_1, a_2, a_3 spannen die Elementarzelle auf. B sei die Basiseinheit, ein Atom, Molekül oder Ion. Das Kristallgitter ist dann die Menge aller Translate $t(B)$ mit $t \in G$. Ein Kristall ist dann ein Stoff, dessen Aufbau diesem Gitter entspricht. [GERT] Ein Kristallgitter erlaubt, wenn überhaupt, neben Spiegelungen und Gleitspiegelungen nur bestimmte Symmetrien, nämlich Drehungen um $\pi, 2\pi/3, \pi/2$ und $\pi/3$ und Drehspiegelungen um $\pi, \pi/2$ und $\pi/3$. Diese Eigenschaften übertragen sich oft auf die makroskopische Form der Kristalle. So sieht man an Salzkörnern kubische Formen, an Rohdiamanten oktaedrische Formen und an Quarzkristallen Sechseckprismen. Diese haben genau die obigen Symmetrien. Natürlich kommen Kristalle sehr selten in solch reiner Form vor, dass man ihre mikroskopische Struktur aus der makroskopischen ablesen kann, oder die ideale Form — beispielsweise des Oktaeders — tritt verzerrt auf. Trotzdem gelangten die Wissenschaftler besonders im 18. und 19. Jahrhundert durch Schlussfolgerungen aus den makroskopischen Merkmalen der Kristalle — Winkelkonstanz, Richtungsabhängigkeit von manchen Eigenschaften wie Lichtdurchlässigkeit oder Ritzbarkeit — zu Vorstellungen über die Struktur der Kristalle, die weitgehend den heutigen entsprechen. Begriffe wie Elementarzelle und Kristallgitter gehen auf sie zurück.

Schnell sieht man dabei ein, dass nur bestimmte Formen für die Bausteine des Kristallgitters und somit für die äussere Form eines idealen Kristalls in Frage kommen. Während Quader, Oktaeder, Sechseckprismen oder Kubooktaeder nur die erlaubten 2-zähligen, 3-zähligen, 4-zähligen oder 6-zähligen Symmetrien aufweisen und somit als Kristallformen vorkommen können, kann es keine Kristalle in Form eines regelmäßigen Dodekaeders oder Ikosaeders geben, da diese auch 5-zählige Symmetrien besitzen. Deshalb kann ihnen kein Kristallgitter zugeordnet werden; es gibt kein solches.

Diese theoretischen Ergebnisse wurden dann durch die immer tiefere Einsicht in den atomistischen Aufbau der Materie und die neuen experimentellen Möglichkeiten, die damit

einhergingen, bestätigt und vertieft. In diesem Zusammenhang sollte stellvertretend für viele Andere Max von Laue genannt werden. Er entwickelte um 1912 die Theorie für die Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallgittern, die die Grundlage für die experimentelle Untersuchung von Kristallstrukturen darstellt. Die praktische Umsetzung bestätigte auf einen Schlag zwei Theorien: Zum einen die zur Wellennatur der Röntgenstrahlen, zum anderen aber auch die bisherigen Modelle zum Aufbau der Kristalle.

Beim sogenannten Laue-Verfahren erzeugt ein durch eine Kristallplatte hindurchgeschickter Röntgenstrahl auf einer Photoplatte eine regelmäßige Anordnung von Interferenzflecken, aus der man strukturelle Eigenschaften des Kristalls ablesen kann, wie z.B. die Symmetrieeigenschaften des Kristallgitters. Ein solches Beugungsmuster tritt nur bei geordneten Strukturen auf, bei amorphen Materialien erhält man lediglich eine mehr oder weniger gleichmäßige Streuung, zumindest treten keine scharf abgegrenzten Interferenzflecken auf.

Der Brückenschlag zur theoretischen Mathematik vollzog sich erst spät. Ab 1872 erstellte Felix Klein das 'Erlanger Programm', das die Beschreibung der Geometrie durch Gruppen zum Ziel hatte. Sieht man eine Pflasterung als Unterteilung der Ebene in kongruente Gebiete an, so ist diese durch ihre Symmetriegruppe beschreibbar. Die Symmetriegruppe einer Teilmenge M des \mathbf{E}^2 ist die Menge der Isometrien, die M auf sich selbst abbilden. Die Symmetriegruppe der mathematischen Repräsentation eines Kristalls, wie man es sich damals schon vorstellte, sollte drei linear unabhängige Translationen erlauben (bzw. das zweidimensionale Analogon zwei), also dreifach (bzw. doppelt) periodisch sein. Mit diesem mathematischen Begriffsapparat ausgerüstet konnten Schönflies und Fedorov dann 1891 zeigen, dass es für dreifach periodische Strukturen im \mathbf{E}^3 exakt 230 verschiedene Symmetriegruppen gibt, die 'kristallinen Gruppen', und für doppelt periodische Strukturen im \mathbf{E}^2 17 verschiedene, die oben schon erwähnten 'wallpaper groups'.

In seinem Katalog ungelöster Fragen stellte Hilbert davon ausgehend als 18. Problem die beiden Fragen 'ob es auch im n -dimensionalen Euklidischen Raume nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Arten von Bewegungsgruppen mit Fundamentalbereich gibt' und 'ob ferner auch solche Polytope existieren, die nicht als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen auftreten, und mittels derer dennoch durch geeignete Aneinanderlagerung kongruenter Exemplare eine lückenlose Erfüllung des ganzen Raumes möglich ist.' Heute wissen wir, dass die Antwort auf beide Fragen 'ja' ist. Für die erste Frage bewies Bieberbach 1924 (Satz von B.), für die zweite fand Heesch 1935 mehrere Beispiele im zweidimensionalen. Er entdeckte auch einen Stein, der eine spiralenförmige Pflasterung ermöglicht. Eine solche definiert im Gegensatz zu jeder periodischen Pflasterung kein Gitter.

All dies führte Mathematiker irgendwann zu der Frage, ob es wohl einen Satz von Mustersteinen gibt, der nur nichtperiodische Pflasterungen der Ebene zulässt. In einem Aufsatz von 1966 stellte dann R. Berger einen solchen vor. Er benutzte 20426 gleichgroße Quadrate, die sich durch die Färbung ihrer Kanten unterscheiden. Mit der Forderung, dass die Quadrate nur Ecke an Ecke aneinandergelegt werden sollen und dass sich dabei nur gleichfarbige Kanten berühren dürfen, entstehen Pflasterungen der Ebene, die nicht

durch Translationen auf sich selbst abgebildet werden können. Eine solche Steinmenge heisst aperiodisch: Man kann mit ihr die Ebene pflastern, sogar auf vielfältige Weise, aber es ist mit ihr keine periodische Pflasterung möglich. Das 'vielfältig' wurde jüngst in [DO-D] präzisiert. Bei Pflasterungen, die durch eine solche Anlegeregeln entstehen, gilt: Wenn diese Anlegeregeln keine periodische Pflasterung erlaubt, sind 2^{\aleph_0} Kongruenzklassen nichtperiodischer Pflasterungen mit dieser Regel realisierbar. 1967 beschrieb Robinson eine Familie von lediglich sechs Steinen, die ebenfalls nur nichtperiodische Pflasterungen der Ebene zulassen. Diese Steine waren im wesentlichen auch quadratisch, aber anstatt gefärbter Kanten benutzte er eine rein durch die Form bestimmte Realisierung, indem er Zacken und Aussparungen verwendete, die jeweils nach Art eines Puzzles ineinanderpassen oder auch nicht.

Das wohl berühmteste Beispiel nichtperiodischer Pflasterungen sind die *dart and kite* Pflasterungen von Roger Penrose und deren Varianten. Er verwendet nur zwei Steine (Bild xx 1) und fordert, dass schwarze Eckpunkte nur an schwarze gelegt werden dürfen und weisse nur an weisse. Eine von Robinson vorgeschlagene Variante ist, diese Vierecke in Dreiecke (Bild xx 2) zu zerlegen und zusätzlich zu fordern, dass Kanten mit Pfeilen nur so aneinandergelegt werden dürfen, dass diese in dieselbe Richtung zeigen. Oder man benutzt zwei Rhomben, einen mit Innenwinkeln $2\pi/5$ und $3\pi/5$, einen mit Innenwinkeln $\pi/5$ und $4\pi/5$. In allen Fällen erhält man analoge Pflasterungen, d.h. man kann aus der fertigen Rhombenpflasterung durch das Hinzufügen weiterer Kanten die Dreieckspflasterung erhalten und auf ähnliche Weise die *dart and kite* Pflasterung. Eine interessante Besonderheit an den Penrosepflasterungen ist, dass unter ihnen zwei vorkommen, die eine fünfzählige Drehsymmetrie aufweisen; genauer zwei Kongruenzklassen von Pflasterungen. Kongruente Pflasterungen wollen wir als im wesentlichen gleich ansehen, daher werden im Regelfall nicht Pflasterungen, sondern die Kongruenzklassen derselben betrachtet.

In all diesen Beispielen erhält man eine nichtperiodische Pflasterung aus Anlegeregeln. Diese Methode bezeichnet man als *local matching rule*, also als lokale Anlegeregeln.

In dem Beweis, dass diese Pflasterungen, die aus einer *local matching rule* entstehen, tatsächlich nichtperiodisch sind, wird benutzt, dass man mehrere Steine einer solchen Pflasterung zu einem großen *dart* oder *kite* zusammenfassen kann. Es gibt genau eine Möglichkeit, die Steine der gesamten Pflasterung so zu neuen, größeren *darts* und *kites* zusammenzufassen, dass wiederum eine *dart and kite* Pflasterung entsteht, die 'Rekomposition' der ursprünglichen. Man kann mit dieser dasselbe noch einmal machen, wieder auf nur eine eindeutige Weise, und noch einmal, beliebig oft. Wenn die ursprüngliche Pflasterung periodisch war, dann auch all die auf diese Weise entstandenen, mit denselben Translationsvektoren. Andernfalls wäre die Rekomposition nicht eindeutig. Nach endlich vielen Schritten aber erhält man Steine in der Pflasterung, die so groß sind, dass sie sich mit ihrem Translat überschneiden. Diese Pflasterung erlaubt deshalb keine solche Translation, daher erlaubt auch die ursprüngliche diese Translation nicht, sie kann also nicht periodisch sein.

Aufgrund der eben beschriebenen Überlegung bietet sich an, die Umkehrung dieser Methode zur Konstruktion neuer nichtperiodischer Pflasterungen zu benutzen. Diese ist

heute als 'Inflation' bekannt. Dabei gibt man eine Familie von Steinen an, die 'Musterfamilie', und für jeden der Steine aus dieser Menge dessen Zerlegung in Steine derselben Familie, die um einen bestimmten Maßstab η^{-1} verkleinert sind. Die Pflasterung erhält man dann so: Man wählt einen Stein der Musterfamilie. Dieser wird der Regel gemäß zerlegt. Das erhaltene Gebilde wird um den Maßstab η vergrößert. Jeder der nun vorhandenen Steine wird wieder der Regel folgend zerlegt, usw. Kann man diesen Prozess ad infinitum fortsetzen, entsteht eine Pflasterung der Ebene. Viele Beispiele für nichtperiodische Pflasterungen erhält man auf diese Weise. Manche, wie die Penrosepflasterung, oder auch die Pflasterung mit den Robinsondreiecken und die Ammannpflasterung mit dem Steinset A5 kann man sowohl über eine local matching rule als auch durch Inflation erhalten. Ebenso können mit beiden Methoden selbstverständlich auch periodische Pflasterungen erzeugt werden. Diese haben dann nach der vorherigen Überlegung natürlich keine eindeutige Rekombination.

Die oben genannten Beispiele sind für die vorliegende Arbeit wichtiges Anschauungsmaterial und werden im weiteren immer wieder herangezogen. Da nun jeder der genannten Wissenschaftler mehr als eine Familie nichtperiodischer Pflasterungen entwickelte, werden die erwähnten im folgenden der Klarheit wegen so bezeichnet: Die Pflasterungen aus den Penrosenhomben als Penrosepflasterungen, die aus den Robinsondreiecken als Robinsonpflasterungen und die aus Ammanns Steinset A5 als Ammannpflasterungen. In [Ni-D] findet sich neben den dort hauptsächlich behandelten Pflasterungen auf Seite 235 unter Punkt 6.3 eine weitere, die für diesen Text wichtig ist. Sie kann ebenfalls sowohl über eine local matching rule als auch durch eine Inflation erhalten werden. Diese werde ich nach ihrem Entstehungsjahr als 'Danzer 92' bezeichnen. Sind andere Pflasterungen aus [Ni-D] gemeint, wird das ausdrücklich erwähnt.

Es gibt noch eine weitere bekannte Methode zur Gewinnung nichtperiodischer Pflasterungen: die Streifenprojektionsmethode oder besser die Streifenprojektionsmethoden, da es mehrere Varianten derselben gibt. Dabei wird von einem kristallographischen Gitter in einem höherdimensionalen euklidischen Vektorraum X ausgegangen. Zusätzlich wählt man in diesem eine Projektionsebene P (auf der dann die Pflasterung entsteht, also für gewöhnlich eine Menge isomorph zu \mathbf{E}^2 oder \mathbf{E}^3) und eine dazu orthogonale Teilmenge $S \subset X$. Alle Gitterpunkte, die in $S \times P$ — dem 'Streifen' — liegen, werden dann senkrecht auf P projiziert. Aus dieser Punktmenge in P kann man dann eine Pflasterung erhalten, die bei geeigneter Wahl der Ausgangsgrößen nichtperiodisch ist. Auf diesem Wege kann man auch die schon bekannte Penrosepflasterung erhalten, ebenso die Ammannpflasterung [DEB],[W-W]. Im allgemeinen gilt aber, dass nicht jede Pflasterung, die mit einer dieser Methoden gewonnen wurde, auch aus den anderen gewonnen werden kann.

Dieses mathematische Teilgebiet erfuhr bald darauf auch Interesse aus anderen wissenschaftlichen Disziplinen. Da für Kristallgitter wie erwähnt nur ein-, zwei-, drei-, vier- oder sechsfache Symmetrien infrage kommen, nahm man lange Zeit an, dass neben kristallinen Zuständen der festen Materie sonst nur amorphe vorkommen können, wie in Gläsern oder im Teer. Hochgeordnete Strukturen, ähnlich denen des Kristalls, aber mit anderen Symmetrien, hielt man allgemein für unmöglich. Aber 1984 entdeckten Shechtman,

Blech, Gratias und Cahn eine Aluminium–Mangan–Verbindung, deren Interferenzmuster eine deutliche fünfzählige Symmetrie aufwies. Dass überhaupt ein Beugungsmuster vorlag, liess auf eine gesetzmäßige innere Ordnung schliessen, und dass eine fünfzählige Drehsymmetrie vorlag, schloss aus, dass es sich hier um ein Kristall, wie man es bisher kannte, handeln konnte. Diese Symmetrieeigenschaft verbietet einen periodischen Aufbau, das entdeckte Material hatte also eine nichtperiodische, aber dennoch geordnete Struktur. Das erste 'Quasikristall' war entdeckt.

Nach dieser Entdeckung begann eine intensive Suche nach anderen Materialien, die ähnliche Eigenschaften besitzen. Man fand welche mit fünf-, acht-, zehn- und zwölf-fachen Symmetrien; weiterhin fand man neben Stoffen, deren Teilchenmuster keinerlei Translation erlaubt, Stoffe, die in einer oder zwei Raumrichtung(en) periodisch sind und in den anderen nicht. Der Kristallograph Mackay konnte schon 1982 theoretisch zeigen, dass das Beugungsbild einer Penrosepflasterung ebenfalls die scharf abgegrenzten Interferenzflecken ('Bragg-peaks') aufweist, die für Kristalle und Quasikristalle typisch sind. Ein möglicher Schluss, den man daraus ziehen kann, ist, dass diese quasikristallinen Stoffe ähnlich angeordnet sind wie eine nichtperiodische Pflasterung analog zur Penrosepflasterung.

In diesem jungen Forschungsgebiet sind aber naturgemäß noch viele Fragen offen: Ob die quasikristallinen Strukturen tatsächlich nach solch strengen Gesetzen gebildet sind wie die mathematischen, oder ob sie eventuell anderen Regeln gehorchen, ist noch nicht gesichert. Bisher ist es noch nicht gelungen, zu einem Quasikristall die mathematische Beschreibung der Teilchenanordnung zu bestimmen. Eines der vielen Probleme betrifft die 'Dekoration': Eine nichtperiodische Pflasterung im mathematischen Sinne besteht aus Steinen, während die Feststoffe aus Atomen bestehen. Die Beschreibung eines Quasikristalls durch eine Pflasterung müsste beinhalten, an welcher Stelle eines jeden Steins der Pflasterung ein Baustein (Atom, Molekül, Ion) des Quasikristalls liegt. Dabei sollte es eine einheitliche Dekoration der Steine durch diese Bausteine geben. Nun ist aber nicht von vornherein klar, ob ein Stein mit einem, zwei oder tausenden von Atomen dekoriert werden muss.

Ein anderes Problem ist die strenge Definition eines Quasikristalls. Nach heutigem Stand ist ein Quasikristall [Def]. Darunter fallen längst nicht alle nichtkristalline, nicht amorphe Stoffe, die oben beschrieben wurden. Zum anderen resultiert aus einer nichtperiodischen Pflasterung nicht unbedingt ein diskretes Beugungsmuster. Demnach sind quasikristalline Stoffe denkbar, die nach einer — vielleicht schon bekannten — Regel aufgebaut sind, die aber wegen des nichtvorhandenen diskreten Beugungsmusters übersehen werden.

Bisher sind etwa 200 Quasikristalle im weiteren Sinne bekannt, die Größenordnung der hergestellten Exemplare liegt dank verbesserter Herstellungsmethoden im Bereich von mehreren Gramm [Vortrag Dr Kreiner 96 UniDo].

Parallel dazu wurden auf theoretischem Wege weitere nichtperiodische Pflasterungen entdeckt, welche hauptsächlich aus den oben beschriebenen Methoden gewonnen wurden. Darunter finden sich auch neben vielen zweidimensionalen Beispielen ein- und dreidimen-

sionale Pflasterungen. Die dreidimensionalen sind für Kristallographen natürlich besonders interessant. [Kramer–Neri,Katz–Duneau, A,B,C,K , Socolar]

Viele heute bekannte Beispiele von Musterfamilien nichtperiodischer Pflasterungen, wie die Penrose- und Robinsonpflasterungen, die Ammannpflasterungen, Danzer 92, die Whittakerpflasterungen und die Pflasterungen aus [NI-D] haben als Elemente Dreiecke oder Rhomben mit Winkeln $k\pi/n$, $k, n \in \mathbf{N}$. Bis auf die beiden letztgenannten ist hierbei n eine feste Zahl: Bei Penrose bzw. Robinson fünf, bei Ammann acht, bei Danzer 92 sieben. In der vorliegenden Arbeit werden Spezies von Pflasterungen beschrieben, deren Musterfamilien ebenfalls aus Dreiecken oder wahlweise Rhomben mit diesen Winkeln bestehen, wobei n eine beliebige ungerade Zahl sein darf. Dies vollzieht sich in drei Schritten: Zunächst wird ein Ansatz vorgestellt, Dreieckspflasterungen mit den genannten Eigenschaften aus einer Inflationsvorschrift zu erhalten und gezeigt, dass dieser so nicht funktioniert. Dann wird aus diesem Ansatz eine Inflation für eine andere Musterfamilie, die aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken besteht, abgeleitet. Die so entstehenden Pflasterungen — die hier als Trapezpflasterungen bezeichnet werden — werden beschrieben und auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Aus ihnen werden dann wiederum die Dreiecks- und Rhombenpflasterungen abgeleitet. Diese werden also nicht direkt auf einem der oben beschriebenen Wege erhalten (local matching rule, Inflation oder Streifenprojektionsmethode), sondern mit dem Prinzip der lokalen Ableitbarkeit aus Pflasterungen gewonnen, die ihrerseits durch eine Inflationsvorschrift erhalten werden.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Definitionen zur Behandlung nichtperiodischer Pflasterungen aufgeführt. Teilweise sind diese weitreichender als für diese Arbeit notwendig, da hier nur zweidimensionale Pflasterungen behandelt werden, die zudem Eigenschaften aufweisen, die vieles vereinfachen. Da aber in diesem recht jungen Teil der Geometrie die Bezeichnungen noch recht neu und bisweilen Veränderungen unterworfen sind, führe ich hier die allgemeinen Definitionen an. Im weiteren gelten folgende Bezeichnungen: \mathbf{E}^d ist der Euklidische Vektorraum, also der d -dimensionale reelle Vektorraum, versehen mit der Norm $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$. d alleine bezeichnet immer die Dimension. \mathbf{B}^d steht für die abgeschlossene Einheitskugel mit dem Ursprung als Zentrum. Für eine Menge $A \subseteq \mathbf{E}^d$ bezeichnet $\text{int}(A)$ das Innere, $\text{cl}(A)$ den Abschluss und $\text{bd}(A)$ den Rand von A . $\text{tr}(A)$ bezeichnet den 'Träger' von A , also alle Punkte $\in \mathbf{E}^d$, die in A liegen, falls A eine Punktmenge ist, bzw. alle Punkte, die in den Elementen von A liegen, falls A eine Menge von Punktmenge ist. $\text{Iso}(\mathbf{E}^d)$ ist die Gruppe der Isometrien von \mathbf{E}^d . Mit \tilde{A} wird die Kongruenzklasse von A bezeichnet. \aleph_0 steht für die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen.

2.1 Steine und Pflasterungen

Definition 2.1.1 Eine nichtleere Menge $T \subset \mathbf{E}^d$ kann Stein sein $:\Leftrightarrow$

- T ist kompakt,
- $cl(int(T))=T$ und
- $int(T)$ ist zusammenhängend.

Definition 2.1.2 Eine Pflasterung ist eine Menge $\mathcal{P} := \{T_\nu | \nu \in \mathbf{N}\}$ mit:

- jedes T_ν ist ein Stein,
- $\bigcup_{\nu \in \mathbf{N}} T_\nu = \mathbf{E}^d$ und
- $\mu \neq \nu \Rightarrow int(T_\mu \cap T_\nu) = \emptyset$

Definition 2.1.3 x heisst Eckpunkt einer Pflasterung $:\Leftrightarrow$

- x liegt in mindestens $d+1$ Steinen und
- x ist isolierter Punkt des Durchschnitts dieser beteiligten Steine.

Definition 2.1.4 Der zum Eckpunkt x gehörende Eckstern ist die Menge der x enthaltenden Steine verwurzelt in x .

Der Zusatz 'verwurzelt in x ' ist nötig, weil zwei verschiedene Eckpunkte der Pflasterung zu denselben Steinen gehören können. Da man deren Ecksterne aber unterscheiden möchte, charakterisiert man sie zusätzlich durch die Angabe des Eckpunkts.

Der Begriff 'Pflasterung' ist ziemlich weit gefasst. Nach der vorliegenden Definition fallen darunter z.B. Pflasterungen mit unendlich vielen nicht kongruenten Steinen, mit beliebig kleinen Steinen oder solche, deren Eckpunkte keine diskrete Menge bilden. Diese weisen im allgemeinen keine besonders interessanten Eigenschaften auf. Meist ist man nur an bestimmten Pflasterungen interessiert, z.B. an solchen mit nur endlich vielen Steintypen. Zur weiteren Charakterisierung von Pflasterungen dienen die folgenden Begriffe.

Definition 2.1.5 Gegeben sei eine endliche Menge von Steinen $\mathcal{F} := \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$.

Eine Pflasterung \mathcal{P} heisst \mathcal{F} -Pflasterung $:\Leftrightarrow$ Jeder Stein von \mathcal{P} ist kongruent zu einem Element aus \mathcal{F} . \mathcal{F} heisst Musterfamilie, die $T_i \in \mathcal{F}$ heissen Mustersteine.

Mittels einer Musterfamilie kann man eine \mathcal{F} -Pflasterung auch folgendermaßen charakterisieren: Sei $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_n\}$. Jeder Stein der Pflasterung hat dann einen zugehörigen Musterstein und lässt sich darstellen als $\varphi_\mu(T_{k_\mu})$ mit $\varphi_\mu \in Iso(\mathbf{E}^d)$, $T_{k_\mu} \in \mathcal{F}$. Anschaulich denken wir uns also die Mustersteine mit festem Platz in \mathbf{E}^d gegeben und die Steine der Pflasterung sind dann durch die Angabe des Mustersteins und der Abbildung desselben charakterisiert.

Statt zu schreiben: 'Ein Stein mit zugehörigem Musterstein A ' schreiben wir 'Ein Stein vom Typ A ' oder, wenn der Zusammenhang klar ist, 'ein A '. Letzteres ist praktisch, da in dieser Arbeit oft Argumente von folgender Form benutzt werden: 'Liegt an einem Stein vom Typ H an der längsten Seite ein Stein vom Typ A , so liegt an der kürzeren Seite ein Stein vom Typ H oder vom Typ L .' Das ist in der Kurzform verständlicher.

Definition 2.1.6 Eine Pflasterung \mathcal{P} heisst normal $:\Leftrightarrow$ Es existiert $\lambda > 0$, so dass für alle Steine $A, B \in \mathcal{P}$ eine Translation φ existiert mit: $\varphi(\lambda A) \subseteq B$.

Definition 2.1.7 Eine Pflasterung \mathcal{P} heisst lokal endlich $:\Leftrightarrow$ Jeder Punkt $x \in \mathbf{E}^d$ besitzt eine Umgebung, die nur endlich viele Steine trifft.

Definition 2.1.8 Eine Pflasterung \mathcal{P} heisst gutartig $:\Leftrightarrow$

- \mathcal{P} ist lokal endlich und
- Die Eckpunkte von \mathcal{P} bilden eine diskrete Punktmenge, d.h. jeder Punkt $x \in \mathbf{E}^d$ besitzt eine Umgebung, die höchstens einen Eckpunkt von \mathcal{P} enthält.

Dass zwischen lokal endlich und gutartig ein Unterschied besteht, zeigt folgendes Beispiel (Bild xx). Es zeigt vier Steine. Die oberen beiden sind Quader, die unteren sind entstanden durch die Zerlegung eines Quaders entlang einer Zackenlinie, wobei die Zacken zum Punkt x hin immer kleiner werden und immer kürzere Abstände haben. Legt man sie in der im Bild gezeigten Weise aneinander, so liegt an jeder Stelle, wo die gerade Trennlinie der oberen beiden Steine die gezackte Trennlinie der unteren beiden Steine kreuzt, ein Punkt, in dem sich alle vier Steine berühren. In einer dreidimensionalen Pflasterung wäre dies folglich ein Eckpunkt nach obiger Definition. In jeder Umgebung von x liegen dann unendlich viele Eckpunkte der Pflasterung, aber — wenn man bei x einfach ein weiteres Quader hinlegt — es treffen sich hier nur endlich viele Steine. Eine Pflasterung, die eine solche Konstellation beinhaltet, ist also lokal endlich, aber nicht gutartig.

2.2 Cluster

Zur Untersuchung der Eigenschaften einer Pflasterung definiert man Strukturen, die endlich viele Steine umfassen. Diese dienen als Theoriebausteine zwischen Stein und Pflasterung.

Definition 2.2.1 Ein Cluster ist eine endliche Menge von Steinen $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ mit

- $\text{int}(T_\mu \cap T_\nu) = \emptyset$ für alle $0 < \mu < \nu \leq n$ ('ohne Überlappung') und
- $\text{int}(\bigcup_{\nu=1}^n T_\nu)$ ist zusammenhängend.

Neben Clustern sind auch 'patches' üblich. Diese werden genauso definiert, es wird aber zusätzlich einfacher Zusammenhang gefordert. Van Ophuyzen fand jedoch ein Beispiel für eine periodische Pflasterung im E^3 , in der keine patches möglich sind und führte deshalb den Begriff des Clusters ein.

Definition 2.2.2 Der ϱ -Cluster bei x der Pflasterung $\mathcal{P} := \{T_\nu | \nu \in \mathbf{N}\}$, $\varrho > 0$, ist definiert durch: $Cl(\mathcal{P}, x, \varrho) := \{T_\nu | \text{int}(T_\nu) \cap (x + \varrho \mathbf{B}^d) \neq \emptyset\}$

Gemäß diesen Definitionen gelten offenbar folgende Feststellungen: Jeder Stein ist ein Cluster. Die leere Menge ist ebenfalls ein Cluster (aber kein Stein). Ein ϱ -Cluster ist ein Cluster. Der Durchschnitt zweier Cluster ist ebenfalls ein Cluster, wenn das Innere der Vereinigung der Steine, die im Durchschnitt liegen, zusammenhängend ist. Ebenso ist die Vereinigung zweier Cluster Cl_1, Cl_2 ein Cluster, wenn $\text{int}(tr(Cl_1) \cap tr(Cl_2))$ wieder zusammenhängend ist. Das ist natürlich der Fall, wenn beispielsweise $Cl_1 \cap Cl_2 \neq \emptyset$ ist, da dann beide Cluster mindestens einen gemeinsamen Stein haben.

Definition 2.2.3 \mathcal{F} sei eine Musterfamilie. Ein Cluster heisst \mathcal{F} -Cluster : \Leftrightarrow Jeder Stein des Clusters ist kongruent zu einem Element von \mathcal{F} .

Zu gegebenem \mathcal{F} bezeichnen wir die Menge aller Kongruenzklassen von \mathcal{F} -Clustern als $\widetilde{\text{Cl}}(\mathcal{F})$.

Ist \mathbf{P} eine Menge von \mathcal{F} -Pflasterungen, dann sei

$$\widetilde{\text{Cl}}(\mathbf{P}) := \{\widetilde{Cl} \mid Cl \text{ Cluster, } \exists \mathcal{P} \in \mathbf{P}, \varphi \in \text{Iso}(\mathbf{E}^d) : \varphi(Cl) \subset \mathcal{P}\}$$

Während $\widetilde{\text{Cl}}(\mathcal{F})$ also die Kongruenzklassen aller Cluster enthält, die sich mit Steinen bilden lassen, die kongruent den Steinen aus \mathcal{F} sind, umfasst $\widetilde{\text{Cl}}(\mathbf{P})$ die Kongruenzklassen aller Cluster, die in den Pflasterungen aus \mathbf{P} vorkommen. Daher gilt immer: $\widetilde{\text{Cl}}(\mathbf{P}) \subseteq \widetilde{\text{Cl}}(\mathcal{F})$. Mittels des Begriffs Cluster kann man nun weitere Eigenschaften von Pflasterungen oder auch von Mengen von Pflasterungen definieren.

Definition 2.2.4 Eine Pflasterung heisst lokal endlich erzeugt : \Leftrightarrow

$$\forall \varrho > 0 : \text{card}(\widetilde{K}) < \aleph_0, K := \{Cl(\mathcal{P}, x, \varrho) \mid x \in \mathbf{E}^d\}$$

In Worten: Für jedes ϱ soll die Anzahl der Kongruenzklassen aller ϱ -Cluster endlich sein.

Eine Menge \mathbf{P} von Pflasterungen heisst von lokal endlicher Komplexität : \Leftrightarrow

$$\forall \varrho > 0 : \text{card}(\widetilde{K}) < \aleph_0, K := \{Cl(\mathcal{P}, x, \varrho) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}, x \in \mathbf{E}^d\}$$

2.3 Spezies

Beim Nachdenken über Pflasterungen drängt sich einem die Frage auf: Wenn ich eine Pflasterung habe und sie verschiebe oder drehe, erhalte ich dann eine andere Pflasterung? Es bietet sich an, Mengen von Pflasterungen zu definieren, in denen zu einer gegebenen Pflasterung auch all ihre Translate, Drehungen und Spiegelungen liegen. Das entspricht dem Übergang zur Kongruenzklasse einer Pflasterung. Daneben ist es auch wünschenswert, Mengen von Pflasterungen mit gleichen Merkmalen zusammenzufassen, z.B. verschiedene Pflasterungen mit denselben Mustersteinen oder Pflasterungen, denen dieselbe Konstruktion zugrunde liegt. Das führt zum Begriff der Spezies. Eine Spezies soll also zu jeder Pflasterung auch alle zu dieser kongruenten Pflasterungen enthalten. Auf der anderen Seite soll der Begriff Spezies auch nicht zu weit gefasst sein. Daher werden wir zusätzlich, der Definition in [DO-D] folgend, lokal endliche Komplexität fordern.

Definition 2.3.1 Eine Menge \mathbf{S} von Pflasterungen heisst Spezies : \Leftrightarrow

$$- \mathcal{P} \in \mathbf{S} \Rightarrow \varphi(\mathcal{P}) \in \mathbf{S} \text{ für alle } \varphi \in \text{Iso}(\mathbf{E}^d) \quad \text{und}$$

– \mathbf{S} ist von lokal endlicher Komplexität.

Ist \mathcal{F} eine Musterfamilie, so heisst eine Spezies \mathbf{S} von Pflasterungen \mathcal{F} -Spezies, wenn alle $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$ \mathcal{F} -Pflasterungen sind.

Ist also \mathbf{S} eine Spezies von \mathcal{F} -Pflasterungen, so ist $\widetilde{\mathbf{Cl}}(\mathbf{S}) := \{\widetilde{Cl} \mid Cl \text{ Cluster, } \exists \mathcal{P} \in \mathbf{S} : Cl \subset \mathcal{P}\}$. Im allgemeinen ist $\widetilde{\mathbf{Cl}}(\mathbf{S})$ sehr viel kleiner als $\widetilde{\mathbf{Cl}}(\mathcal{F})$. Besteht \mathcal{F} z.B. nur aus dem regelmäßigen Fünfeck und ist \mathbf{S} die Spezies aller \mathcal{F} -Pflasterungen, so ist \mathbf{S} leer, denn bekannterweise kann man die Ebene nicht mit regelmäßigen Fünfecken pflastern. Also ist auch $\widetilde{\mathbf{Cl}}(\mathbf{S})$ leer. Aber da man aus regelmäßigen Fünfecken unendlich viele zusammenhängende Figuren (z.B. beliebig lange Ketten) aufbauen kann, hat $\widetilde{\mathbf{Cl}}(\mathcal{F})$ unendlich viele Elemente.

Eine sehr leicht zu überprüfende Eigenschaft von Pflasterungen ist, dass die geometrischen Eckpunkte der Steine auch die Eckpunkte der Pflasterung bilden. Daraus folgt, wie wir gleich sehen werden, sofort die Gutartigkeit und die lokal endliche Komplexität von \mathbf{S} , wenn alle ihre Elemente vtv sind. Daher ist die Eigenschaft 'Ecke auf Ecke' (kurz: 'vtv' für vertex to vertex) wünschenswert. Es gibt nun aber auch Beispiele von nichtperiodischen Pflasterungen, die diese Eigenschaft nicht aufweisen, z.B. die Pflasterung von Ammann mit dem Steinset A2 (Bild xx). Wenn man jedoch einige Punkte auf dem Rand der Mustersteine zusätzlich als Eckpunkte deklariert, kann man auch diesen Pflasterungen die Eigenschaft 'vtv' zuschreiben und erhält die gleichen schönen Folgerungen. Deshalb gebe ich hier die allgemeinere Definition an, obwohl für die Pflasterungen im vorliegenden Text auch die speziellere ausreichen würde.

Definition 2.3.2 Gegeben sei eine \mathcal{F} -Pflasterung $\mathcal{P} = \{\varphi_\mu(T_{k_\mu}) \mid \mu \in \mathbf{N}\}$. Auf dem Rand eines jeden Mustersteins T_k seien zwei endliche Punktmenge N_k, M_k mit $N_k \subset M_k$ ausgezeichnet.

Sei $N := \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \varphi(N_{k_\mu})$ und $M := \bigcup_{\mu=1}^{\infty} \varphi(M_{k_\mu})$

Die Elemente von N bzw N_k heissen notwendige Eckpunkte und die von M bzw M_k mögliche Eckpunkte von \mathcal{P} .

$x \in M$ heisst fiktiver Eckpunkt der Pflasterung $:\Leftrightarrow$

Für alle μ mit $x \in \varphi_\mu(T_{k_\mu})$ gilt : $x \in \varphi_\mu(M_{k_\mu})$

Ein fiktiver Eckpunkt ist also dort, wo soviel Punkte aus M in der Pflasterung aufeinanderliegen, wie sich dort Steine treffen. Das kann bei gewöhnlichen Eckpunkten der Fall sein, aber auch an Stellen, wo sich nur zwei Steine berühren. Diese Definition ermöglicht nun die allgemeinere Formulierung von vtv. Für eine vtv-Pflasterung im strengeren Sinne (die geometrischen Eckpunkte der Steine bilden die Eckpunkte der Pflasterung) setzt man einfach $M = N =$ Menge der Eckpunkte der Pflasterung. Andernfalls, wie bei Bild xx, müssen N und M geschickt gewählt werden.

Definition 2.3.3 Eine \mathcal{F} -Pflasterung \mathcal{P} heisst vtv, wenn man für alle Mustersteine N_k und M_k so wählen kann, dass gilt:

- $x \in N \Rightarrow x$ ist fiktiver Eckpunkt,
- Für jeden Eckpunkt (wie in Def.1.1.3) x gilt: $x \in \varphi_\mu(T_{k_\mu}) \Rightarrow x \in \varphi_\mu(M_{k_\mu})$ und
- Jeder nichtleere Schnitt von Steinen enthält mindestens einen Eckpunkt.

Aufgrund des zweiten Punktes ist jeder Eckpunkt auch fiktiver Eckpunkt.

Hinweis 2.3.1 Jede \mathcal{F} -Pflasterung ist normal und lokal endlich.

Eine Menge von \mathcal{F} -Pflasterungen, die alle vtv sind, ist gutartig und von lokal endlicher Komplexität.

Bezeichnung: Bildet man nun zu gegebenem \mathcal{F} die Menge aller \mathcal{F} -Pflasterungen, die vtv sind, so ist diese nach diesem Hinweis von lokal endlicher Komplexität. Also erhält man eine Spezies. Dafür schreiben wir: $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{vtv}) := \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist } \mathcal{F}\text{-Pflasterung und vtv}\}$

Definition 2.3.4 Eine Pflasterung \mathcal{P} heisst k -periodisch $:\Leftrightarrow$

Es gibt k linear unabhängige Vektoren $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{E}^d : \mathcal{P} = \mathcal{P} + t_i, 1 \leq i \leq k$.

Gilt hier $k=d$, so heisst \mathcal{P} kristallographisch.

\mathcal{P} heisst nichtperiodisch $:\Leftrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P} + t \Rightarrow t = 0$.

Eine Spezies \mathbf{S} heisst dementsprechend aperiodisch, wenn $\mathbf{S} \neq \emptyset$ nur nichtperiodische Pflasterungen enthält.

Kristallographische Pflasterungen haben die Eigenschaft, dass man eine beliebige Teilmenge derselben in jedem Ausschnitt der Pflasterung wiederfindet, sofern er nur groß genug ist. Zur weiteren Betrachtung von nichtperiodischen Pflasterungen kann man sich die Frage stellen, ob es auch solche gibt, die ebenfalls diese Eigenschaft aufweisen, oder man kann bezüglich zweier gegebener nichtperiodischer \mathcal{F} -Pflasterungen untersuchen, ob jeder Cluster aus der einen auch in der anderen vorkommt. Dies beschreiben die Begriffe 'repetitiv' und 'lokal isometrisch'.

Definition 2.3.5 Eine Spezies \mathbf{S} heisst repetitiv $:\Leftrightarrow$

Zu jedem Cluster A aus $\mathbf{Cl}(\mathbf{S})$ existiert ein Radius ρ , so dass gilt: $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$ und x Eckpunkt von $\mathcal{P} \Rightarrow (x + \rho \mathbf{B}^d) \cap \mathcal{P}$ enthält einen zu A kongruenten Cluster.

Definition 2.3.6 Zwei Pflasterungen \mathcal{P}, \mathcal{Q} heissen lokal isometrisch $:\Leftrightarrow$

$\widetilde{\mathbf{Cl}}(\mathcal{P}) = \widetilde{\mathbf{Cl}}(\mathcal{Q})$.

Im Zusammenhang mit Pflasterungen und Spezies führt die lokale Isometrie zu folgenden Begriffen:

Definition 2.3.7 Die lokale Isometrieklasse (kurz: ℓI -Klasse $\ell I(\mathcal{P})$) der Pflasterung \mathcal{P} ist definiert als:

$\ell I(\mathcal{P}) := \{\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \text{ ist lokal isometrisch zu } \mathcal{P}\}$

Eine Spezies heisst homogen $:\Leftrightarrow$

Alle Mitglieder dieser Spezies liegen in derselben ℓI -Klasse.

Eine Spezies \mathbf{S} heisst vollständig $:\Leftrightarrow$

$$(\mathcal{P} \in \mathbf{S} \wedge \mathcal{Q} \in \ell I(\mathcal{P})) \Rightarrow \mathcal{Q} \in \mathbf{S}$$

In Worten: \mathbf{S} besteht aus vollen ℓI -Klassen.

Ist also eine Spezies homogen und vollständig, so gilt: $\mathbf{S} = \ell I(\mathcal{P})$ für ein beliebiges $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$. Diese beiden Begriffe übertragen sich aber auch direkt auf allgemeinere Mengen von Pflasterungen.

2.4 Inflation

Die anschaulichste Art, eine nichtperiodische Pflasterung zu konstruieren, ist die Angabe einer Substitution: Zu gegebener Musterfamilie \mathcal{F} und einem Vergrößerungsfaktor η gibt man an, wie man jeden um η vergrößerten Musterstein aus den gegebenen Mustersteinen zusammensetzt. (Hierbei steht η für den Maßstab, das Volumen jedes Mustersteins ist also in der Ebene um η^2 vergrößert.) Dann kann man von einem beliebigen Musterstein ausgehen, ihn um η vergrößern, gemäß der Substitution zerlegen, die erhaltene Figur wieder vergrößern, ihre Steine wieder zerlegen usw. Taucht nach einer gewissen Anzahl von Schritten im Innern der Figur der ursprüngliche Stein wieder auf, verschiebt man die gesamte Figur so, dass dieser auf den Platz des ersten Steins zu liegen kommt. Dann kann man diesen Prozess ad infinitum fortsetzen und erhält eine \mathcal{F} -Pflasterung. Formal beschreibt man eine solche Substitution so:

Definition 2.4.1 Gegeben seien eine Musterfamilie $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_k\}$, ein Inflationsfaktor $\eta > 1$ und zu jedem κ ($\kappa = 1, 2, \dots, k$) ein \mathcal{F} -Cluster $\text{infl}(T_\kappa) := Cl_\kappa =$

$$\{\varphi_{\kappa,\mu}(T_{i_{\kappa,\mu}}) \mid \mu = 1, \dots, m_\kappa\} \text{ mit dem Träger } \text{tr}(Cl_\kappa) = \bigcup_{\mu=1}^{m_\kappa} \varphi_{\kappa,\mu}(T_{i_{\kappa,\mu}}) = \eta T_\kappa \quad (\varphi_{\kappa,\mu} \in \text{Iso})$$

Dann sei $\text{infl} : \mathbf{Cl}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{Cl}(\mathcal{F})$

definiert durch : Ist ein Cluster $Cl = \bigcup_{\nu=1}^n \psi_\nu(T_{\lambda_\nu})$; $\psi_\nu \in \text{Iso}$,

$$\text{so ist } \text{infl}(Cl) = \text{infl}^1(Cl) := \bigcup_{\nu=1}^n \eta \psi_\nu(\eta^{-1} Cl_{\lambda_\nu})$$

Analog definiert man infl als Operator für Pflasterungen: Sei $\mathbf{P}(\mathcal{F})$ die Menge aller \mathcal{F} -Pflasterungen.

$\text{infl} : \mathbf{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F})$:

Ist eine Pflasterung $\mathcal{P} \in \mathbf{P}(\mathcal{F})$ gegeben durch $\mathcal{P} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(T_{\lambda_\nu})$; $\psi_\nu \in \text{Iso}$,

$$\text{so ist } \text{infl}(\mathcal{P}) = \text{infl}^1(\mathcal{P}) := \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \eta \psi_\nu(\eta^{-1} Cl_{\lambda_\nu})$$

In Worten: Jedem Musterstein wird eine Substitution in Form eines Clusters Cl_κ zugewiesen. Jeder Stein eines Clusters oder einer Pflasterung wird dann durch diesen Cluster, verkleinert um η^{-1} und verschoben an den Ort des Steins, ersetzt. Dann wird die so erhaltene Figur um η vergrößert. Diese Definition benutzt die oben beschriebene Charakterisierung

der Steine einer Pflasterung durch die Angabe des entsprechenden Mustersteins und der Operation, die diesen an seine Stelle in der Pflasterung überführt.

Definition 2.4.2 *Unter den Voraussetzungen von Def. 1.4.1. seien definiert:*

$$\text{infl}^{(s+1)} := \text{infl}(\text{infl}^s)$$

$\mathbf{P}(\mathcal{F}, \text{infl}) := \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist } \mathcal{F}\text{-Pflasterung und zu jedem Cluster } Cl \in \mathcal{P} \text{ existieren } k, s \in \mathbf{N} \text{ mit } \varphi(Cl) \subseteq \text{int}(\text{infl}^s(T_k)), \varphi \in \text{Iso}\}$

Wir nennen den Operator infl nur dann eine Inflation, wenn $\mathbf{P}(\mathcal{F}, \text{infl})$ von lokal endlicher Komplexität ist (s. Def 1.3.1). Dann ist $\mathbf{P}(\mathcal{F}, \text{infl})$ eine Spezies und wir schreiben stattdessen $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$

infl^s(T_k) oder auch tr(infl^s(T_k)) heisst Superstein (s-ter Ordnung vom Typ T_k).

Gilt für zwei Pflasterungen \mathcal{P}, \mathcal{Q} und für eine Inflation infl: $\text{infl}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$, so heisst \mathcal{Q} Deflation von \mathcal{P} .

Definition 2.4.3 *Ist $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_k\}$ eine Musterfamilie und infl eine dazugehörige Inflation, so sei $m_{i,j} :=$ Anzahl der Steine vom Typ T_i in Cl_j (Cl_j ist der Cluster, der die Substitution von T_j beschreibt). Dann heisst*

$$M_{\text{infl}} := \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,1} & \cdots & m_{k,k} \end{pmatrix}$$

die Inflationsmatrix.

Die Inflationsmatrix zu Danzer 92 sieht also so aus (siehe Bild xx):

$$M_{\text{infl}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Eine wichtige Eigenschaft für Inflationsspezies ist die der Minimalität.

Definition 2.4.4 *Gegeben seien eine Musterfamilie \mathcal{F} und eine dazu gehörende Inflation infl. \mathcal{F} heisst minimal (bezüglich infl) : \Leftrightarrow Es gibt kein $s \in \mathbf{N}$ und keine echte Teilmenge $\emptyset \neq \mathcal{G}$ von \mathcal{F} , so dass in $\text{infl}^s(\mathcal{G})$ nur Steine aus \mathcal{G} vorkommen.*

\mathcal{F} ist minimal bedeutet also: Wählt man einen beliebigen Musterstein $T \in \mathcal{F}$, so kommen in $\text{infl}^s(T)$ alle Steine aus \mathcal{F} vor, wenn man s nur groß genug wählt.

Der Beweis, dass eine Spezies von Pflasterungen aperiodisch ist, benutzt oft die schon in der Einleitung erwähnte Aussage :

Hinweis 2.4.1 $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$ sei eine Spezies von Pflasterungen, die durch eine Inflation gewonnen wurden. Besitzt jedes $\mathcal{P} \in \mathbf{S}$ genau eine Deflation, so ist $\mathbf{S}(\mathcal{F}, \text{infl})$ aperiodisch.

2.5 Lokale Ableitbarkeit

Kehren wir kurz zurück zum physikalischen Interesse an Pflasterungen. Für die Frage, ob einem Quasikristall eine nichtperiodische Pflasterung zuzuordnen ist, ist die Dekoration der Steine mit Atomen interessant. Die Form der Steine selbst ist dafür gar nicht so wichtig. Daher führten Baake, Schlottman und Jarvis in [B-S-J] den Begriff der lokalen Ableitbarkeit ein. Damit werden zwei Pflasterungen zur selben Klasse gezählt, wenn sie je eine Dekoration ermöglichen, die zu ein und derselben Atomstruktur führen, also in der Praxis das gleiche Quasikristall beschreiben würden. Ein einfaches Beispiel dafür geben sie, indem eine Regel formuliert wird, wie man eine Penrosepflasterung in eine Rhomben–Hexagon–Pflasterung, die aus einer Streifenprojektionsmethode gewonnen wurde, überführen kann. Damit überträgt sich dann eine Dekoration der Penrosepflasterung direkt auf die Rhomben–Hexagon–Pflasterung. Zunächst die genaue Definition:

Definition 2.5.1 Die Pflasterung \mathcal{P} heisst lokal ableitbar aus der Pflasterung $\mathcal{Q} : \Leftrightarrow \exists r > 0 \forall x \in \mathbf{E}^d, \varphi_t \text{ Translation} : \mathcal{Q} \cap (x + r\mathbf{B}^d) = \varphi_t(\mathcal{Q}) \cap (x + r\mathbf{B}^d) \Rightarrow \mathcal{P} \cap \{x\} = \varphi_t(\mathcal{P}) \cap \{x\}$
Zwei Pflasterungen \mathcal{P}, \mathcal{Q} heissen gegenseitig lokal ableitbar (kurz *mld* für 'mutual locally derivable'), wenn \mathcal{P} lokal ableitbar aus \mathcal{Q} ist und \mathcal{Q} aus \mathcal{P} .
Die mld-Klasse einer Pflasterung \mathcal{P} ist dann definiert als $\{\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \text{ und } \mathcal{Q} \text{ sind mld}\}$.

Der Begriff der lokalen Ableitbarkeit erlaubt also allgemeinere Klassifizierungen von 'verwandten' Pflasterungen, allgemeiner als beispielsweise die Einteilung in ℓI -Klassen, bei denen ja nur Pflasterungen mit gleichen Mustersteinen als verwandt angesehen werden. Für diese Arbeit wird der Begriff erwähnt, weil hier durch ein ähnliches Verfahren wie das oben erwähnte eine Rhombenpflasterung mit m Mustersteinen aus einer Pflasterung mit $m + 3$ Mustersteinen gewonnen wird.

2.6 Spezielle Bezeichnungen und Formeln

Im gesamten Text werden Ausdrücke der Form $\sin(k\frac{\pi}{n}), k \in \mathbf{N}$ vorkommen. Diese werden mit s_k abgekürzt. Der Bruch $\frac{\sin(k\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ wird mit $\mu_{n,k}$ bezeichnet. An einigen Stellen wird die *Mollweidesche Formel* benutzt: Gegeben sei ein Dreieck mit Umkreisradius r , Seitenlängen a, b, c und den jeweils gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ . Aus der Mollweideschen Formel $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos((\alpha-\beta)/2)}{\sin(\gamma/2)}$ folgt dann für $\alpha = \lambda\frac{\pi}{n}, \beta = \mu\frac{\pi}{n}, \gamma = \nu\frac{\pi}{n}$ mit $\lambda + \mu + \nu = n$ (wegen des Sinussatzes ist $a = 2rs_\lambda, b = 2rs_\mu$ und $c = 2rs_\nu$):

$$\begin{aligned} \frac{2r(s_\lambda + s_\mu)}{2rs_\nu} &= \frac{\cos((\lambda\frac{\pi}{n} - \mu\frac{\pi}{n})/2)}{s_{\nu/2}} = \frac{\sin((\lambda\frac{\pi}{n} - \mu\frac{\pi}{n} + \pi)/2)}{s_{\nu/2}} \\ \Leftrightarrow s_{\nu/2}(s_\lambda + s_\mu) &= s_\nu \sin((\lambda - \mu + n)\frac{\pi}{2n}) = s_\nu \sin\left(\left(\frac{\lambda - \mu + \lambda + \mu + \nu}{2}\right)\frac{\pi}{n}\right) \\ \Leftrightarrow s_{\nu/2}(s_\lambda + s_\mu) &= s_\nu s_{\lambda+\nu/2} \end{aligned} \tag{M.1}$$

Eine andere Form erhält man, wenn man das μ eliminiert. Wegen $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ gilt:

$$s_\mu = s_{n-\lambda-\nu} = \sin\left(\pi - \left(\frac{(\lambda + \nu)\pi}{n}\right)\right) = s_{\lambda+\nu}$$

Oder für $k := \nu/2$, $i = \lambda$: $s_k(s_i + s_{i+2k}) = s_{2k}s_{i+k}$ (M.2)

Sehr wichtig für alles weitere ist die folgende Formel:

$$\mu_{n,k}s_\lambda = \sum_{\nu=0}^{k-1} s_{\lambda+1-k+2\nu} \quad (1)$$

Ein Beweis für diese findet sich in Kapitel 5.

3 Die Trapezpflasterungen

3.1 Herleitung

Betrachtet man die bekannten Beispiele von zweidimensionalen nichtperiodischen Pflasterungen, so fällt auf, dass oft Dreiecke oder Rhomben mit Winkeln $k\pi/n$ als Mustersteine vorkommen, wie bei den Penroserrhomben oder Robinsondreiecken, bei Danzer 92, den Pflasterungen von Whittaker und Whittaker [W-W] und den Pflasterungen von Nischke und Danzer in [NI-D]. Danzer 92 hat den Inflationsfaktor $1 + \mu_{7,2}$ und als Mustersteine drei Dreiecke mit jeweiligen Seitenlängen s_1, s_2, s_3 ; s_1, s_3, s_3 und s_2, s_2, s_3 (hier: $n=7$). (In [NI-D] ist jede Seite um den gemeinsamen Faktor $4s_1$ verlängert. Die hier angegebenen Zahlen spiegeln also nur das Verhältnis der Seitenlängen wider).

Die Robinsonpflasterungen haben als Inflationsfaktor τ , die Zahl des goldenen Schnitts. Faßt man je zwei Inflationsschritte zu einem zusammen, so ist der Inflationsfaktor dazu $\tau^2 = 1 + \tau = 1 + \mu_{5,2}$. Die Seitenlängen der Mustersteine stehen im Verhältnis $1 : \tau$, lassen sich also angeben als s_1, s_2 mit $n=5$. Aufgrunddessen werden wir versuchen, weitere Dreieckspflasterungen mit Inflationsfaktor $1 + \mu_{n,2}$ und Mustersteinen mit Seitenlängen $s_1, s_2, s_3 \dots, s_{(n-1)/2}$ zu konstruieren. Für höhere n hat man aber nun viele solcher Dreiecke. Es gilt also, eine möglichst kleine Musterfamilie auszuwählen.

Anstatt über die Seitenlängen können wir diese Dreiecke auch über die Angabe der Winkel $\lambda\pi/n, \mu\pi/n, \nu\pi/n$ und des Umkreisradius' bezeichnen. Die Seitenlängen folgen dann direkt aus dem Sinussatz.

Bemerkung 1 *Es seien $n, \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{N}$ mit n ungerade und $\lambda + \mu + \nu = n$. Dann gibt es $\frac{n^2-1}{12}$ verschiedene Dreiecke mit Winkeln $\lambda\frac{\pi}{n}, \mu\frac{\pi}{n}, \nu\frac{\pi}{n}$ und Umkreisradius $1/2$, falls n nicht durch 3 teilbar ist, und $\frac{n^2+3}{12}$ solcher Dreiecke sonst.*

Während $n-1$ verschiedene Winkel vorkommen können, kommen als Seitenlängen nur $(n-1)/2$ verschiedene in Frage, da für $1 \leq k \leq (n-1)/2$ gilt: $s_k = s_{n-k}$.

Bezeichnung: Ab hier sei n stets eine ungerade natürliche Zahl und $m := (n - 1)/2$

Mit dem Inflationsfaktor $\eta = (1 + \mu_{n,2})$ wird aus einer Steinseite mit Länge s_k bei einem Inflationsschritt eine Seite mit Länge ηs_k . Wollen wir aus der gesuchten Inflation eine vtv-Pflasterung erhalten, so muss sich ηs_k wiederum als Summe von einem oder mehreren s_k schreiben lassen. Wenn das nicht möglich ist, wären wir schon an dieser Stelle gescheitert, da sich die inflationierte Steinkante aus anderen Steinkanten — die alle Längen s_k , $1 \leq k \leq m$ haben — zusammensetzen soll. Mit Formel (1) erhalten wir:

$$\boxed{\eta s_k = (1 + \mu_{n,2})s_k = s_{k-1} + s_k + s_{k+1} \quad (1 \leq k \leq m)}$$

Jede Seite zerlegt sich also unter der noch zu suchenden Inflationsvorschrift in die nächstkleinere, sich selbst und die nächstgrößere. Dabei wird s_1 wegen $s_0 = 0$ zu $s_1 + s_2$ und s_m zu $s_{m-1} + 2s_m$. Eine vtv-Pflasterung erhalten wir dann so: Wir werden die Seiten durch Pfeile orientieren und eine einheitliche Zerlegung der Seiten angeben. Liegen dann in der Pflasterung zwei gleichlange Seiten aufeinander, deren Pfeile in dieselbe Richtung weisen, so liegen nach einem Inflationsschritt die je drei (bzw. zwei) dabei entstandenen Seiten wieder genau aufeinander, wieder gleichsinnig orientiert. Die erzeugten zugehörigen Steine liegen also Seite an Seite, was im zweidimensionalen gleichbedeutend ist mit: Sie liegen mit ihren Ecken aufeinander. Stoßen in der Pflasterung ausschliesslich gleich orientierte Seiten aneinander, ist sie somit vtv. Zerlegen wir die Seiten also einheitlich so:

BILD

Die Wahl dieser Zerlegung, die in etwa der Seitenzerlegung von Danzer 92 entspricht, ist die grundlegendste Voraussetzung für die später hergeleiteten Pflasterungen. Ausgehend von dieser ergeben sich die weiteren Punkte, trotz auftauchender Probleme, zwangsläufig. Der größere Teil der Arbeit ist noch zu tun, und einige wichtige Ideen sind noch vonnöten, aber die Hauptrichtung ist durch diese Regel schon vorgegeben.

Bei wiederholter Inflation einer beliebigen Seite werden dieser Regel zufolge irgendwann alle s_1, s_2, \dots, s_m als Seitenlängen auftauchen. In einer Musterfamilie — wir wollen sie natürlich möglichst klein wählen — müssen also als Seitenlängen alle s_1, \dots, s_m vorkommen, da sonst bei einem Inflationsschritt eine Seitenlänge auftaucht, zu der kein Musterstein existiert. Das erreicht man elegant, indem man als Mustersteine diejenigen Dreiecke wählt, in denen als Seitenlänge s_m vorkommt. Diese sieht dann so aus:

BILD

Die Anordnung der Pfeile ist jetzt noch unwichtig, sie entspringt späteren Überlegungen und ist hier nur der Einfachheit halber schon mit angegeben.

Bezeichnung: Je nach Zweck werden die Dreiecke mit A_0, B_0, C_0, \dots oder mit D_1, D_2, D_3, \dots bezeichnet. Wenn es um spezielle Steine geht, wird die erste Möglichkeit vorgezogen, ist ein beliebiger Stein gemeint, wird die zweite Variante gewählt. Offenbar gibt es genau m solcher Dreiecke.

Für $n=7$ erhalten wir so, bis auf die Orientierung der Seiten, die Musterfamilie von Danzer 92 mit $\eta = 1 + \mu_{7,2}$. Für jedes Dreieck mit Seiten s_m, s_λ, s_μ ist $\lambda + \mu \in \{m, m + 1\}$, da der der Seite mit Länge s_m gegenüberliegende Winkel $\gamma = m\pi/n$ oder $(m + 1)\pi/n$ ist und für die Winkel gelten muss: $\lambda\pi/n + \mu\pi/n + \gamma = n\pi/n$. Ist O.B.d.A. $\lambda \geq \mu$, ist z.B.

der Stein A_0 durch $\lambda = m$, $\mu = 1$ eindeutig gegeben. Für die einzelnen Dreiecke sieht das dann so aus:

	A_0	B_0	C_0	D_0	E_0	F_0	\dots
λ	m	$m-1$	$m-1$	$m-2$	$m-2$	$m-3$	\dots
μ	1	1	2	2	3	3	\dots

Versuchen wir nun, die Inflation für diese Dreiecke anzugeben, so geht das schief. Es läuft auf die Frage hinaus, wie sich $\text{Fläche}(\text{infl}(D_k)) = \eta^2 \text{Fläche}(D_k)$ als Linearkombination der Flächeninhalte der Mustersteine darstellen lässt. Wir wissen bereits, dass das für $n = 7$ möglich ist, da das der Inflation Danzer 92 entspricht. Setzen wir vereinfachend $D_0 := D_{-1} := \emptyset$ und $D_{m+k} := D_{m-k}$ für $(1 \leq k < m)$, so fügt sich das widerspruchlos ein. Für D_0 ist $\lambda = m$, $\mu = 0$, für D_{-1} ist $\lambda = m+1$, $\mu = 0$. Damit erhalten wir im weiteren eine einfachere Darstellung für die Beziehung der Flächeninhalte.

Bezeichnung: Ab hier stehe $Fl(A)$ für die Fläche von A .

Bemerkung 2 Sei $D_k \in \mathcal{F}$. Für k ungerade gilt: $\eta^2 Fl(D_k) =$

$$Fl(D_1) + Fl(D_2) + Fl(D_{k-2}) + 2 \times Fl(D_{k-1}) + 3 \times Fl(D_k) + 2 \times Fl(D_{k+1}) + Fl(D_{k+2})$$

Für k gerade gilt: $\eta^2 Fl(D_k)$

$$= -Fl(D_1) - Fl(D_2) + Fl(D_{k-2}) + 2 \times Fl(D_{k-1}) + 3 \times Fl(D_k) + 2 \times Fl(D_{k+1}) + Fl(D_{k+2})$$

Jetzt können wir versuchen, daraus eine Inflationsmatrix abzuleiten. Offenbar sieht eine Spalte derselben — die ja der Zerlegung eines Dreiecks entspricht — im allgemeinen, also bei großen Werten für n , immer ähnlich aus: die ersten beiden Einträge sind entweder 1 oder -1, danach folgt irgendwo die Sequenz 1 2 3 2 1, der Rest besteht aus Nullen. Eine Abweichung davon tritt lediglich in den ersten vier und in den letzten zwei Spalten auf, also für die Dreiecke D_1, \dots, D_4 und D_{m-1}, D_m . Betrachten wir also die Flächengleichungen dieser Steine.

Für $A_0 = D_1$ ist k ungerade, also ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} Fl(\text{infl}(A_0)) &= Fl(A_0) + Fl(B_0) + 0 + 0 + 3 \times Fl(A_0) + 2 \times Fl(B_0) + Fl(C_0) \\ &= 4 \times Fl(A_0) + 3 \times Fl(B_0) + Fl(C_0). \end{aligned}$$

Für $B_0 = D_2$ ist k gerade. Das ergibt:

$$\begin{aligned} Fl(\text{infl}(B_0)) &= -Fl(A_0) - Fl(B_0) + 0 + 2 \times Fl(A_0) + 3 \times Fl(B_0) + 2 \times Fl(C_0) + Fl(D_0) \\ &= Fl(A_0) + 2 \times Fl(B_0) + 2 \times Fl(C_0) + Fl(D_0). \end{aligned}$$

(Für $n=7$ wird aus D_0 B_0).

Für das vorletzte und das letzte Dreieck, D_{m-1} und D_m , erhalten wir:

$$\begin{aligned} Fl(\text{infl}(D_{m-1})) &= \\ &\pm Fl(A_0) \pm Fl(B_0) + Fl(D_{m-3}) + 2 \times Fl(D_{m-2}) + 3 \times Fl(D_{m-1}) + 2 \times Fl(D_m) + Fl(D_{m+1}) \\ &= \pm Fl(A_0) \pm Fl(B_0) + Fl(D_{m-3}) + 2 \times Fl(D_{m-2}) + 4 \times Fl(D_{m-1}) + 2 \times Fl(D_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Fl(infl(D_m)) \\
& = \mp Fl(A_0) \mp Fl(B_0) + Fl(D_{m-2}) + 2 \times Fl(D_{m-1}) + 3 \times Fl(D_m) + 2 \times Fl(D_{m+1}) + Fl(D_{m+2}) \\
& = \mp Fl(A_0) \mp Fl(B_0) + 2 \times Fl(D_{m-2}) + 4 \times Fl(D_{m-1}) + 3 \times Fl(D_m)
\end{aligned}$$

Je nachdem, ob m gerade oder ungerade ist, steht vor den ersten beiden Summanden minus oder plus. Entscheidend für die allgemeine Form der Matrix sind aber nur die anderen Summanden. Für D_3, D_4 ist die Überlegung auch einfach, die Zerlegung entspricht der dritten und vierten Spalte in der folgenden Matrix. Wir erhalten jetzt also als allgemeine Form der gesuchten Inflationsmatrix:

$$\begin{pmatrix}
4 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & \ddots & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 \\
3 & 2 & 3 & 0 & 1 & -1 & \ddots & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 \\
1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & & \\
& 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
& & 1 & 2 & 3 & 2 & \ddots & & & \\
& & & 1 & 2 & 3 & \ddots & 1 & & \\
& & & & 1 & 2 & \ddots & 2 & 1 & \\
& & & & & 1 & \ddots & 3 & 2 & 2 \\
& & & & & & \ddots & 2 & 4 & 4 \\
& & & & & & & \ddots & 1 & 2 & 3
\end{pmatrix}$$

Diese allgemeine Form stellt den Sachverhalt für große n dar, etwa ab $n = 15$. Für $n = 13$ gelten die ersten vier und die letzten beiden Spalten. Für $n = 7$ erhält man eine Permutation der Inflationsmatrix von Danzer 92, für $n = 11$ und $n = 9$ erhält man die folgenden Matrizen:

$$n = 11 : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad n = 9 : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Man sieht, dass für $n > 7$ die Matrix negative Einträge hat. Das heisst: Eine Inflation ist so nicht möglich. Aus dieser Matrix, die ja zunächst nur die Flächen beschreibt, liest man ab, dass z.B. $\eta^2 Fl(D_4)$ für $n > 11$ gleich der Fläche von $2D_3 \dot{\cup} 3D_4 \dot{\cup} 2D_5 \dot{\cup} D_6$ minus der Fläche von D_1 ist. Dazu kann man keine Zerlegung angeben. Zumindest für n prim kann es keine Inflationsmatrix geben, denn:

Bemerkung 3 *Ist n eine Primzahl, so lässt sich $\eta^2 Fl(D_k)$ nur auf eine Weise als ganzzahlige Linearkombination der $Fl(D_i)$ darstellen.*

Es gibt für n prim also keine andere Möglichkeit, die Fläche eines inflationierten Steins als ganzzahlige Linearkombination der Flächen der Mustersteine darzustellen als die aus

Bemerkung 2. Hier hilft jetzt ein einfacher, aber entscheidender Trick: Wir fassen D_k und D_{k-1} zu jeweils einem Stein T_k zusammen. Dadurch heben sich nämlich jeweils -1 und 1 auf. Das ergibt die folgenden Mustersteine, die bis auf den ersten allesamt Trapeze sind (für den ersten fassen wir D_0 und D_1 zusammen):

BILD

Hier sieht man, dass die Trapeze alle umlaufend orientiert sind. Das wird für die Inflationsvorschrift noch wichtig, und deshalb wurden die Dreiecke wie in Bild xx orientiert.

Bezeichnung: s_ℓ steht für die 'mittlere' Seitenlänge, das ist die Seitenlänge, die beim letzten Trapez dreimal auftaucht. Dabei ist $\ell = \lfloor \frac{p+1}{4} \rfloor$, also $(m+1)/2$ für ungerades m und $m/2$ für gerades m .

Für die Fläche eines Trapezes gilt nun, falls k ungerade ist, wegen Bemerkung 2:

$$\eta^2 Fl(T_k) =$$

$$\begin{aligned} & Fl(D_1) + Fl(D_2) + Fl(D_{k-2}) + 2 \times Fl(D_{k-1}) + 3 \times Fl(D_k) + 2 \times Fl(D_{k+1}) + Fl(D_{k+2}) \\ & - Fl(D_1) - Fl(D_2) + Fl(D_{k-3}) + 2 \times Fl(D_{k-2}) + 3 \times Fl(D_{k-1}) + 2 \times Fl(D_k) + Fl(D_{k+1}) \\ & = Fl(D_{k-3}) + 3 \times Fl(D_{k-2}) + 5 \times Fl(D_{k-1}) + 5 \times Fl(D_k) + 3 \times Fl(D_{k+1}) + Fl(D_{k+2}) \end{aligned}$$

Hierbei ist wieder zu beachten, dass $Fl(D_0) = Fl(D_{-1}) = 0$ ist und $D_{m+k} = D_{m-k}$. $Fl(D_{-2})$ ist analog zum obigen $-Fl(D_1)$ zu setzen ($\lambda = m+1, \mu = -1$, siehe die letzte Tabelle). Damit kommen auf jeden Fall nur noch positive Flächenwerte vor. Für gerades k erhalten wir dasselbe:

$$\eta^2 Fl(T_k) =$$

$$\begin{aligned} & -Fl(D_1) - Fl(D_2) + Fl(D_{k-2}) + 2 \times Fl(D_{k-1}) + 3 \times Fl(D_k) + 2 \times Fl(D_{k+1}) + Fl(D_{k+2}) \\ & + Fl(D_1) + Fl(D_2) + Fl(D_{k-3}) + 2 \times Fl(D_{k-2}) + 3 \times Fl(D_{k-1}) + 2 \times Fl(D_k) + Fl(D_{k+1}) \\ & = Fl(D_{k-3}) + 3 \times Fl(D_{k-2}) + 5 \times Fl(D_{k-1}) + 5 \times Fl(D_k) + 3 \times Fl(D_{k+1}) + Fl(D_{k+2}) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine allgemeine Darstellung:

Bemerkung 4 Für die Flächeninhalte der Trapeze gilt:

$$\eta^2 Fl(T_k) = Fl(T_{k-2}) + 2 \times Fl(T_{k-1}) + 3 \times Fl(T_k) + 2 \times Fl(T_{k+1}) + Fl(T_{k+2})$$

Bezeichnung: \mathcal{F}_0 sei die Menge dieser Trapeze. Je nach Zweck werden die Mustersteine aus \mathcal{F}_0 mit A, B, C, D, \dots oder mit T_1, T_2, T_3, \dots bezeichnet. Bildbeispiele benutzen meistens die Mustersteine für $n = 11$.

Für diese Trapeze kann also jetzt, wenn man nur das Kriterium der Flächeninhalte berücksichtigt, eine Inflation existieren. Die zugehörige Inflationsmatrix muss dann so

aus den Dreiecken D_k zusammengesetzt sind, einführen und sie zu unserer Musterfamilie hinzunehmen, ermöglicht das endlich die angestrebte Substitution. Der Stein H erlaubt die Zerlegung von A , die Steine H und K ermöglichen dies für B . Wollen wir sie in unsere Musterfamilie aufnehmen, müssen wir natürlich auch für diese eine Substitution angeben können. Aber auch das K lässt sich nicht in Mustersteine aus $\mathcal{F}_0 \cup \{H, K\}$ zerlegen. Die Einführung des Steins L löst dieses Problem, denn mittels des Mustersteins L können wir für K eine Zerlegung angeben, auch für L existiert eine mit Mustersteinen aus $\mathcal{F}_0 \cup \{H, K\}$. Unsere Musterfamilie ist also $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_0 \cup \{H, K, L\}$. Dass sie tatsächlich zu einer Inflation führt, ist nun leicht gezeigt.

Dazu müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Jeder Stein ηT besitzt eine korrekte Zerlegung in Steine aus \mathcal{F}_T . Dabei stimmen auch die Zerlegungen der Seiten mit den Pfeilen des inflationierten Steins überein.
2. Jeder Stein T muss im Inneren von $infl^s(T)$ für ein beliebiges s vorkommen, da man sonst nicht den unter 1.4 beschriebenen Prozess zur Gewinnung einer Inflationspflasterung durchführen kann.
3. Bei jeder durch diesen Prozess erhaltenen Pflasterung überlappen sich die Steine nicht und lassen keine Lücken.
4. Ausserdem liegen die Steine vtv. Dieser Punkt ist für das Gelingen der Inflation selbst nicht entscheidend, aber wie in Kapitel 1 erwähnt durchaus wünschenswert.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Zerlegung der Seiten. Die Definition derselben ermöglicht überhaupt erst alles weitere. Punkt 1. und 2. sind sehr leicht einzusehen. Zu Punkt 1 muss man nur die Diagramme der Inflationsvorschrift unter Berücksichtigung der Längen und Winkel der Mustersteine betrachten und sich überzeugen, dass diese Zerlegung korrekt ist; weiter, dass die Orientierungen und Anordnungen der Seiten denen der Seiteninflation entsprechen. Für die Steine T_3, \dots, T_m und K ist auch Punkt 2 dadurch abgehakt, da diese bereits in der ersten Inflation ihrer selbst im Inneren liegen. Für A, B, H und L genügt die zweite Inflation. Lediglich die Punkte 3 und 4 bedürfen etwas größerer Sorgfalt. Dazu benutzen wir, dass jeder endliche Ausschnitt der Pflasterung, oder auch jeder Cluster, Teilmenge von $infl^s(T)$, $T \in \mathcal{F}$ (T und s geeignet gewählt) ist.

$infl^1(T)$ ist vtv mit gleichsinnig orientierten Kanten, nicht überlappend und hat keine Lücken. Der Träger $tr(infl^1(T))$ ist genau ηT . Annahme: $infl^{k-1}(T)$ sei vtv mit gleich orientierten Kanten, nicht überlappend und ohne Lücken für alle $T \in \mathcal{F}$, und $tr(infl^{k-1}(T))$ sei gleich $\eta^{k-1}T$. Aus dieser Annahme folgt, berücksichtigt man die Inflationsvorschrift: $infl^k(T)$ ist ebenfalls vtv mit gleichsinnig orientierten Kanten der Supersteine, nicht überlappend und ohne Lücken. Denn die Zerlegung von $infl^k(T)$ in Supersteine $infl^{k-1}(S)$, $S \in \mathcal{F}$ entspricht genau der ersten Inflation und die $infl^{k-1}(S)$ weisen laut Annahme alle diese Eigenschaften auf. Die aneinanderstoßenden Seiten der Supersteine sind also auch gleich orientiert und werden auf die gleiche Weise zerlegt. Also können wir induktiv den Schluss ziehen, dass die entstehenden Pflasterungen vtv sind und keine Lücken oder Überlappungen besitzen.

Jeder endliche Ausschnitt dieser Pflasterungen hat somit die genannten Eigenschaften, also auch jede dieser Pflasterungen. Wir werden sie ab jetzt in ihrer Gesamtheit mit

'Trapezpflasterungen' oder 'TP' bezeichnen. Die Menge der Trapezpflasterungen für ein bestimmtes n bezeichnen wir mit TP_n . TP_n kann dabei sowohl für eine bestimmte Trapezpflasterung als auch für deren Gesamtheit stehen, wenn der Zusammenhang solches gestattet. Beispielsweise schreiben wir, dass 'ein Cluster in TP_n vorkommt', wenn er in einer Trapezpflasterung vorkommt.

3.3 Eigenschaften der Trapezpflasterungen

Um einige Eigenschaften diese Pflasterungen zu zeigen ist es unumgänglich, eine Liste der möglichen Nachbarschaften von Steinen zu erstellen, also eine Liste aller Cluster, die aus zwei Steinen bestehen und in diesen Pflasterungen vorkommen. Um diese Liste zu erhalten benötigt man etwas Überlegung. Diese Überlegungen in Textform zu bringen erweist sich als schwierig, vor allem für die Steine vom Typ A, B, H, K und L . Ich gebe hier nur die Liste an, ihre Herleitung findet sich im Kapitel Beweise.

BILD

Voraussetzung für die Korrektheit dieser Liste ist, dass die Trapezpflasterungen vtv sind, was wir schon gezeigt haben. Für die Untersuchung der Eigenschaften benötigen wir noch zwei Bemerkungen:

Bemerkung 5 *Vier Steine vom Typ A liegen nie wie in Bild xx beieinander.*

Bemerkung 6 *Liegt in TP_n an einem Stein vom Typ H an der Seite mit Länge s_m einer vom Typ A , so liegt an der Seite mit Länge s_2 kein Stein vom Typ D .*

1. Für ein festes n ist die Menge der Trapezpflasterungen aperiodisch, von lokal endlicher Komplexität und repetitiv. Ausserdem ist \mathcal{F}_T minimal bezüglich *infl*. Also ist TP_n eine aperiodische Spezies mit minimaler Musterfamilie.
2. Für die Steinkanten in TP_n sind nur n verschiedene Richtungen möglich.
3. Wählt man eine Richtung aus, so sind für die Kanten zwei Orientierungen möglich. Dabei gilt: Alle Kanten mit Länge s_{2k} haben dieselbe Orientierung, alle mit Länge s_{2k-1} haben die dazu entgegengesetzte.
4. Betrachtet man in TP_n einen geraden Kantenzug, so folgt auf einen Abschnitt mit Länge s_k einer mit Länge s_{k-1}, s_k oder s_{k+1} . Hierbei gibt es allerdings eine Ausnahme: auf die Seite mit Länge s_m eines Steins vom Typ H kann eine Seite mit Länge s_{m-2} folgen.
5. Zwei Eckpunkte in TP_n , die s_1 weit auseinanderliegen, sind durch eine Kante verbunden.
6. Es ist keine einfache local matching rule für diese Pflasterung möglich, genauer: Weder die Liste der Nachbarschaften noch eine Liste aller vorkommenden Ecksterne liefern eine solche (Bei Danzer 92 liefert letzteres eine lmr).
7. Es gibt nur Ecksterne aus drei, vier oder sechs Steinen. Es gibt nur zwei verschiedene Kongruenzklassen von Ecksternen aus drei Steinen und fünf verschiedene Kongruenzklassen von Ecksternen aus sechs Steinen. (Sechs der sieben verschiedenen Ecksterne, die nicht aus vier Steinen bestehen, finden sich in Bild xx)

8. In einem Eckstern aus vier Steinen haben zwei der vier zusammenstoßenden Ecken Innenwinkel $m\pi/n$ und die anderen beiden $(m+1)\pi/n$. Dabei liegen sich gleiche Winkel nie gegenüber.
9. Es gibt unter den Trapezpflasterungen keine, die eine globale oder auch nur lokale Drehsymmetrie D_k mit $k > 2$ aufweist.

Die Beweise der Aussagen finden sich im Kapitel 5. Nach 3. und 4. sieht ein typischer Kantenzug in den Trapezpflasterungen so aus:

BILD

Ein Ausschnitt einer Trapezpflasterung für $n = 11$ findet sich auf Seite xx.

4 Die Dreiecks- und die Rhombenpflasterungen

Die Hinzunahme der Steine H , K und L hat einige unschöne Effekte. Die Inflationsmatrix ist nicht mehr symmetrisch, die Musterfamilie hat jetzt statt der angestrebten m Elemente $m+3$ Elemente. Erinnern wir uns daran, dass jeder Musterstein ursprünglich aus der Vereinigung von zwei oder drei Dreiecken (für A nur eins) entstand. Was passiert nun, wenn wir in TP_n jeden Stein wieder in diese Dreiecke zerlegen? Das entspricht dem Einzeichnen von Diagonalen in den Trapezen, K und L bekommen zwei. Alle Diagonalen haben Länge s_m . Es entstehen Pflasterungen aus den m Dreiecken, die wieder $v_t v$ sind. Diese sind nun nicht direkt aus einer Inflationsvorschrift hervorgegangen. Zu unserem Inflationsfaktor η kann es für die Dreiecke nach den Bemerkungen 2 und 3 auch gar keine Inflation geben. Diese Konstruktion — das Einzeichnen der Diagonalen — entspricht der Idee der lokalen Ableitbarkeit. Wir haben also durch ein einfaches Verfahren Pflasterungen mit m Mustersteinen erhalten. An den so entstandenen Pflasterungen fällt aber noch etwas auf: In weiten Bereichen der so erhaltenen Pflasterung bilden die Diagonalen Rhomben. Das führt zu folgender Idee: unterteilen wir die Trapezpflasterung in zwei verschiedene (nicht zusammenhängende) Gebiete, zeichnen wir in das eine die Diagonalen ein wie oben und in dem anderen genau umgekehrt, so erhalten wir eventuell auf diese Weise eine Pflasterung, die nur Rhomben als Mustersteine hat.

4.1 Die Grenzkanten

Wie soll diese Unterteilung vor sich gehen? Zuerst besehen wir uns die Zerlegung der Trapeze, diesmal mit den Diagonalen.

BILD

Offenbar bilden die Diagonalen innerhalb der ersten Inflation von T_3, \dots, T_{m-2} immer Rhomben oder Teile davon, während sich die Diagonalen in T_{m-1} und T_m nicht zu Rhomben zusammenfassen lassen. Dazu müsste in den schattierten Bereichen jeweils genau die andere Diagonale eingezeichnet werden. Betrachten wir die Grenzen der schattierten Bereiche: Es sind für m ungerade genau die Grundseiten von T_m , für m gerade genau die

Kopfseiten von T_m . Anders ausgedrückt sind es Seiten des letzten Dreiecks D_m , und zwar für m gerade die Seite mit Länge s_ℓ , die von der längsten Seite wegzeigt, für m ungerade die Seite mit Länge s_ℓ , die zur längsten Seite hinzeigt. Diese werden uns die Unterteilung der Pflasterung in zwei — jeweils nicht zusammenhängende — Bereiche liefern.

Bezeichnung: Die hier beschriebenen Kanten werden im weiteren 'Grenzkanten' genannt. Betrachten wir einen Ausschnitt einer Trapezpflasterung mit eingezeichneten Grenzkanten, so bemerken wir, dass sie meistens Gebiete bestimmter Form umschliessen. In der Pflasterung lassen sich drei Bausteine dieser Kantenzüge ausmachen. Bezeichnen wir sie mit a, b und c .

BILD

Ein Baustein c kommt nur vor in dem Superstein $infl(T_m)$, ein b kommt nur vor in $infl(T_m)$ und $infl(T_{m-1})$, ein a nur in $infl(T_{m-1})$ und $infl(T_{m-2})$. Das im Bild mit $B.1$ bezeichnete Gebiet hat beispielsweise als Kanten zwei a und zwei b , das Gebiet $B.2$ hat als Kanten zwei b und zwei c . Im Bild sind ebenfalls einzelne Bausteine a zu sehen. Dies sind in Wirklichkeit jedoch zwei aufeinanderliegende a , da dort je zwei Grundseiten des letzten Trapezes zusammenstoßen. Diese Konstellation werden wir mit $B.0$ bezeichnen. Interessant ist die Form dieser Gebiete und ihre Beziehung untereinander. Inflationiert man einen Cluster, in dem ein Gebiet $B.0$ liegt, so entsteht daraus $B.2$. Durch Inflationieren von $B.2$ erhält man ein weiteres Gebiet $B.4$, von dem ein Teil in Bild 8 zu sehen ist (unten links). Im Inneren von diesem $B.4$ taucht ein $B.1$ auf. Inflationiert man ein $B.1$, entsteht das Gebiet $B.3$ in Bild 8. Durch wiederholte Inflation werden diese Gebiete immer komplexer. Der Gedanke liegt nahe, dass man durch eine modifizierte Methode — Anwenden der Inflationvorschrift ohne Vergrößerung um η , alleiniges Betrachten der Grenzkanten, Übergang zum Limes — zu einem fraktalen Gebilde gelangt. Dieses ist sicher ein Aspekt, der es wert ist, sich näher damit zu befassen. Das würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. In Kapitel 5 sind einige Beispiele für die Formen dieser Gebiete für höhere n abgebildet.

Dass die Grenzkanten die Pflasterungen tatsächlich in zwei Bereiche zerteilen, zeigen wir folgendermaßen:

Bemerkung 7 *An den beiden Endpunkten eines jeden Bausteins a, b und c liegt genau ein weiterer Baustein. Die anderen Punkte eines Bausteins berühren keinen weiteren Baustein ausser in dem Fall, dass zwei a aufeinanderliegen. In diesem letztgenannten Fall berühren diese beiden a keine weiteren Grenzkanten.*

Aufgrund dieser Bemerkung können keine Verzweigungen bei einem Grenzkantenzug auftreten und ein Grenzkantenzug kann nicht im Leeren enden. Daher bildet er immer geschlossene Kurven oder setzt sich bis ins Unendliche fort. Somit können wir die Pflasterungen jetzt folgendermaßen in zwei Bereiche unterteilen, die wir der Anschaulichkeit halber als roten und blauen Bereich bezeichnen: Wir wählen einen beliebigen Stein T in einer Trapezpflasterung \mathcal{P} und weisen ihm die Farbe rot zu. Um die Farbe eines beliebigen der anderen Steine S zu erhalten, wählt man einen Weg von T nach S , der keine Eckpunkte der Pflasterung trifft. S ist rot, falls dieser Weg eine gerade Anzahl von Grenzkanten

kreuzt und blau, falls er eine ungerade Zahl von Grenzkanten kreuzt. Kreuzt er dabei zwei aufeinanderliegende a , so wird das als zweimaliges Kreuzen gezählt. Dieser Fall wird also so behandelt, als wäre an dieser Stelle keine Grenzkante.

Diese Definition ist bis auf die Wahl des Steins T eindeutig. Da die Grenzkanten disjunkte geschlossene Kurven sind, ist jedes zusammenhängende Gebiet der einen Farbe von genau einem Gebiet der anderen Farbe umschlossen und umschliesst selbst wieder Gebiete der anderen Farbe (oder enthält kein weiteres Gebiet wie im Fall $B.1$ oder $B.2$). Der Gebietsgraph — jedem zusammenhängenden Gebiet wird ein Knoten zugeordnet; sind Gebiete benachbart, werden ihre Knoten durch eine Kante verbunden — ist daher ein unendlicher Baum. Steht die Farbe eines Steins nun fest, steht damit die Farbe des Gebiets, in dem er liegt, fest. Alle Gebiete, die im Gebietsgraph einen ungeraden Abstand von diesem haben, bekommen die andere Farbe und alle mit geradem Abstand bekommen die gleiche. Damit gibt es für eine gegebene Pflasterung (und damit für deren Kongruenzklasse) nur zwei verschiedene Möglichkeiten der Färbung, je nachdem, ob der erste Stein die Farbe rot oder blau zugewiesen bekommt.

Die roten und die blauen Gebiete sind im wesentlichen gleichberechtigt. Es macht keinen entscheidenden Unterschied, ob der erste Stein T rot oder blau ist. In beiden Bereichen treten die gleichen Cluster auf, alle endlichen roten und blauen Gebiete sind von der Form $B.n$. In beiden Fällen gelangt man zu Rhombenpflasterungen derselben ℓI -Klasse.

4.2 Die Diagonalen

Nun müssen wir die Regeln zum Einzeichnen der Diagonalen in die Steine der Pflasterung präzisieren. Für die roten Steine benutzen wir im wesentlichen die Diagonalen, wie sie durch die Konstruktion der Steine aus Dreiecken vorgegeben ist (Bild xx). Durch die Orientierung der Dreiecke ist auch für diese Diagonalen eine Orientierung vorgegeben.

BILD

Im roten Bereich bilden die nach diesen Regeln erzeugten Diagonalen, wie wir später zeigen werden, tatsächlich ausschliesslich Rhomben. In weiten Teilen der blauen Gebiete führt einfaches 'Umklappen' der Diagonalen, also das Einzeichnen der jeweils anderen Diagonalen als die in Bild xx angegebenen, ebenfalls zu Clustern aus Rhomben. Bei A wird einfach die andere lange Seite als Diagonale definiert. Damit würde sich z.B. aus Bild xx schon ein lückenloser Ausschnitt einer Rhombenpflasterung gewinnen lassen. Bei H , K und L , die in Bild xx nicht vorkommen, ist jedoch nicht direkt klar, wie die Diagonalen 'umgeklappt' werden sollen. Das ergibt sich jedoch aus deren Nachbarn. Betrachten wir einen weiteren Ausschnitt aus einer Trapezpflasterung (Bild xx). Die acht (zwei und sechs) fett umrandeten Steine unten rechts seien rot, alle anderen blau. Die Diagonalen aller Steine ausser H , K und L sind bereits eingezeichnet. Es bleiben aber noch Lücken, und versucht man, eine einheitliche Regel für die blauen Diagonalen anzugeben, so wird das scheitern. Die entscheidenden Stellen sind:

1. Der Cluster unten links, der aus vier Steinen besteht, zweien vom vom Typ H und

zweien vom Typ K . Es ist nicht sofort klar, wie das Umklappen der Diagonalen bei H und K geschehen soll.

2. Direkt darüber fehlt eine Kante, um zwei schmale Rhomben zu vervollständigen.

3. Über diesen tritt zweimal ein Cluster aus H, K und L auf.

Vervollständigt man die umliegenden Rhomben, ist aber sofort klar, wie man hier die Diagonalen ziehen muss. Dazu müssen allerdings in zwei Fällen Steine vom Typ B wieder die Diagonalen erhalten, die für den roten Bereich festgelegt wurden.

Die folgenden Regeln, die drei Ausnahmen beinhalten, führen schliesslich zu einer lückenlosen Rhombenpflasterung des \mathbf{E}^2 .

BILD

Ausnahme 1 Eckstern I: Die einzige Möglichkeit, hier fortzusetzen besteht darin, einen Eckpunkt von TP_n zu verschieben. Interessant ist, dass durch das Verschieben dieses Eckpunkts die Eigenschaft 4. von TP_n (siehe Abschnitt 3.3) global gültig wird.

Ausnahme 2 Liegt ein B in Eckstern II oder III, so wird seine Diagonale wie im roten Gebiet eingezeichnet. Die Diagonalen von H und L folgen den normalen Regeln. In diesem Fall kann das beteiligte H nicht in einem Eckstern I liegen, weil laut Bemerkung 6 bei \diamond ein A liegen muss.

Ausnahme 3 Liegt ein Stein vom Typ B im Eckstern IV, so kommt zusätzlich die Strecke 's' als Diagonale hinzu. Die anderen Diagonalen werden den anderen Regeln folgend eingezeichnet.

Die Ausnahmen 2 und 3 können auch zusammen auftreten, wie im folgenden Bild xx zu sehen ist. Es stellt den gleichen Ausschnitt wie Bild xx dar. Die dort fehlenden (oder falschen) Diagonalen sind hier korrekt eingezeichnet. Die Ecksterne, die zu einer Ausnahme führen, sind mit Wellenschraffur gekennzeichnet. Die Wurzeln der jeweiligen Ecksterne sind durch einen weissen Punkt dargestellt.

BILD

Bemerkung 8 *Die nach diesen Regeln erzeugten Diagonalen bilden Pflasterungen mit m Rhomben als Mustersteinen. Diese Pflasterungen sind *vtv* und *repetitiv*.*

Diese Pflasterungen werden hier mit RP_n oder in ihrer Gesamtheit mit RP bezeichnet. Die Musterfamilie von RP_n ist im wesentlichen dieselbe wie die in den Pflasterungen von Whittaker und Whittaker: Rhomben gleicher Seitenlänge — hier s_m — und Innenwinkeln $k\pi/n, (n-k)\pi/n$ mit $1 \leq k \leq m$. Unsere Rhomben sind aber zusätzlich mit Pfeilen versehen.

4.3 Ein Vergleich zwischen RP und den Pflasterungen von Whittaker und Whittaker

In [W-W] stellen die Autoren eine Streifenprojektionsmethode vor, die nichtperiodische Pflasterungen der Ebene mit Rhomben erzeugen. Dabei wird eine Zahl $n \geq 3$ vorgegeben. Die Matrix M_n sei die, die die Achsen des Euklidischen Vektorraums \mathbf{E}^n so permutiert, dass die i -te zur $(i+1)$ -ten Achse wird (die letzte zur ersten). Sie hat also Einträge

$a_{i+1,i} = 1, a_{1,n} = 1$, sonst Nullen. M_n lässt den Vektor $(1, 1, \dots, 1)^T$ fest und die Teilmenge des \mathbf{E}^n , für die M_n eine Drehung um $2\pi/n$ definiert, ist eine Ebene. Auf diese Ebene Π werden die Punkte des Einheitsgitters projiziert, die in einem Streifen der Breite \sqrt{n} parallel zu Π liegen. Der Abstand dieses Streifens zu Π kann dabei (fast) frei gewählt werden. (Genauereres darüber in [W-W]). Die Autoren betrachten dabei nur die Fälle $n = 3, 4, \dots, 9, 10, 12$, wobei das Verfahren sicherlich auch für andere Werte Pflasterungen liefert. Die so erhaltenen Pflasterungen haben als Mustersteine Rhomben mit Innenwinkeln $k\pi/n, (m-k)\pi/n$; also für ungerades $n \geq 7$ genau dieselben Rhomben wie in RP, nur ohne Pfeile.

Für $n = 3, 4, 6$ erhält man mit dieser Methode periodische Pflasterungen, für $n = 5$ und $n \geq 7$ erhält man nichtperiodische Pflasterungen. (Dabei entstehen unter bestimmten Voraussetzungen auch Penrose- und Ammannpflasterungen). Es liegt nahe, zu untersuchen, ob diese Pflasterungen mit unseren irgendwie verwandt sind; ob sie also beispielsweise in der gleichen ℓI -Klasse oder in der gleichen mld-Klasse liegen. Nachfolgend werden aber Unterschiede aufgelistet, die das ausschliessen.

Wesentliche Unterschiede sind:

1. Bei W.-W. sind die Pflasterungen alle drehsymmetrisch, im Zentrum befindet sich ein Stern aus n oder $2n$ Rhomben. Bei RP_n treten noch nicht einmal lokale Drehsymmetrien auf.
2. Bei W.-W. liegen zwei Rhomben für ungerades n nie gleichorientiert nebeneinander (property (ii), [W-W] Seite 109), in RP_n schon (z.B. Bild xx oben rechts).
3. Ein eher anschaulicher Unterschied: In RP_n liegen für hohe n nur schmale an schmalen Rhomben und breite an breiten. Das ist eine direkte Folge aus der Inflationsvorschrift für Trapeze: Ein schmales Trapez wie B, C oder D , das schmale Rhomben bewirkt, wird in schmale Trapeze zerlegt, ein breites in breite. In einem Cluster $infl^2(T_m)$ beispielsweise kommen nur $T_{m-4}, T_{m-3}, \dots, T_m$ vor. In diesem Cluster entstehen daher nur (für hohe n) breite Rhomben. Das ist bei W.-W. nicht der Fall.
4. In RP_n kommt ein Eckstern aus mehr als sechs Rhomben nicht vor, in W.-W. schon.
5. Bei W.-W. kommen Ecksterne aus $2n$ Steinen mit Innenwinkel π/n vor. In RP_n liegen maximal zwei Steine mit diesen Winkeln nebeneinander in einem Eckstern.

Bei 2. und 3. ist nichts zu zeigen. Zu 1., 4. und 5. müssen die Aussagen über RP bewiesen werden, die zu W.-W. finden sich in [W-W]. (Beweise im nächsten Kapitel). Aus diesen Unterschieden können wir folgern, dass die Pflasterungen von Whittaker und Whittaker mit den Rhombenpflasterungen auf keine der bekannten Weisen (lokale Ableitbarkeit, lokale Isometrie) verwandt sind. Gleichzeitig sind damit einige Eigenschaften der Rhombenpflasterung gezeigt.

Auf die gleiche Weise, wie wir zu den Rhombenpflasterungen gelangen, kann man auch zu Dreieckspflasterungen gelangen, indem man einfach die Trapezpflasterungen mit den Diagonalen betrachtet anstatt nur die Diagonalen allein. Diese haben die ursprünglichen m Dreiecke als Mustersteine (Bei Ausnahme 1 muss noch eine zusätzliche Diagonale gezogen werden). Damit gelangt man also doch noch zum ursprünglichen Ziel: Herleitung einer Dreieckspflasterung. Diese ist nun natürlich nicht über eine Inflationsvorschrift zu

erhalten, das wurde ja bereits ausgeschlossen.

5 Anmerkungen und Fragen

Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist die Vorstellung und Herleitung einer ganzen Familie von Spezies von aus einer Inflation gewonnenen Pflasterungen mit m Mustersteinen, die Winkel der Form $k\pi/n$ haben und der Nachweis, dass diese Pflasterungen wohldefiniert sind. Ist das getan, so kann man sie auf vielfältige Weise weiter auf ihre Eigenschaften und Besonderheiten untersuchen. Es stehen dafür mittlerweile eine Reihe von Sätzen und Definitionen zur Verfügung, die hier nicht alle behandelt werden konnten. Die Auswahl der hier untersuchten Merkmale ergab sich aus der Zielsetzung 'Herleitung der Rhombenpflasterungen aus den Trapezpflasterungen'. Manche der dabei entdeckten Sachverhalte sind bemerkenswert, beispielsweise dass allein die Wahl des Inflationsfaktors und der Zerlegung der Seiten den weiteren Weg sehr genau festlegt. Immer wieder tauchen dabei Probleme auf, wie die Zerlegung von A und B , die weitere Mustersteine erfordert, oder die Ausnahmen, die eine einfachere Formulierung der Diagonalenregeln unmöglich machen. Aber immer kann man sie relativ einfach überwinden und gelangt endlich zum Ziel: Einer Pflasterung mit m Mustersteinen.

Ein anderer interessanter Punkt ist sicher die Form der blauen und roten Gebiete. Es scheint, als läge hier eine Regel vor, die ähnlich den mir bekannten populären Beispielen wie der 'Drachencurve' [GARD] zu einem fraktalen Gebilde führt. Allein das wäre vielleicht eine eigene Untersuchung wert.

Es tauchen bei der Beschäftigung mit diesen Pflasterungen weitere Fragen auf. Was passiert beispielsweise für $n = 5$? Man kann den Ansatz für die Trapezpflasterung problemlos auf diesen Fall ausweiten. Als Dreiecke erhält man die Robinsondreiecke A_0, B_0 , als Musterfamilie erhält man: Ein Dreieck $A = A_0$, ein Trapez $B = A_0 \cup B_0$ und die 'Sondersteine' $H = A_0 \cup A_0$, $K = A_0 \cup B_0 \cup B_0$, $L = A_0 \cup A_0 \cup B_0$. Es entstehen Trapezpflasterungen, die aber nicht auf einfache Weise in Robinsonpflasterungen überführt werden können (also z.B. durch das Einzeichnen von Diagonalen). Auch greift hier das Grenzkantenkonzept nicht. Egal, welche Seite(n) man zu Grenzkanten erklärt, die Pflasterungen zerfallen nicht in zwei Gebiete, die eine Formulierung von Diagonalenregeln ähnlich den hier gezeigten erlauben würde. Erst ab $n = 7$ gelten alle in dieser Arbeit gezeigten Eigenschaften.

Für n prim haben wir gezeigt, dass die Flächengleichung, die zu der Inflationsmatrix führt, eindeutig ist, dass sich also der um η vergrößerte Flächeninhalt nur auf eine Weise als Linearkombination der anderen Flächeninhalte schreiben lässt. Kann aber für andere n vielleicht eine andere Inflationsmatrix existieren?

Für die gewählte Seitenzerlegung ist die Zerlegung der Steine nur so möglich, wie es beschrieben wurde. Kann man vielleicht die Seitenzerlegung anders wählen, so dass wir zu einer anderen Zerlegung der Steine gelangen?

Wir benutzten hier den Inflationsfaktor $\eta = 1 + \mu_{n,2}$. Formel (1) lieferte uns dann die

Zerlegung der Seiten. Die Formel gilt nun aber für beliebige $\mu_{n,k}$. Wählt man alternativ als Inflationsfaktor $\eta' = \mu_{n,k} + \mu_{n,k+1}$, so erhält man auch eine mögliche Zerlegung der Seiten. Führt das auch — mit der gleichen Musterfamilie — zu einer Inflationsmatrix und zu weiteren Trapezpflasterungen?

Die Dreieckspflasterungen und die Rhombenpflasterungen erhielten wir, indem wir sie aus den Trapezpflasterungen ableiteten. Sie sind also lokal ableitbar aus TP_n . Sicherlich sind auch aus den Dreieckspflasterungen — egal, welche der beiden Varianten man wählt — die Trapezpflasterungen lokal ableitbar, man muss dazu nur die Diagonalen (bis auf wenige Ausnahmen) löschen. Also liegen TP_n und die entsprechenden Dreieckspflasterungen in einer mld-Klasse. Ist aber auch TP_n lokal ableitbar aus den Rhombenpflasterungen? Wenn man sich damit beschäftigt, stößt man auf eine Konstellation, wo aus zwei verschiedenen Clustern in TP_n zwei kongruente Cluster in RP_n entstehen. Zumindest aus den Rhombenclustern selbst geht nicht hervor, welchen Trapezclustern sie entsprechen. Eventuell kann man aufgrund der näheren Nachbarn Aussagen darüber treffen, eine so einfache Regel wie bei den Dreieckspflasterungen scheint jedoch nicht möglich.

6 Beweise

Beweis zu Formel (1): Vollständige Induktion nach λ ($1 \leq \lambda \leq k$). Sei zunächst $\lambda = 1$:

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} s_{1+1-k+2\nu} = s_{2-k} + s_{4-k} + \cdots + s_{k-4} + s_{k-2} + s_k = s_k = \mu_{n,k} s_1$$

Denn wegen $s_{-\alpha} = -s_\alpha$ heben sich die $s_{\alpha-k}$ gegen die $s_{k-\alpha}$ weg, es bleibt stehen s_k und für ungerades k auch $s_0 = 0$.

$\lambda = 2$:

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} s_{2+1-k+2\nu} = s_{3-k} + s_{5-k} + \cdots + s_{k-3} + s_{k-1} + s_{k+1} = s_{k-1} + s_{k+1}$$

Bleibt z.z.

$$\mu_{n,k} s_2 = s_{k-1} + s_{k+1}$$

Das ist äquivalent zu $s_k s_2 = s_1 (s_{k-1} + s_{k+1})$

und das folgt aus der Mollweideschen Formel in der Form (M.2) aus Abschnitt 1.6 mit $\nu = 1, \lambda = k - 1, \mu = k + 1$.

Jetzt zeigen wir: Gilt die Formel für $\lambda - 2$, so auch für λ . Sei $\lambda \geq 2$.

Z.z.

$$\mu_{n,k} s_\lambda = \sum_{\nu=0}^{k-1} s_{\lambda+1-k+2\nu}$$

Es gelte

$$\mu_{n,k} s_{\lambda-2} = \sum_{\nu=0}^{k-1} s_{\lambda-1-k+2\nu}$$

Ziehen wir die zweite von der ersten Gleichung ab, bleibt z.z.

$$\mu_{n,k}(s_\lambda - s_{\lambda-2}) = s_{\lambda+k-1} - s_{\lambda-k-1}$$

Das ist äquivalent zu $\frac{s_k}{s_1} = \frac{s_{\lambda+k-1} - s_{\lambda-k-1}}{s_\lambda - s_{\lambda-2}}$

Die rechte Seite ist nach dem Additionstheorem gleich

$$\frac{2 \cos((\lambda + k - 1 + \lambda - k - 1) \frac{\pi}{2n}) \sin((\lambda + k - 1 - \lambda + k + 1) \frac{\pi}{2n})}{2 \cos((\lambda + \lambda - 2) \frac{\pi}{2n}) \sin((\lambda - \lambda + 2) \frac{\pi}{2n})} = \frac{s_k}{s_1} \quad \square$$

Beweis zu Bemerkung 1: Es seien $a, b, c \in \{1, 2, \dots, n\}$, n ungerade. Es gibt soviele verschiedene (nicht kongruente) Dreiecke wie Mengen $\{a, b, c\}$ mit $a+b+c = n$. Bestimmen wir aber zunächst die Anzahl der Tripel (a, b, c) mit $a + b + c = n$. Zur Wahl von a gibt es $n - 2$ Möglichkeiten. Für b gibt es dann $n - 1 - a$ Möglichkeiten, c steht dann fest. Das ergibt

$$\sum_{a=1}^{n-2} n - 1 - a = n - 2 + n - 3 + \dots + 2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

Dabei werden Möglichkeiten mehrfach gezählt, da $(a, b, c) \neq (b, c, a)$. Wenn alle 3 Zahlen verschieden sind, wird $\{a, b, c\}$ auf diese Weise sechsfach gezählt, bei zwei gleichen Zahlen dreifach.

Sei zunächst n nicht durch 3 teilbar. Dann kommen drei gleiche Zahlen nicht vor. Wie oft kommen zwei gleiche Zahlen vor? (a, a, b) kommt $(n-1)/2$ mal vor, nämlich $((1, 1, b), (2, 2, b), \dots, (\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1))$. (a, b, a) und (b, a, a) ebenfalls $(n-1)/2$ mal. Es wurden also $(3n-3)/2$ Möglichkeiten dreifach gezählt. Also wurden $\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3n-3}{2} = \frac{n^2-6n+5}{2}$ Möglichkeiten sechsfach gezählt. Das ergibt insgesamt $\frac{n^2-6n+5}{12} + \frac{3n-3}{6} = \frac{n^2-1}{12}$ verschiedene Dreiecke.

Sei nun n durch 3 teilbar. Es gibt genau ein Tripel (a, a, a) . Ein Tripel (a, a, b) mit $a \neq b$ kommt $(n-1)/2 - 1 = (n-3)/2$ mal vor. Ebenso (a, b, a) und (b, a, a) , demnach werden $(3n-9)/2$ Möglichkeiten dreifach gezählt. $\frac{n^2-3n+2}{2} - \frac{3n-9}{2} - 1 = \frac{n^2-6n+9}{2}$ Möglichkeiten wurden also sechsfach gezählt. Macht insgesamt $\frac{n^2-6n+9}{12} + \frac{3n-9}{6} + 1 = \frac{n^2+3}{12}$ Dreiecke.

Beweis zu Bemerkung 2: Sei zunächst k ungerade. Die Flächengleichung $\eta^2 Fl(D_k) =$

$$Fl(D_1) + Fl(D_2) + Fl(D_{k-2}) + 2 \times Fl(D_{k-1}) + 3 \times Fl(D_k) + 2 \times Fl(D_{k+1}) + Fl(D_{k+2})$$

schreibt sich mit den s_k so:

$$(1 + \mu_{n,2})^2 s_m s_\lambda s_\mu = s_m (s_m s_1 + s_{m-1} s_1 + s_{\lambda-1} s_{\mu+1} + 2 s_{\lambda-1} s_\mu + 3 s_\lambda s_\mu + 2 s_\lambda s_{\mu-1} + s_{\lambda+1} s_{\mu-1}) \quad (*)$$

Nach Formel(1) gilt:

$$\begin{aligned} (1 + \mu_{n,2})^2 s_m s_\lambda s_\mu &= s_m (s_{\lambda-1} + s_\lambda + s_{\lambda+1}) (s_{\mu-1} + s_\mu + s_{\mu+1}) \\ &= s_m (s_{\lambda-1} s_{\mu-1} + s_{\lambda-1} s_\mu + s_{\lambda-1} s_{\mu+1} + s_\lambda s_{\mu-1} + s_\lambda s_\mu + s_\lambda s_{\mu+1} + s_{\lambda+1} s_{\mu-1} + s_{\lambda+1} s_\mu + s_{\lambda+1} s_{\mu+1}) \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass dieser letzte Term mit der rechten Seite der Gleichung (*) übereinstimmt. Da k ungerade ist, ist $\lambda + \mu = m + 1$. In obiger Gleichung entsprechen Produkte der Form $s_m s_k s_i$ mit $k + i \in \{m, m + 1\}$ gerade den Flächeninhalten von Dreiecken aus unserer Musterfamilie. Die anderen Produkte gilt es nun durch Produkte dieser Form auszudrücken. Zunächst können wir beide Terme durch s_m dividieren und gleiche Paare $s_k s_i$ auf beiden Seiten abziehen. Stehen bleibt:

$$s_1 s_m + s_1 s_{m-1} + s_{\lambda-1} s_\mu + 2s_\lambda s_\mu + s_\lambda s_{\mu-1} = s_{\lambda-1} s_{\mu-1} + s_\lambda s_{\mu+1} + s_{\lambda+1} s_\mu + s_{\lambda+1} s_{\mu+1}$$

Das beweisen wir, indem wir einzeln diese drei Gleichungen zeigen:

$$s_\lambda s_{\mu+1} = s_m s_1 + s_{\lambda-1} s_\mu \quad (2)$$

$$s_{\lambda+1} s_{\mu+1} = s_{m-1} s_1 + s_\lambda s_\mu \quad (3)$$

$$s_{\lambda-1} s_{\mu-1} + s_{\lambda+1} s_\mu = s_\lambda s_\mu + s_\lambda s_{\mu-1} \quad (4)$$

Zu (2):

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{aligned} s_\lambda s_{\mu+1} &= s_m s_1 + s_{\lambda-1} s_\mu \\ \frac{s_\lambda}{s_1} s_{\mu+1} &= \frac{s_{\lambda-1}}{s_1} s_\mu + s_m \end{aligned} \\ (Formel(1)) \Leftrightarrow & \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_{\mu+2-\lambda+2\nu} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-2} s_{\mu+1-\lambda+1+2\nu} + s_m \\ \Leftrightarrow & \sum_{\nu=0}^{\lambda-2} s_{\mu+2-\lambda+2\nu} + s_{\mu+2-\lambda+2\lambda-2} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-2} s_{\mu+2-\lambda+2\nu} + s_m \\ \Leftrightarrow & s_{\mu+\lambda} = s_m \end{aligned}$$

Stimmt wegen $\lambda + \mu = m + 1$ und $s_{m+1} = s_m$.

Zu (3):

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \begin{aligned} s_{\lambda+1} s_{\mu+1} &= s_{m-1} s_1 + s_\lambda s_\mu \\ \frac{s_{\lambda+1}}{s_1} s_{\mu+1} &= \frac{s_\lambda}{s_1} s_\mu + s_{m-1} \end{aligned} \\ (Formel(1)) \Leftrightarrow & \sum_{\nu=0}^{\lambda} s_{\mu+2-\lambda-1+2\nu} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_{\mu+1-\lambda+2\nu} + s_m \\ \Leftrightarrow & \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_{\mu+1-\lambda+2\nu} + s_{\mu+1-\lambda+2\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} s_{\mu+1-\lambda+2\nu} + s_m \\ \Leftrightarrow & s_{\mu+\lambda+1} = s_{m-1} \end{aligned}$$

Stimmt wegen $\lambda + \mu + 1 = m + 2$ und $s_{m+2} = s_{m-1}$.

Zu (4):

$$\begin{aligned}
s_{\lambda-1}s_{\mu-1} + s_{\lambda+1}s_{\mu} &= s_{\lambda}s_{\mu} + s_{\lambda}s_{\mu-1} \\
\Leftrightarrow s_{\mu-1}(s_{\lambda-1} - s_{\lambda}) &= s_{\mu}(s_{\lambda} - s_{\lambda+1}) \\
\Leftrightarrow \frac{s_{\mu-1}}{s_{\mu}} &= \frac{s_{\lambda} - s_{\lambda+1}}{s_{\lambda-1} - s_{\lambda}} \\
\Leftrightarrow \frac{s_{\frac{n-1}{2}-\lambda}}{s_{\frac{n+1}{2}-\lambda}} &= \frac{s_{\lambda} - s_{\lambda+1}}{s_{\lambda-1} - s_{\lambda}}
\end{aligned}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde benutzt, dass $\lambda + \mu = m + 1 = (n + 1)/2$, also $\mu = (n + 1)/2 - \lambda$. Die rechte Seite ist jetzt nach dem Additionstheorem

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cos(\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\frac{\pi}{n}) \sin(\frac{1}{2}(-1)\frac{\pi}{n})}{2 \cos(\frac{1}{2}(2\lambda - 1)\frac{\pi}{n}) \sin(\frac{1}{2}(-1)\frac{\pi}{n})} &= \frac{\cos(\frac{1}{2}(2\lambda + 1)\frac{\pi}{n})}{\cos(\frac{1}{2}(2\lambda - 1)\frac{\pi}{n})} \\
&= \frac{\sin((2\lambda + 1)\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2})}{\sin((2\lambda - 1)\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{\sin((\frac{2\lambda+1-n}{2})\frac{\pi}{n})}{\sin((\frac{2\lambda-1-n}{2})\frac{\pi}{n})} \\
&= \frac{-\sin((\frac{n-1}{2} - \lambda)\frac{\pi}{n})}{-\sin((\frac{n+1}{2} - \lambda)\frac{\pi}{n})} = \frac{s_{\frac{n-1}{2}-\lambda}}{s_{\frac{n+1}{2}-\lambda}}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für ungerades k gezeigt. Sei jetzt k gerade. Dann ist $\lambda + \mu = m$. Das gleiche Verfahren wie oben führt jetzt zu den drei Gleichungen:

$$s_{\lambda}s_{\mu+1} = s_m s_1 + s_{\lambda-1}s_{\mu} \quad (5)$$

$$s_{\lambda}s_{\mu} = s_{m-1}s_1 + s_{\lambda-1}s_{\mu-1} \quad (6)$$

$$s_{\lambda}s_{\mu-1} + s_{\lambda+1}s_{\mu+1} = s_{\lambda+1}s_{\mu} + s_{\lambda}s_{\mu} \quad (7)$$

Diese zeigt man ähnlich wie die obigen.

Beweis zu Bemerkung 3: Dieser Beweis benutzt einige bekannte Aussagen über Zerfällungskörper, Kreisteilungskörper und Primpolynome; ferner Galoissche Gruppen und den Hauptsatz der Galoistheorie. Sie sind entnommen aus [WAER] und benutzen dieselbe Schreibweise wie dort. Sei n eine Primzahl, $n \geq 3$. $\zeta_k := e^{2ik\frac{\pi}{n}}$, $1 \leq k \leq n$, bezeichnen die n -ten Einheitswurzeln, also die Nullstellen von $f(x) = x^n - 1$ in \mathbf{C} . $f(x)$ zerfällt über \mathbf{Q} wegen n prim in die Primpolynome $\Phi_1(x) = x - 1$ und $\Phi_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$. Wir adjungieren die $n - 1$ Nullstellen von $\Phi_n(x)$ an \mathbf{Q} und erhalten so den Zerfällungskörper $\mathbf{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}) = \{x \mid x = q_0 + q_1\zeta_1 + q_2\zeta_2 + \dots + q_{n-1}\zeta_{n-1}\}$. Da die ζ_k für $k \neq n$ primitive Einheitswurzeln sind, lässt sich jede als Potenz eines einzigen ζ_j darstellen. Wählen wir $\zeta_j = \zeta_1$, so gilt $\zeta_k = \zeta_1^k$. Also lässt sich $\mathbf{Q}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1})$ auch durch Adjunktion dieser einen primitiven Einheitswurzel erhalten. Für ζ_1 schreiben wir im weiteren einfach ζ . Wegen

Satz 1 Ist $p(x)$ Primpolynom in $\mathbf{Q}[x]$ und ist ϑ Nullstelle desselben, so ist der Körpergrad von $\mathbf{Q}(\vartheta)$ über \mathbf{Q} gleich dem Grad von $p(x)$.

hat $\mathbf{Q}(\zeta)$ den Grad von $\Phi_n(x)$, also $n - 1$. Bilden wir nun die Galoissche Gruppe \mathcal{G}_n von $\mathbf{Q}(\zeta)$ bezüglich \mathbf{Q} , also die Gruppe der Automorphismen $\sigma : \mathbf{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbf{Q}(\zeta)$, die die Elemente von \mathbf{Q} auf sich selbst abbilden (relative Automorphismen).

Satz 2 Ist $p(x)$ Primpolynom vom Grad m in $\mathbf{Q}[x]$ und ist ϑ Nullstelle desselben, so hat $\mathbf{Q}(\vartheta)$ bezüglich \mathbf{Q} genau m relative Automorphismen.

Demnach hat \mathcal{G}_n Ordnung $n - 1 = \text{Grad}(\Phi_n(x))$. In unserem speziellen Fall können wir die relativen Automorphismen repräsentieren durch σ_k mit $\sigma_k(\zeta) = \zeta_k$. Denn für $a \in \mathbf{Q}(\zeta)$, $a = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \alpha_\lambda \zeta^\lambda$ ist $\sigma_k(a) = \sigma_k(\sum_{\lambda=1}^{n-1} \alpha_\lambda \zeta^\lambda) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \alpha_\lambda \zeta_k^\lambda$; für $a \in \mathbf{Q}$ ist $a = q_0 = q_0 \zeta^n$, also $\sigma_k(a) = q_0 \zeta_k^n = q_0 \in \mathbf{Q}$ (wegen ζ_k primitiv gilt: $\zeta_k^n = 1$).

Satz 3 (Hauptsatz der Galoisschen Theorie) Gegeben seien ein Körper Σ und ein Unterkörper $K \subset \Sigma$, ausserdem die Galoissche Gruppe \mathcal{G} von Σ bezüglich K .

1. Zu jedem Zwischenkörper Δ , $K \subseteq \Delta \subseteq \Sigma$ gehört eine Untergruppe G von \mathcal{G} , nämlich die Gesamtheit derjenigen Automorphismen von Σ , die alle Elemente von Δ festlassen.
2. Δ ist durch G eindeutig bestimmt.
3. Zu jeder Untergruppe G von \mathcal{G} kann man einen Körper Δ finden, der zu G in der unter 1. erwähnten Beziehung steht.
4. Die Ordnung von G ist gleich dem Grad von Σ bezüglich Δ ; die Anzahl der Nebenklassen von G in \mathcal{G} ist gleich dem Grad von Δ bezüglich K .

Eine Untergruppe von \mathcal{G}_n ist $U := \{\sigma_1, \sigma_{n-1}\}$. Der dazu gehörende Unterkörper, also der, der unter σ_1 und σ_{n-1} invariant bleibt, ist $\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$. Der Körpergrad von $\mathbf{Q}(\zeta)$ bezüglich $\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ ist nach dem Hauptsatz gleich der Ordnung von U , also zwei. Nach dem Gradsatz gilt: $(\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}) = (\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})) (\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbf{Q})$, also $n - 1 = 2(\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) : \mathbf{Q})$. Demnach ist der Grad von $(\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ über \mathbf{Q} gleich $(n - 1)/2$.

Eine Körperbasis für $\mathbf{Q}(\zeta)$ ist $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}\} = \{(\cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n), (\cos(4\pi/n) + i \sin(4\pi/n), \dots, (\cos(2(n - 1)\pi/n) + i \sin(2(n - 1)\pi/n))\}$; eine für $\mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ ist $C := \{2 \cos(2\pi/n), 2 \cos(4\pi/n), \dots, 2 \cos((n - 1)\pi/n)\}$.

Behauptung: $D := \{2i \sin(2\pi/n), 2i \sin(4\pi/n), \dots, 2i \sin((n - 1)\pi/n)\}$ spannt zusammen mit C $\mathbf{Q}(\zeta)$ auf.

Dazu muss man nur zeigen, dass sich jedes Element aus $\mathbf{Q}(\zeta)$ als Linearkombination der Elemente aus $C \cup D$ schreiben lässt. Sei $a \in \mathbf{Q}(\zeta)$. Dann hat a eine Darstellung der Form:

$$a = \alpha_1 \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) + \alpha_2 \left(\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} \right) + \dots + \alpha_{n-1} \left(\cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)$$

Schreiben wir analog zu $s_k = \sin(k\pi/n)$ kurz c_k für $\cos(k\pi/n)$, so erhalten wir hier wegen

$c_k = c_{n-k}$:

$$a = (\alpha_1 + \alpha_{n-1})c_2 + (\alpha_2 + \alpha_{n-2})c_4 + \cdots + (\alpha_{\frac{n-1}{2}} + \alpha_{\frac{n+1}{2}})c_{n-1} \\ + (\alpha_1 + \alpha_{n-1})is_2 + (\alpha_2 + \alpha_{n-2})is_4 + \cdots + (\alpha_{\frac{n-1}{2}} + \alpha_{\frac{n+1}{2}})is_{n-1}$$

Mit $q_k := \frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{n-k})$ und $r_k := \frac{1}{2}(\alpha_k + \alpha_{n-k})$ wird daraus:

$$a = q_1 2c_2 + q_2 2c_4 + \cdots + q_{\frac{n-1}{2}} 2c_{n-1} + r_1 2is_2 + r_2 2is_4 + \cdots + r_{\frac{n-1}{2}} 2is_{n-1}$$

Also lässt sich jedes $a \in \mathbf{Q}(\zeta)$ als Linearkombination der $n - 1$ Elemente von $C \cup D$ darstellen. Somit sind die Elemente aus D linear unabhängig über \mathbf{Q} . Also sind auch s_2, s_4, \dots, s_{n-1} linear unabhängig über \mathbf{Q} . Wegen $s_{n-k} = s_k$ ist $\{s_2, s_4, \dots, s_{n-1}\} = \{s_1, s_2, \dots, s_{(n-1)/2}\}$. Damit ist gezeigt, dass die s_1, s_2, \dots, s_m über \mathbf{Q} linear unabhängig sind, also erst recht über \mathbf{Z} .

Das benutzen wir, um zu zeigen, dass die $s_1 s_m, s_1 s_{m-1}, s_2 s_{m-1}, \dots, s_\ell^2$ linear unabhängig sind. Sei zunächst m ungerade. Es gelte

$$\alpha_1 s_1 s_m + \alpha_2 s_1 s_{m-1} + \alpha_3 s_2 s_{m-1} + \cdots + \alpha_m s_\ell^2 = 0$$

Das ist äquivalent zu

$$\alpha_1 s_m + \alpha_2 s_{m-1} + \alpha_3 \frac{s_2}{s_1} s_{m-1} + \cdots + \alpha_m \frac{s_\ell}{s_1} s_\ell = 0 \\ \stackrel{(Formel(1))}{\Leftrightarrow} \alpha_1 s_m + \alpha_2 s_{m-1} + \alpha_3 (s_{m-2} + s_m) + \alpha_4 (s_{m-3} + s_{m-1}) + \cdots \\ + \alpha_{m-3} (s_4 + s_6 + \cdots + s_{m-1}) + \alpha_{m-2} (s_3 + s_5 + \cdots + s_m) + \\ + \alpha_{m-1} (s_2 + s_4 + \cdots + s_{m-1}) + \alpha_m (s_1 + s_3 + \cdots + s_m) = 0$$

Umsortieren nach den s_k ergibt:

$$\alpha_m s_1 + \alpha_{m-1} s_2 + (\alpha_m + \alpha_{m-2}) s_3 + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m) s_m = 0$$

Da die s_k linear unabhängig sind, folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= 0 \\ \alpha_{m-1} &= 0 \\ \alpha_m + \alpha_{m-2} &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_2 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{m-1} &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{m-2} + \alpha_m &= 0 \end{aligned}$$

Durch sukzessives Auflösen erhalten wir: $\alpha_i = 0$ für $1 \leq i \leq m$ (Für m gerade kann man es genauso zeigen, lediglich die Indizes schreiben sich anders). Daher sind auch die $s_1 s_m, s_1, s_{m-1}, s_2 s_{m-1} \dots, s_\ell^2$ linear unabhängig über \mathbf{Z} und spannen deshalb einen \mathbf{Z} -Modul vom Rang m auf: $\{\alpha_1 s_1 s_m + \alpha_2 s_1 s_{m-1} + \dots + \alpha_m s_\ell^2 \mid \alpha_i \in \mathbf{Z}\}$. Das können wir anwenden auf die Flächeninhalte der m Dreiecke: Die Fläche eines inflationierten Dreiecks mit Seiten s_m, s_λ, s_μ ist $s_m(\eta^2 s_\lambda s_\mu)$. Da $\eta^2 s_\lambda s_\mu$, wie wir im Beweis zu Bemerkung 2 sahen, auch wieder in diesem \mathbf{Z} -Modul liegt, ist die dort erhaltene Darstellung eindeutig, wenn n eine Primzahl ist. \square

Beweis zu Bemerkung 4: steht schon im Text. Er folgt direkt aus Bemerkung 3.

Beweis zur Liste x: Dazu werden wir erst einige Begriffe klären und ein paar einfache Tatsachen feststellen. Im folgenden bezeichnet eine 'Kante' eine bestimmte Kante eines Steintyps. Nennen wir beispielsweise die Seite der Länge s_1 des Steins A u , so sind damit alle Kanten der Länge s_1 der Steine vom Typ A gemeint. In der Pflasterung liegen also nach dieser Schreibweise immer zwei Kanten aneinander. Der 'Nachbar' eines Steins S soll ein Stein sein, von dem eine Kante auf einer Kante von S liegt. Da wir schon gesehen haben, dass aus der Inflationsvorschrift Pflasterungen entstehen und dass diese vtv sind, können nur Kanten gleicher Länge aneinanderliegen. Das macht den ersten Teil des Beweises, in dem die Nachbarn der Steine vom Typ T_3, T_4, \dots, T_m aufgelistet werden, sehr einfach. Denn — abgesehen von den Kanten der Länge s_1 und s_2 — treten hier alle Kantenpaare, die längenbedingt möglich sind, auch auf. Betrachten wir etwa die Kante des Steins T_5 der Länge s_3 . Es gibt als mögliche Nachbarn an dieser Kante nur Steine mit einer Kante der Länge s_3 , das sind T_5 selbst, T_6 (auf zwei verschiedene Arten) und T_7 . Andere Steine haben keine Kante dieser Länge. Aus $\text{infl}^3(T_5)$ ist ersichtlich, dass die vier genannten Konstellationen auch tatsächlich in der Pflasterung auftreten können.

Generell gehen wir so vor: Wir listen alle Nachbarschaften auf, die in den Clustern $\text{infl}^s(T)$, $1 \leq s \leq 3$, $T \in \mathcal{F}_T$ vorkommen. Das sind in der Tat alle, die auch in der Pflasterung vorkommen können. Damit ist der erste Teil des Beweises, in dem die Nachbarschaften der Steine T_3, \dots, T_m behandelt werden, nahezu komplett. Komplizierter ist der zweite Teil, in dem die Steine A, B, H, K und L untersucht werden. Hierbei treten nicht alle längenbedingt möglichen Nachbarschaften auf. Diejenigen, die nicht vorkommen, müssen dann einzeln ausgeschlossen werden. Für diesen Teil des Beweises werden folgende einfache Tatsachen benutzt:

Liegt die Kante u eines Steins S immer im Inneren der ersten Inflation aller Mustersteine, hat sie also mit dem Rand höchstens zwei Punkte gemeinsam, so sind dadurch schon alle möglichen Nachbarn gegeben. Denn in der Pflasterung liegt diese Kante dann immer in einem Cluster, der zu einem $\text{infl}^1(T)$, $T \in \mathcal{F}_T$ kongruent ist. Andere Konstellationen können nicht vorkommen, also kann S an u keine anderen Nachbarn haben.

Beispiel: Die kurze Kante von A kommt nur vor in $\text{infl}(A)$, $\text{infl}(B)$, $\text{infl}(C)$, $\text{infl}(H)$, $\text{infl}(K)$ und $\text{infl}(L)$. Dabei liegt sie immer im Inneren dieser Cluster. An dieser Kante liegen nur C oder K . Alle anderen Steine können als Nachbarn ausgeschlossen werden.

Liegt die Kante u eines Steins S dagegen in $\text{infl}^1(S_1), \dots, \text{infl}^1(S_k)$ aussen in den Kanten $\text{infl}^1(v_1), \dots, \text{infl}^1(v_j)$ so hat man mehrere Möglichkeiten. Sind beispielsweise

alle Nachbarn von v_1, \dots, v_j bekannt, so sind dadurch auch alle möglichen Nachbarn von u gegeben.

Eine andere Möglichkeit ist, alle anderen Kanten gleicher Länge, sofern sie nicht schon als Nachbarn von u bekannt sind, auszuschliessen. Das kann auf verschiedene Weise geschehen. Sind z.B. alle Nachbarn der Kanten gleicher Länge bekannt, so kann man daraus auch die Nachbarn dieser Kante ablesen (taucht u in der Menge der Nachbarn von v auf, so wird v der Menge der Nachbarn von u hinzugefügt). Dabei muss als zusätzliche Möglichkeit noch beachtet werden, dass die Kante u zu sich selbst benachbart sein kann.

Oder: Die Kanten u und v seien nicht benachbart in $\text{infl}^1(T)$, $T \in \mathcal{F}_T$ und ihre Länge sei s_i . Weiter soll gelten: u liegt aussen in $\text{infl}^1(S_1), \dots, \text{infl}^1(S_k)$ und v liegt aussen in $\text{infl}^1(R_1), \dots, \text{infl}^1(R_j)$. Ist u dabei immer Teil eines Kantenzugs s_i, s_{i+1}, s_{i+2} und v immer Teil eines Kantenzugs s_{i-1}, s_i, s_{i+1} , so können u und v nicht benachbart sein. Denn: Lägen sie in einer Trapezpflasterung aneinander, so würden in der Deflation derselben zwei Kanten unterschiedlicher Länge aneinanderliegen, was wir wegen vtv ausschliessen können.

Beispiel: Betrachte die Kante u der Länge s_{m-1} von K , die zu den beiden nebeneinanderliegenden Kanten der Länge s_1 hinzeigt und die Kante v derselben Länge des Steins C , die zur Kante der Länge s_2 hinzeigt. u und v liegen in $\text{infl}^1(T)$, $T \in \mathcal{F}_T$ nicht aneinander. u liegt nur in $\text{infl}^1(A)$ und $\text{infl}^1(B)$ aussen, und zwar in dem Kantenzug $s_m, s_{m-1}, s_m = \text{infl}(s_m)$. v liegt nur aussen in Kantenzügen $s_m, s_{m-1}, s_{m-2} = \text{infl}(s_{m-1})$ (B, C, D, H, K, L) und $s_{m-1}, s_{m-2}, s_{m-3} = \text{infl}(s_{m-2})$ (D, E). Demnach können u und v nicht benachbart sein.

Auch können zwei Kanten nicht aneinanderliegen, wenn dadurch eine Lücke entsteht, die nicht mit den Steinen aus \mathcal{F}_T geschlossen werden kann. Da wir schon zeigten, dass die Inflationsvorschrift zu einer Pflasterung führt, können wir solche Konstellationen ausschliessen.

Zunächst nun zu den Steinen vom Typ T_3, \dots, T_m . Um zu zeigen, dass alle längenbedingt möglichen Nachbarschaften auch auftreten, würde es genügen, zu jedem Musterstein seine dritte Inflation anzugeben. Das führt im allgemeinen Fall aber zu Darstellungsproblemen. Die meisten Nachbarschaften für einen Stein vom Typ T_k folgen schon aus der ersten Inflation von T_{k-1}, T_k und T_{k+1} . Für die restlichen benötigt man noch $\text{infl}^2(T_{k-1})$ und $\text{infl}^2(T_{k+1})$. Daher genügt die folgende Tabelle. Es muss wieder unterschieden werden, ob T_k hoch oder flach ist. Daher werden als Indizes k und j benutzt. Die Nachbarschaften liest man dann folgendermaßen aus den Grafiken ab: Die Zahlen 1 – 4 und 5 – 8 bezeichnen die unterschiedlichen Kanten. Die erste Tabelle enthält die Nachbarn der hohen Trapeze, die zweite die der flachen. In den Zeilen stehen die Nachbarn der jeweiligen Kante. In der ersten Spalte der ersten Tabelle stehen die Nachbarn, die aus der ersten Inflation des Steins T_k selbst folgen. Diese liest man aus dem linken Diagramm ab. In der zweiten stehen die, die aus der ersten Inflation des Steins T_{k-1} folgen. Diese liest man aus der rechten Grafik ab, wobei $j = k - 1$ zu setzen ist.

BILD

Damit sind für T_6, \dots, T_m alle möglichen Nachbarschaften gezeigt. Für T_3, T_4 und T_5 ,

die Seiten der Länge s_2 und s_{m-1} haben, kommen eventuell noch zusätzliche Nachbarn hinzu: B, H, K und L weisen auch diese Seitenlängen auf. Die Untersuchung der Nachbarschaften der letztgenannten Steine wird aber zeigen, dass für T_5 keine weiteren Nachbarn hinzukommen und für T_4 lediglich drei. T_3 dagegen, der als einziger der eben behandelten Steine auch eine Seite der Länge s_1 besitzt, wird noch öfter auftauchen.

Der zweite Teil des Beweises benutzt die folgende Liste:

BILD

Zur genauen Formulierung der nun folgenden Begründungen sind weitere Kanten mit Nummern versehen. Ist von einem Trapez, also B, C oder D die Rede, gilt die Numerierung wie im Bild xx links mit den Zahlen 1 – 4. Für die Kanten von K und L entnimmt man die Bezeichnung der obigen Liste.

zu I: Diese Kanten liegen in der ersten Inflation aller Mustersteine im Inneren des entstehenden Clusters. Damit können keine anderen Nachbarn auftreten.

zu II: Diese Kante liegt bis auf $infl(A)$ immer im Inneren der ersten Inflation aller Mustersteine. Da aber alle Nachbarn der entsprechenden Kante von A schon bekannt sind, können keine weiteren Nachbarn hinzukommen.

zu III: Da als einzige weitere Möglichkeit neben den schon aufgeführten die längste Kante von H in Frage kommt und diese schon abgehakt ist, sind das alle.

zu IV: Einzige andere Möglichkeit: Die andere lange Kante von A , diese ist aber schon abgehakt.

zu V: Es gibt fünf weitere Kanten der Länge s_1 . Die von A, H und L sind schon abgehakt. Die hier nicht aufgeführte Kante von K scheidet aus, da sonst eine nicht füllbare Lücke entstünde. Kante 3 von B scheidet aus, weil ein solches Kantenpaar in der ersten Inflation aller Mustersteine nicht vorkommt. Würde dieses Kantenpaar in einer Pflasterung vorkommen, wäre die Deflation derselben nicht vtv , also können wir diese Möglichkeit auch ausschliessen.

zu VI: Anlegen von Kante 4 des Steins L an diese Kante liesse eine nichtfüllbare Lücke entstehen. Für die hier nicht aufgeführten Kanten der Länge s_1 von A, B, H und L gilt das gleiche wie bei **V**.

zu VII: Diese Kante liegt aussen in der ersten Inflation der Steine A, B, H und L . Die Nachbarn der entsprechenden Kanten sind bereits bekannt, also kommen keine weiteren hinzu.

zu VIII: Es gibt vier weitere Kanten der Länge s_{m-1} : Die von B, H und L sind schon abgehakt. Die Kante 1 von C liegt in der Inflation eines jeden Steins in einer Kantensequenz s_m, s_{m-1}, s_{m-2} , während die hier behandelte Kante von K nur in Sequenzen s_m, s_{m-1}, s_m liegt.

zu IX: Es fehlen die Kanten der Länge s_{m-1} von B, H und L . Die sind aber schon abgehakt.

zu X: Die kurzen Kanten von A und H sowie Kante 3 von B sind abgehakt. Es bleiben: Kanten 2 und 3 von K , Kante 4 von L und Kante 2 von C . Anlegen von Kante 3 von K ergäbe eine nichtfüllbare Lücke. Die Kanten 2 und 3 von K liegen nur aussen in der ersten Inflation von L , sonst immer innen. Läge in einer Pflasterung Kante 2 von K an

Kante 3 von K , so läge in der Deflation der Pflasterung L an L , und zwar nicht vtv, also scheidet diese Möglichkeit auch aus. Aus einem ähnlichen Grund lässt sich auch Kante 4 von L ausschliessen: Diese liegt nur aussen in der ersten Inflation von K . Läge in einer Pflasterung Kante 3 von K an Kante 4 von L , so läge in der Deflation der Pflasterung L an K nicht vtv.

Bleibt als letzte Möglichkeit Kante 2 von C . An Kante 3 von C können nach dem bisher festgestellten nur liegen: Kante 4 von D , die Kanten 1 und 3 von C oder die Kanten 1 und 4 von K . In allen Fällen entstünde eine nichtfüllbare Lücke.

zu XI: Bisher ausgeschlossen sind A, H , Kante 1 von L und die Kanten 5 und 3 von K . Kante 2 von K scheidet aus, da sonst eine nichtfüllbare Lücke entstünde. Kante 2 von C scheidet auch aus: Lägen in einer Pflasterung diese Kanten aneinander, wäre die Deflation derselben nicht mehr vtv, denn Kante 2 von C liegt nur aussen in der ersten Inflation von E und D , also in einer Sequenz s_1, s_2, s_3 , während Kante 2 von K nur aussen liegt in der ersten Inflation von L , also in einer Sequenz s_1, s_2 .

zu XII und XIII: Diese Kanten liegen nur aussen in der ersten Inflation von K , dessen Nachbarn sind bekannt.

Damit ist der Beweis komplett: Wir haben jetzt eine vollständige Liste aller möglichen Cluster aus zwei Steinen, und zwar unabhängig von n . Der Beweis ist formuliert für $n \geq 11$. Sowohl die Liste als auch der Beweis lassen sich aber leicht auf $n = 7$ und $n = 9$ übertragen. Für diese Fälle benötigt man nur Liste 2 und die Tatsache, dass für C und D untereinander alle längenbedingt möglichen Nachbarschaften auftreten. Für $n = 7$ wird zusätzlich überall der Stein D durch den Stein C ersetzt.

Beweis zu Bemerkung 5: Dieser Cluster kommt in $infl^1(T)$, $T \in \mathcal{F}_T$ nicht vor; auch keiner, wo nur drei A nebeneinander liegen. An diesem Cluster wären also zwei oder mehr Supersteine beteiligt, und zwar auf eine der abgebildeten vier Weisen (Hier bezeichnet T_k ausnahmsweise beliebige Steine und nicht die Steine A, B, C und D):

BILD

Fall 1 ist generell unmöglich, wenn man einen Blick auf die Inflationsvorschrift wirft: Es gibt kein solches T_1 . Fall 2 ist nur möglich, wenn ein Stein vom Typ H an seiner zweitlängsten Kante ein H oder ein L liegen hat, oder wenn zwei L nebeneinander liegen (vgl. Inflationsvorschrift). Solche Nachbarschaften kommen nach Liste 1 aber nicht vor. Bei Fall 3 muss T_2 ein A sein. T_1 muss ein L oder H sein, aber dann lägen hier Kanten der Supersteine mit unterschiedlichen Längen aneinander. Wegen vtv können wir das ausschliessen. In Fall 4 müssen nach demselben Argument T_1, T_2, T_3 und T_4 alle vom Typ A sein. Dieser Cluster könnte also nur aus der Inflation seiner selbst kommen. Da er in $infl^1(T)$, $T \in \mathcal{F}_T$ nicht vorkommt, kommt er in unserer Inflationsspezies nicht vor.

Beweis zu Bemerkung 6: Sei $n \geq 9$. Wir wollen zeigen: Liegt an der längsten Seite eines Steins vom Typ H einer vom Typ A , so liegt an der Seite mit Länge s_2 von H kein Stein vom Typ D . Dazu zeigen wir einfach, dass dieser Cluster aus den drei Steinen nicht möglich ist:

BILD

Aus der Liste 1 liest man ab, dass an dem D bei \diamond ein Stein vom Typ D, E oder F liegen muss. In allen Fällen entsteht aber eine nicht auffüllbare Lücke: Ist der Winkel $\alpha' = (m - 1)\pi/n$, sieht man sofort, dass kein Stein passt. Kein Stein, der eine Seite der Länge s_2 besitzt, hat einen Innenwinkel von $(m - 1)\pi/n$. Ist der Winkel $\alpha = m\pi/n$, so ist die eine Seite s_3 lang und die andere s_m . Auch dazu gibt es keinen passenden Stein, wenn man die Eigenschaft vtv beachtet.

Für den Fall $n = 7$, bei dem kein D vorkommt, gilt die analoge Aussage mit C statt D . Der Beweis dazu muss anders geführt werden, ist aber mit Bemerkung 5 auch einfach.

Beweis zu den Eigenschaften der Trapeze:

zu 1: Aus Hinweis 1.3.1 erhalten wir (vtv \Rightarrow lfc), dass die Trapezpflasterungen von lokal endlicher Komplexität sind. Ausserdem sind sie nach unserer Definition auch repetitiv. Denn: Wir zeigten schon, dass bei wiederholter Anwendung unserer Inflationsvorschrift auf einen Stein S dieser im Inneren der entstehenden Cluster wieder auftaucht. Lässt man die Forderung 'im Inneren' fallen, so ist das ausser für den Musterstein L im ersten Inflationsschritt der Fall. Ausserdem gilt, dass jeder Stein bei der wiederholten Inflation eines beliebigen Steins irgendwann auftaucht: \mathcal{F}_T ist minimal. Für keinen Musterstein S kann es demnach einen ϱ -Cluster beliebiger Größe geben, in dem kein Stein vom Typ S vorkommt. In diesem liegt nämlich ein Superstein $\eta^s T_k$. Für großes s liegt darin, da \mathcal{F}_T minimal ist, ein Superstein $\eta^r S$, $r < s$. In diesem liegt wiederum ein Stein vom Typ S . (Für die Steine, die in ihrem Inflationscluster selbst wieder erscheinen, nämlich alle ausser L , ist das klar. Für L muss man noch folgendes überlegen: In $\text{infl}(L)$ liegt ein K . In $\text{infl}(K)$, also auch in $\text{infl}^2(L)$ liegen ein K und ein L . Aus dem K resultiert in jedem nächsten Schritt wieder ein K und ein L . Also erscheint ein L in jedem $\text{infl}^s(L)$ für $s \geq 2$.) Also muss das ϱ für jeden Stein beschränkt sein, somit gibt es ein größtes ϱ , dass für alle Mustersteine gilt. Zwei beliebige disjunkte ϱ -Cluster enthalten demnach immer zwei Steine desselben Typs. Diese zwei sind ihrerseits in einem größeren ϱ' -Cluster enthalten. Also gibt es auch eine Konstante ϱ' , so dass in jedem ϱ' -Cluster zwei Steine desselben Typs liegen.

Nehmen wir nun einen beliebigen Cluster $Cl \in \mathbf{CI}(\text{TP}_n)$. Alle erlaubten Cluster kommen in einem Cluster kongruent zu $\text{infl}^s(T)$, $T \in \mathcal{F}_T$, $s \in \mathbf{N}$ vor. Also gibt es einen Superstein $\eta^s T$, der Cl enthält. Da jede Trapezpflasterung alle Steintypen enthält, kommt dieser Cluster in jeder Pflasterung vor. Zu diesem gibt es nach dem eben Bemerkten einen Superstein $\eta^{s+k} T$, der $\eta^s T$ mehrfach enthält. Also enthält er auch einen zu Cl kongruenten Cluster. Daher kann man ϱ' so wählen, dass zu jedem Cluster $Cl \in \mathbf{CI}(\text{TP}_n)$ für beliebige x und \mathcal{P} gilt: $Cl \in (x + \varrho' \mathbf{B}^d) \cap \mathcal{P}$. Damit ist die Definition erfüllt, die Trapezpflasterungen sind repetitiv.

Warum sind die Trapezpflasterungen nun nichtperiodisch? Wir zeigen, dass jede eine eindeutige Deflation hat. Dann folgt mit Satz xx die Nichtperiodizität. Dazu gehen wir so vor: Wir listen Cluster aus TP_n auf, zu denen es jeweils nur eine Möglichkeit gibt, ihnen einen Superstein zuzuweisen. Tritt in TP_n ein solcher Cluster auf, kann man ihm also eindeutig einen Superstein zuordnen (Durch die Lage des Clusters ist dann auch die Lage des Supersteins gegeben). Das ist für alle Steine bis auf B und H möglich. Führt

man die beschriebene Methode durch, bleiben in der Pflasterung nur Lücken, denen man durch ihre Form dann die Supersteine B oder H zuordnen kann. Bis auf eine Ausnahme, dazu später.

— Ein L kommt ausschliesslich in einem Superstein K vor.

— Die Konstellation $A \cup K$ in $\text{infl}(A)$ gibt es in keinem anderen Superstein. Ausserdem liegt die kurze Seite von A immer im Inneren eines Supersteins, so dass diese Konstellation auch nicht durch zwei Supersteine bewirkt werden kann.

— Auch die Konstellation $K \cup K$ aus $\text{infl}(L)$ gibt es in keinem anderen Superstein. Da auch die hier betrachtete gemeinsame Seite immer im Inneren eines Supersteins liegt, können auch diese beiden K nicht zu zwei verschiedenen Supersteinen gehören.

Die genannten Cluster sind in Bild xx 1 schattiert dargestellt. Für T_3, \dots, T_m ist der Cluster, der eine eindeutige Zuordnung ermöglicht, der Inflationscluster selbst. Dazu müssen wir zeigen, dass dieser nicht aus der Kombination mehrerer Supersteine entstehen kann. Das ist gleichbedeutend damit, dass im Inneren dieses Clusters keine Kanten von Supersteinen liegen können. Da kein Inflationscluster von T_k Teilmenge eines anderen ist, ist klar, dass diesem Cluster dann nur der Superstein T_k zugeordnet werden kann.

Da jede Steinseite bei der Inflation in zwei oder drei Seiten zerlegt wird, und da unsere Steine alle konvex sind und Ecke-auf-Ecke liegen, gibt es sehr wenige Möglichkeiten, wie Kanten im Inneren des Inflationsclusters überhaupt verlaufen könnten: Es sind genau drei. Diese sind in Bild xx 2 dargestellt. Dabei gilt diese Darstellung tatsächlich für alle Inflationscluster zu T_3, \dots, T_m , weil nicht die Steine selbst, sondern nur die Lage der Kanten zueinander wichtig sind. Diese folgt für all diese T_k dem gleichen Muster, wie man aus der Inflationsvorschrift ablesen kann.

Möglichkeit I steht im Widerspruch zur Zerlegung der Steinkanten. Offensichtlich liegt hier bei der fett gezeichneten Supersteinkante eine Zerlegung $\eta s_k = s_{k-1} + s_k + s_{k+1}$ vor. Dabei zeigt aber der Pfeil der mittleren Kante immer auf die kürzere Kante, nicht wie im Bild auf die längere.

Die Möglichkeiten II und III scheiden aus, weil der Cluster SUT nie an der Aussenkante eines Inflationsclusters $\text{infl}(T_k)$ liegt. Liegen Trapeze so aneinander wie hier S und T , dann liegt einer der beiden Steine immer komplett im Inneren von $\text{tr}(C_{T_k})$, wie man aus der Inflationsvorschrift für Trapeze abliest.

Also können wir diesen Clustern eindeutig ihre Supersteine zuordnen. Führt man die bis hierher beschriebenen Zuordnungen durch, bleiben nur Lücken, die mit Supersteinen vom Typ B oder H gefüllt werden müssen. Der Inflationscluster zu B enthält kein E , der zu H aber schon. Damit können wir den Lücken eindeutig die Supersteine zuordnen bis auf den Fall, der im Bild xx 3 dargestellt ist. Eine Lücke dieser Form könnte eventuell auf zwei Weisen durch ein B und ein H gefüllt werden. Hier ist aber durch die Lage der kleinen Steine vom Typ H klar, wie die Zuordnung zu geschehen hat.

Somit erhalten wir zu jeder Trapezpflasterung eine eindeutige Deflation. Also sind alle nichtperiodisch.

zu 2: Dadurch, dass in den Mustersteinen als Winkel nur Vielfache von π/n auftauchen, können auch in jedem Inflationsschritt nur diese Winkel vorkommen.

zu 3 und 4: Das lässt sich einfach aus den Listen der Nachbarschaften ablesen, wenn man zusätzlich die Ecksterne aus Eigenschaft 7 betrachtet.

zu 5: Betrachte zwei Eckpunkte von TP_n , die s_1 weit auseinanderliegen. Wenn diese nicht durch eine Kante verbunden sind, wird die Strecke zwischen ihnen entweder von einer Kante oder einem Kantenzug gekreuzt oder nicht. Im letzteren Fall liegen beide in einem gemeinsamen Stein und sind aufgrund der Form der Steine doch durch eine Kante der Länge s_1 verbunden, denn kein Musterstein besitzt zwei solche Eckpunkte, für die das nicht zutrifft. Im ersten Fall — zwischen den Eckpunkten liegt eine Kante oder ein Kantenzug — müsste ein Musterstein existieren, in dem ein Eckpunkt dieses Steins von einer ihn nicht berührenden Kante dieses Steins einen Abstand kleiner als s_1 hat. Auch einen solchen gibt es nicht. Also sind die Eckpunkte durch eine Kante verbunden.

zu 6: Es folgt ein Bild, das beschreibt, wie man aus einem erlaubten Cluster eine periodische Pflasterung zusammensetzen kann. Der Cluster, im Bild schattiert, kommt vor in $infl(T_m)$. In der so definierten Pflasterung finden sich nur sechs Kongruenzklassen von Ecksteinen. Ein Repräsentant jeder Klasse ist im Bild durch eine Nummer an seinem Wurzelpunkt gekennzeichnet. Diese sechs kommen alle auch in TP vor, also kann eine Liste aller Ecksterne, die in TP vorkommen, keine local matching rule für diese Pflasterungen definieren.

Bild

zu 7: Die folgenden Überlegungen gelten für $n > 7$. Für $n = 7$ ist die Aussage auch richtig, man kann sie beispielsweise aus Liste 1 herleiten.

Wir überlegen, welche Winkel in einem Eckstern auftreten können. Dazu schreiben wir hier statt 'Winkel $k\pi/n$ ' einfach Winkel k . Generell haben die Steine Innenwinkel $1, m, m+1, m+2$ und $2m-1$. Der Winkel 1 tritt nur bei A auf, $m+2$ nur bei H und L , $2m-1$ nur bei K und L . Mit Hilfe von Liste 1 haken wir zunächst die beiden letztgenannten Fälle ab, was nicht schwerfällt, da für H und L die Nachbarn an der Stelle, wo diese Winkel auftreten, immer die gleichen sind. Für K gibt es auch nur drei Möglichkeiten. Die vier damit möglichen Ecksterne sind die im Bild xx (E.1 – E.4). Welche kombinatorischen Möglichkeiten gibt es nun für Ecksterne mit Winkeln $1, m$ und $m+1$? Die vorkommenden Winkel müssen sich zu einem Vollwinkel addieren, also zu $2n = 4m + 2$. Das ergibt 12 Möglichkeiten:

Nr.	$m+1$	m	1	Nr.	$m+1$	m	1
1.	2	2	0	7.	1	0	$3m+1$
2.	2	1	m	8.	0	4	2
3.	2	0	$2m$	9.	0	3	$m+2$
4.	1	3	1	10.	0	2	$2m+2$
5.	1	2	$m+1$	11.	0	1	$3m+2$
6.	1	1	$2m+1$	12.	0	0	$4m+2$

Aufgrund von Bemerkung 5 können höchstens drei Steine vom Typ A nebeneinander liegen. Wegen $2m \geq 8$ müssten in den Fällen 3,6,7,10,11 und 12 aber jeweils mehr als drei Steine vom Typ A nebeneinander liegen. Daher können wir diese Fälle generell aussch-

liessen. Für große m ($m \geq 10$) würden aus diesem Grund überhaupt nur die Fälle 1,4 und 8 in Frage kommen. Für kleinere m müssen wir die Möglichkeiten einzeln abhandeln.

In den Fällen 2,5 und 9 müssen wegen $m \geq 4$ mindestens zwei A nebeneinander liegen wie in Bild xx 1. Die Fälle 2 und 5 scheiden aus, da neben einem A entweder Steine mit Winkel 1 oder mit Winkel m liegen. Es werden (siehe Bild xx 2) also, da maximal 3 A nebeneinander liegen, mehr als zwei Winkel m benötigt.

Fall 9 kann ebenfalls nicht auftreten. In einem Eckstern mit diesen Winkeln müssen wegen $m + 2 \geq 6$ mindestens zwei A nebeneinander liegen, wegen Bemerkung 5 sind es maximal drei. In beiden Fällen kann man zu keinem erlaubten Eckstern gelangen (siehe Bild xx 3).

Fall 4 scheidet auch aus. Es gibt nur zwei verschiedene Anordnungen der Winkel (Bild xx 4). (b) ist nicht möglich, da ein A keinen Nachbarn hat, der diese Konstellation gestatten würde. (a) liesse sich wegen der möglichen Nachbarn von A nur auf zwei Arten realisieren (Bild xx 5). Bei beiden entstünde eine nicht füllbare Lücke, denn: Nach Liste 2 bedingen die Nachbarn von B an der im Bild xx 6 mit \diamond gekennzeichneten Stelle einen Stein mit Innenwinkel m und Seiten der Länge s_1 und s_{m-1} ; die Nachbarn von H bedingen bei \triangle einen Stein mit Innenwinkel $m+1$ und Seiten der Länge s_1 und s_m . Solche Mustersteine kommen in unserer Musterfamilie nicht vor (Bild xx 6).

Es bleibt Fall 6 zu untersuchen. Die Winkel können hierbei auf drei Weisen angeordnet sein (Bild xx 1). c.) kann nicht auftreten, da es keinen Stein gibt, der zwei Seiten der Länge s_m hat, die einen Innenwinkel m bilden. b.) kommt tatsächlich vor, nämlich in den Ecksternen E.5 und E.6. Aufgrund der möglichen Nachbarn von A gibt es keine weitere Möglichkeit, dass Steine in dieser Konstellation auftreten.

a) kommt ebenfalls in TP_n vor, als Eckstern E.7. Die Nachbarn von A würden zwei weitere Ecksterne mit dieser Anordnung erlauben, C.1 und C.2 in Bild xx 2. Wir werden aber nun zeigen, dass C.1 ausschliesslich aus der Inflation von C.2 entstehen kann und umgekehrt C.2 ausschliesslich aus C.1. Da diese Cluster in $infl^1(T)$, $T \in \mathcal{F}$ nicht vorkommen, kommen sie in keiner unserer Pflasterungen vor.

Wegen der Eindeutigkeit der Nachbarn von H resultiert aus C.1 sofort der größere Cluster in Bild xx 3 links. Wegen Liste 1 müssen dann die fett gezeichneten Kanten in diesem Diagramm Kanten von Supersteinen T , T' sein. T und T' können, wie ein Blick auf die Inflationsvorschrift uns zeigt, nur Supersteine $infl(A)$ oder $infl(B)$ sein. $infl(A)$ kommt allerdings nicht in Frage, da an der kurzen Seite von A nur K oder C liegen können. Das sähe anders aus als im Bild. Daher müssen T und T' Supersteine vom Typ $infl(B)$ sein. Aufgrund der erlaubten Nachbarschaften von B und der schon bekannten Steine oberhalb der fettgezeichneten Kanten müssen die gestrichelt angedeuteten Kanten 1,2 und 3 auch Kanten von Supersteinen sein. Daraus folgt wiederum, dass zwischen 1 und 2 und zwischen 2 und 3 Supersteine vom Typ $infl(A)$ liegen und rechts und links daneben Supersteine vom Typ $infl(B)$. Das heisst: Der Eckstern C.1 kann nur aus der Inflation von C.2 stammen.

Zu C.2: Aufgrund der Lage der Steine vom Typ B ist klar (vgl. Liste 2), dass die fett gezeichneten Kanten Kanten von Supersteinen sind (Bild xx 3 rechts). Als weitere Kanten

von Supersteinen kommen die Kanten 1,2 und 3 in Frage, wobei noch nicht feststeht, ob nur eine von diesen, zwei oder alle drei. Betrachten wir deshalb die beiden Steine vom Typ A . Lügen beide in demselben Superstein, so läge neben ihnen – der Inflationsvorschrift zufolge – mindestens ein H . Also gehören sie zu zwei Supersteinen. Die gemeinsame Kante der A s liegt aber nur in Supersteinen vom Typ $\text{infl}(A)$ aussen. Daher müssen 1,2 und 3 Kanten von Supersteinen sein. So, wie die vier Steine vom Typ B liegen, müssen sie wegen der Inflationsvorschrift zu Supersteinen des Typs H oder D gehören. T und T' können keine Supersteine vom Typ D sein, da D nie an A liegt. Also sind T und T' vom Typ H . Wegen Bemerkung 6 sind S und S' dann nicht vom Typ D . Also sind T, T', S und S' vom Typ H . Daher kann C.2 nur aus der Inflation von C.1 entstehen. Nach dem anfangs erwähnten können also C.1 und C.2 nicht auftreten. Damit ist der Beweis komplett: der einzige nicht abgehandelte Fall aus der Tabelle ist Nr. 1. Wir wollten aber nur Ecksterne untersuchen, wo sich nicht vier Steine treffen.

zu 8: Nach dem eben angemerkten ist klar, dass in einem Eckstern aus vier Steinen nur die Winkel m und $m + 1$ vorkommen. Warum gleiche Winkel sich nicht gegenüberliegen, wird an Bild xx klar. Seite 1 habe Länge s_k , $2 \leq k \leq m - 1$. Seite 2 muss aufgrund der Eigenschaften der Steine (siehe Abschnitt 2.2: Eigenschaft 3 der Trapeze) und dem vorgegebenen Innenwinkel $m+1$ Länge s_{m-k} haben. Das gilt auch für $k = 1$, man betrachte dazu die Steine A, B, C, H, K und L . Seite 3 muss daher Länge s_{k+1} haben. Seite 4 muss daher Länge s_{m-k-1} haben. Seite 1 muss deshalb Länge s_{k+2} haben. Widerspruch!

zu 9: Mit den Eigenschaften 7 und 8 folgt diese Eigenschaft sofort: Das Drehzentrum kann nicht im Innern eines Steins liegen, da kein Stein drehsymmetrisch ist. Also muss es in einem Eckpunkt liegen. Aber auch kein Eckstern hat die geforderte Drehsymmetrie.

Beweis zu Bemerkung 7: Die Bausteine a, b und c liegen in den Supersteinen vom Typ $\text{infl}(T_{m-2}), \text{infl}(T_{m-1})$ und $\text{infl}(T_m)$ (Bild xx). Wir werden anhand der Nachbarschaften dieser Steine die Bemerkung beweisen. Dabei werden jeweils nur zwei Seiten der beteiligten Trapeze betrachtet (Bild xx). Erinnern wir uns, dass die Trapeze aus je zwei Dreiecken gebildet wurden. Das im Bild mit D_{m-2} bezeichnete Dreieck ist sowohl als Teil von T_{m-2} als auch als Teil von T_{m-1} aufzufassen. Da für diese Steine alle längenbedingt möglichen Nachbarschaften auftreten, müssen wir diese Fälle nicht gesondert behandeln, sondern können allein mit den Nachbarschaften dieser Dreiecke arbeiten. Wir sind hier ja nicht an der genauen Zerlegung der Supersteine interessiert, sondern allein an der Lage der Bausteine der Grenzkanten innerhalb der Supersteine. Eigentlich müssten wir noch weiter unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist. Wir führen hier aber nur den letzteren Fall durch, da die Argumente nahezu gleich lauten. Lediglich die entstehenden Figuren, die von den Grenzkanten gebildet werden, sehen unterschiedlich aus.

In Bild xx 2 sind für D_{m-2} , also den Supersteinteil, der a enthält, die möglichen Nachbarschaften an den zwei betreffenden Kanten dargestellt. Für jede Kante kommen als Nachbarn zwei Dreiecke — also je vier nicht unbedingt verschiedene Trapeze — in Betracht. Daraus resultieren vier Kombinationsmöglichkeiten (Bild xx 2 rechts). Die Möglichkeit oben rechts scheidet aber wegen Eigenschaft 8 von TP_n sofort aus. Die Anordnung unten links ist auch unmöglich, da sich die Lücke bei \diamond (Winkel $(m + 2)\pi/n$) nicht füllen

lässt. Die anderen beiden Möglichkeiten sind also die einzigen, wie ein Baustein a in TP_n auftritt. Diese sind uns auch schon aus Bild xx bekannt: $B.0$ und $B.1$.

In Bild xx 3 sind die möglichen Nachbarschaften für D_{m-1} und D_m dargestellt. Da b und c immer im Inneren eines Supersteins T_{m-1} oder T_m liegen, ist klar, dass sie nur an ihren Endpunkten andere Grenzkantenbausteine berühren können. Um zu überprüfen, ob das auch immer der Fall ist, brauchen wir jetzt nur noch die fünf möglichen Nachbarschaften für D_{m-1} und die sechs möglichen für D_m durchzugehen. In welcher Kombination diese auftreten kann uns hier egal sein: Es ist nur wichtig, ob an den Endpunkten eines Bausteins immer ein weiterer liegt.

Eine der fünf Möglichkeiten für D_{m-1} ist schon in Bild xx 2 abgehandelt. Eine ist in Bild xx 3 rechts oben dargestellt, die anderen drei sind die drei linken Objekte in der unteren Reihe. Die untere Reihe stellt gleichzeitig die sechs Möglichkeiten für D_m dar. Offenbar stimmt die Behauptung: Immer berührt ein Baustein an einem Endpunkt einen anderen Baustein.

Beweis zu Bemerkung 8: Um zu zeigen, dass die Rhombenpflasterung wohldefiniert ist, zeigen wir, dass jeder Eckstern von TP_n zu einem Teil der Rhombenpflasterung führt. 'Korrekt' heisse ein Eckstern mit Wurzel x , wenn entweder x von einem Rhombus aus Diagonalen umgeben ist oder von x drei oder mehr Diagonalen ausgehen, wobei jeder beteiligte Stein mindestens eine der von x ausgehenden Diagonalen enthält und x im Inneren der konvexen Hülle dieser Diagonalen liegt (Bild xx 1). Treffen wir bei der folgenden Untersuchung auf einen nicht korrekten Eckstern, so sind die Rhombenpflasterungen nicht wohldefiniert. Umgekehrt folgt aus der Korrektheit aller Ecksterne noch nicht die Wohldefiniertheit der Rhombenpflasterungen, es bleibt noch etwas zu zeigen. Eckpunkte der Trapezpflasterung, die eine Diagonale berühren, werden als 'schwarze' Eckpunkte bezeichnet; Eckpunkte, die keine Diagonale berühren als 'weisse'. Zuerst zeigen wir folgende Hilfsaussagen, mit denen sich die Untersuchung der Ecksterne auf Korrektheit sehr viel kürzer gestaltet, als wenn man alle Ecksterne auflisten würde. Die Beweise zu den Hilfsaussagen sind zwar mühsam, aber der eigentliche Beweis wird dadurch wesentlich kürzer.

Lemma 1 *Bei zwei benachbarten Steine in TP_n , die je eine Diagonale besitzen, treffen sich diese Diagonalen in einem ihrer Eckpunkte. Bei benachbarten Steinen, von denen mindestens einer zwei Diagonalen besitzt, berührt mindestens eine dieser beiden Diagonalen eine Diagonale des anderen Steins.*

Um das zu zeigen, muss man lediglich alle Nachbarschaften aus Liste 1,2 und 3 daraufhin prüfen, unter Beachtung der Diagonalenregeln und der Ausnahmen. Das ist nicht schwierig, nur zeitraubend.

Lemma 2 *Sind in TP_n zwei schwarze Eckpunkte durch eine Kante verbunden, so hat diese Länge s_1 oder s_m .*

Beweis zum Lemma: Gegeben seien zwei Eckpunkte x, y und die sie verbindende Kante u mit Länge s_k . x sei ein schwarzer Eckpunkt. Ist zunächst $3 \leq k \leq m - 2$, so müssen

die beiden Steine, die an u liegen, Trapeze sein (Bild xx 2). Wegen Lemma 1 muss dann bei z eine weitere Diagonale anschliessen. Für die Seiten v und w kommen als mögliche Längen nur s_2, \dots, s_{m-2} in Frage. Bei \diamond liegt daher ein weiteres Trapez oder ein H oder L , ebenso bei \triangle . In keinem dieser Fälle ist y schwarzer Eckpunkt.

Ist die Seite u s_2 lang, so kann es sich bei den beteiligten Steinen S und T nur um C, D, E, H oder L handeln. In keinem daraus resultierenden Fall kann y schwarz sein (Bild xx 3).

Ist die Seite u s_{m-1} lang, sind entweder beide Seiten v, w s_1 lang oder mindestens eine der beiden ist s_2 lang (Bild xx 4). Im letzten Fall ist z mit x durch eine Diagonale verbunden, wie man aus den Diagonalenregeln ablesen kann. Daher ist z schwarz und y muss weiss sein, da wir die Aussage für s_2 schon gezeigt haben. Im anderen Fall — beide Seiten v, w haben Länge s_1 — sind die Endpunkte z_v, z_w dieser Seiten aufgrund der Diagonalenregeln ebenfalls durch eine Diagonale mit x verbunden (Bild xx 4 rechts). Also bilden diese Seiten mit der Seite u jeweils den Winkel $(m+1)\pi/n$, denn die Länge aller Diagonalen ist s_m . Aus diesem Grund kann rechts von y kein K liegen: Es entstünde eine nicht füllbare Lücke. Folglich muss aufgrund der bekannten Eigenschaften der Steine an der als dünne Linie angedeuteten Stelle eine Seite der Länge s_m liegen. Die zugehörigen Steine S', T' müssen vom Typ A, B oder H sein. Wegen Lemma 1 und den Diagonalenregeln sind z_v und z_0 durch eine Diagonale verbunden, ebenso z_w und z_0 (Bild xx 5). Jetzt gilt es also nur noch auszuschliessen, dass die Kante der Länge s_m ebenfalls Diagonale ist, was bis hierher noch durchaus möglich sein könnte. Das kann aber nur eintreten, falls die beiden beteiligten Steine ein A und ein H sind, oder zwei H oder zwei B (Bild xx 5 rechts). Unter der Voraussetzung, dass x schwarz ist und die Diagonalen wie in Bild xx 5 links liegen, können die Steine nur im blauen Bereich liegen. Damit ist in Fall 1 y weiss, in Fall 2 wird wegen Ausnahme 1 y verschoben und ist jetzt s_m weit von x entfernt und in Fall 3 ist x immer weiss, wenn die Seite mit Länge s_m eine Diagonale ist. Dieser Fall kann hier also gar nicht eintreten. Also sind zwei schwarze Eckpunkte in TP_n auch nie durch eine Kante der Länge s_m verbunden. Damit ist Lemma 2 bewiesen.

Nun beweisen wir die Korrektheit aller Ecksterne. Zunächst betrachten wir nur die, bei denen der Wurzelpunkt x des Ecksterns keine Seiten der Länge s_1 und s_m berührt.

Ist x weisser Eckpunkt, so müssen die vier umliegenden Eckpunkte schwarz sein. Denn aus den Diagonalenregeln folgt direkt, dass nie zwei weisse Eckpunkte durch eine Kante in TP verbunden sind, da es schon keinen einzelnen Stein gibt, der zwei solche Ecken aufweist (Daher wurde in Ausnahme 1 der Eckpunkt verschoben). Weil die umliegenden vier Eckpunkte schwarz sind, sind sie alle durch Diagonalen verbunden (Beachte hierbei die Fälle H und L : Diese Steine haben zwei Diagonalen, aber diese liegen so, dass zwei schwarze Ecken des Steins durch eine Diagonale verbunden sind, falls zwischen ihnen auf dem Rand des Steins zwei Kanten liegen, was hier der Fall ist). Somit ist x von einem Rhombus umgeben (Bild xx 1).

Ist x schwarzer Eckpunkt, so folgt aus Lemma 2, dass die vier umliegenden Eckpunkte weiss sind, da keine Seiten mit Länge s_1 oder s_m beteiligt sind. Wegen Lemma 1 liegt in jedem der vier Steine eine Diagonale. Da Ecksterne aus vier Steinen immer Winkel $m\pi/n$

und $(m+1)\pi/n$ haben und die Diagonalen in dem auf Bild xx 2 schattierten Bereich liegen müssen (vgl. Diagonalenregeln), liegt x im Inneren der konvexen Hülle der Diagonalen. Also ist dieser Eckstern auch korrekt nach unserer Definition.

Die sieben Ecksterne aus mehr oder weniger als vier Steinen sind schnell auf ihre Korrektheit hin untersucht (Bild xx 3). Bleiben nur noch die Ecksterne aus vier Steinen zu untersuchen, bei denen die Seitenlängen s_1 und s_m auftauchen. Nach dem, was wir aus den Beweisen zu den Eigenschaften 7 und 8 von TP_n wissen, können die vier den Wurzelpunkt x berührenden Kanten nur auf die beiden Weisen wie in Bild xx 1 angeordnet sein.

Zu Fall I: Entweder x ist weiss oder x ist schwarz. Ist x weiss, so müssen nach dem oben erwähnten die umliegenden Eckpunkte schwarz sein und sie sind — da in jedem Stein zwei Ecken durch eine Diagonale verbunden werden, falls zwischen ihnen ein Punkt ohne Diagonale liegt — jeweils durch eine Diagonale miteinander verbunden (Bild xx 2). Also ist x von einem Rhombus umgeben, somit sind diese Ecksterne korrekt. Ist x schwarz, so sind zumindest drei der vier umliegenden Eckpunkte weiss, was aus den Seitenlängen und Lemma 2 folgt. x muss mindestens eine Diagonale berühren, beispielsweise die des Steins S . Wegen Lemma 1 berührt x dann auch die Diagonalen von S' und T , und da die Diagonale von T eine Diagonale von T' berühren muss — was nur im Punkt x geschehen kann — läuft von x aus in jeden Stein eine Diagonale hinein. Wie in Bild xx-1 2 sind auch diese Ecksterne korrekt.

Zu Fall II: Ist x weiss, sind diese Ecksterne aus demselben Grund wie in Fall I korrekt. Ist x schwarz, so ist der Punkt y in Bild xx 3 aufgrund von Lemma 2 weiss. y berührt also keine Diagonale von S und keine von T . Also gehen von x aus Diagonalen in diese Steine hinein. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Die Kante u mit Länge s_m ist Diagonale (Bild xx 4 links) — dann sind diese Ecksterne korrekt — oder sie ist es nicht. Im zweiten Fall unterscheiden wir wieder zwei Möglichkeiten: Die (oder eine) Diagonale von S' liegt wie 1 (Bild xx 4 mitte) oder wie 3 (Bild xx 4 rechts). Bei der ersten Möglichkeit muss die (oder eine) Diagonale von T' wie 2 liegen, denn: Der Punkt z wird von keiner Diagonalen des Steins S' getroffen. Wegen Lemma 1 muss eine Diagonale von S' eine von T' berühren. Dies kann also nur im Punkt y geschehen. Also liegt die Diagonale von T' wie 2.

Die zweite Möglichkeit — die Diagonale von S' liegt wie 3 in Bild xx 4 rechts, also liegt die von T' auch wie 4 und u ist keine Diagonale — kann nicht eintreten. Da sich wegen Lemma 1 Diagonalen von S und S' berühren müssen, geht von z_0 aus eine Diagonale nach S hinein. S muss also zwei Diagonalen besitzen. Dasselbe gilt aus dem gleichen Grund auch für T . Also sind S und T Steine vom Typ B (Ausnahme 3), K oder L . Ein Blick auf Liste 2 zeigt, dass nur K in Frage kommt. So, wie die Diagonalen liegen, müssen die Steine liegen wie in Bild xx 5. Dann gibt es aber nur noch zwei Möglichkeiten, wenn man die Lage der Diagonalen und die Nachbarn von K in Betracht zieht (Bild xx 6).

In Bild xx 6 links müssen die Steine vom Typ K aufgrund der Lage der Diagonalen rot sein. Dann ist aber u Diagonale im Widerspruch zum Angenommenen. In Bild xx 6 rechts müssen die beiden Steine vom Typ K wegen der Lage der Diagonalen blau sein. Die beiden Steine vom Typ B sind — ebenfalls wegen den Diagonalen — rot oder blau mit Ausnahme 2. Rot ist auszuschliessen, da die anderen Steine blau sind. Folglich sind

die B s blau und liegen in den Ecksternen II oder III von Ausnahme 2. Damit erhalten wir die Konstellation in Bild xx 6. Die Lücke bei \diamond lässt sich nun aber nur noch mit zwei Steinen vom Typ A füllen und wir gelangen zu Ausnahme 3. Dann ist aber u Diagonale im Widerspruch zum oben Angenommenen.

Damit sind auch alle Ecksterne korrekt, bei denen der Wurzelpunkt x eine Seite der Länge s_1 oder s_m berührt. Also sind alle Ecksterne korrekt.

Alle weissen Eckpunkte sind von einem Rhombus umgeben. Von einem schwarzen Eckpunkt gehen Diagonalen weg. Werden je zwei von diesen, wenn sie nebeneinanderliegen, auch zu einem Rhombus vervollständigt? Zunächst ist klar, dass keine nichtkonvexen Steine entstehen können. Das wäre ein direkter Widerspruch zur Korrektheit der schwarzen Ecksterne. Es entstehen auch tatsächlich immer Rhomben, wie man nun zeigen kann:

Bilden die erwähnten Diagonalen einen Winkel π/n , so sind ihre Endpunkte genau s_1 voneinander entfernt. Die Endpunkte sind Eckpunkte einer Trapezpflasterung, also sind sie wegen Eigenschaft xx durch eine Kante verbunden (Bild xx 1). x und y sind korrekt, also gehen von ihnen weitere Kanten aus. x und y liegen in deren konvexer Hülle, Diagonalen kreuzen sich nie (wie man leicht einsieht), und die Winkel zwischen zwei Diagonalen sind immer von der Form $k\pi/n$. Folglich müssen zwei weitere Diagonalen liegen wie im Bild xx 2. Zwei Diagonalen die einen Winkel π/n bilden, führen also immer zu einem schmalen Rhombus mit Winkeln π/n und $2m\pi/n$.

Bilden andererseits je zwei nebeneinanderliegende Diagonalen einen Winkel $k\pi/n$, $2 \leq k \leq 2m - 1$ (Bild xx 2), so resultiert daraus ebenfalls ein Rhombus. Andernfalls könnte nämlich 1. in dem grau schattierten Bereich (ein Rhombus mit den beiden Diagonalen als Kanten) kein weisser Eckpunkt liegen (dieser wäre ja automatisch von einem Rhombus umgeben) und 2. können in diesem Bereich auch keine schwarzen Eckpunkte liegen, denn da alle schwarzen Ecksterne korrekt sind, würden sich die Diagonalen dieser Eckpunkte mit den von x und y ausgehenden kreuzen oder durch x und y hindurchführen. Da Diagonalen auch keine Steinkanten von TP_n kreuzen, müssen die beiden Diagonalen 1 und 2 in demselben Stein liegen (aber nicht von demselben Stein erzeugt worden sein). Alle Steine aus TP_n sind konvex, also muss die gesamte obere Hälfte des Rhombus in diesem Stein liegen. Einen so großen Stein gibt es aber fast nicht. Es kämen nur H, K oder L bei $k = 2$ in Frage. Aber ein Blick auf die Diagonalenregeln und die Form dieser Steine zeigt, dass dann doch in dem schattierten Bereich Eckpunkte liegen müssten, was wir eben ausgeschlossen haben. Somit führen also auch diese Diagonalen direkt zu einem Rhombus.

Es bleiben nur noch Diagonalen zu untersuchen, die einen Winkel $2m\pi/n$ bilden (Bild xx 3). Dann tritt an den Punkten x und y aber entweder einer der vorherigen Fälle auf und wir erhalten einen Rhombus. Oder von dort gehen ebenfalls Diagonalen weg, die einen Winkel $2m\pi/n$ mit den ersten beiden bilden, wobei jeweils keine weitere Diagonale zwischen diesen liegt. Dasselbe gilt für die Punkte w und z . Führen wir diese Überlegung weiter, so kommen neben Rhomben nur noch reguläre n -Ecke in Betracht (nichtkonvexe Steine haben wir schon ausgeschlossen). In diesen müssten allein aufgrund ihrer Größe schwarze oder weisse Eckpunkte liegen, das ergibt auch hier einen Widerspruch.

Damit ist endlich die Bemerkung bewiesen. Betrachten wir nämlich jetzt einen beliebigen weissen Eckstern, so ist dieser von einem Rhombus umgeben. Die Eckpunkte desselben sind schwarze Eckpunkte. Die von ihnen ausgehenden Diagonalen bilden Rhomben. Deren Eckpunkte sind schwarze Eckpunkte, diese führen zu weiteren Rhomben. Wiederholte Anwendung dieses Arguments liefert, dass jeder beliebig große Bereich der Rhombenpflasterung wohldefiniert ist, damit die gesamte Pflasterung. Jeder Eckpunkt der Rhombenpflasterung ist schwarzer Eckpunkt einer Trapezpflasterung. Da von jedem schwarzen Eckpunkt drei oder mehr Diagonalen ausgehen, berühren sich in jedem dieser Eckpunkte mindestens drei Steine der Rhombenpflasterung. Weil alle Ecken der Rhomben schwarze Eckpunkte von TP_n waren, ist auch die Rhombenpflasterung vtv. \square

Beweis zu den Unterschieden zwischen RP und den Pflasterungen von Whittaker und Whittaker Zunächst zeigen wir, dass in RP_n maximal zwei Steine mit Innenwinkel π/n so nebeneinanderliegen können, dass die Ecken, in denen dieser Winkel auftritt, zusammenliegen. Das heisst, der in Bild xx 1 gezeigt Cluster C kann nicht vorkommen. Die Steine in TP_n , aus denen in RP_n zwei Seiten mit diesem Winkel entstehen können, sind folgende: $K, L, B \cup A$ und $H \cup A$ im blauen und im roten Bereich, $H \cup H$ im roten Bereich und $B \cup B$ im blauen Bereich mit Ausnahme 1. Die einzigen Möglichkeiten, wie zwei dieser Winkel nebeneinanderliegen können, sind die beiden letztgenannten (dass es bei den anderen unmöglich ist, ist leicht zu überprüfen. Zu beachten ist dabei, dass $B \cup A \cup H$ zu einer anderen Konstellation führt, siehe Bild xx 2). Aus $H \cup H$ resultiert wegen Bemerkung 6 der Cluster in Bild xx 3, also in RP_n nicht der Cluster C . Für $B \cup B$ gilt, dass die weiteren vom Punkt x ausgehenden Diagonalen mit den Diagonalen 1,2 mindestens den Winkel $m - 1$ bilden müssen, da Diagonalen keine Kanten von Trapezen kreuzen (Bild xx 4). Also kann der Cluster C in RP_n nicht auftreten.

Auch können in RP_n keine Ecksterne mit mehr als sechs Steinen vorkommen. Wir haben schon festgestellt, dass in TP_n nur sieben Kongruenzklassen von Ecksternen mit mehr oder weniger als vier Steinen auftreten. Aus dem Beweis zur Korrektheit von RP_n erhalten wir, dass diese nicht zu einem Eckstern in RP mit mehr als sechs Steinen führen (Diese Ecksterne wurden dort einzeln untersucht). Also müssen wir nur noch zeigen, dass aus Ecksternen mit vier Steinen kein solcher resultiert. Von dem Wurzelpunkt dieses Ecksterns müssen mindestens sieben Diagonalen weggehen, wenn ein Eckstern in RP_n aus mindestens sieben Steinen entstehen soll. Also müssen wenigstens drei der vier beteiligten Steine zwei Diagonalen aufweisen. Es kommen dazu nur die Steine H, K, L und B mit Ausnahme 3 in Frage. L können wir aber sofort wieder ausschliessen, da die beiden Ecken von L , von denen die Diagonalen ausgehen, immer in Ecksternen aus drei oder sechs Steinen liegen (vergleiche auch Liste xx: L hat immer die gleichen Nachbarn). Auch H können wir ausschliessen, denn: Die Ecke von H , von der zwei Diagonalen ausgehen, liegt entweder in einem Eckstern mit sechs Steinen oder in dem von Bild xx-1 3, wo sich nur fünf Diagonalen im Wurzelpunkt treffen. Es bleiben nur noch Ecksterne zu untersuchen, an denen vier Steine beteiligt sind, von denen mindestens drei vom Typ B oder K sind. Ein Eckstern mit drei oder vier K kann es aufgrund der bei K auftretenden Winkel ($m + 1, 2m - 1$) nicht geben. Die B sind nur zu betrachten im Zusammenhang mit Ausnahme

3. Dabei liegen in den zu untersuchenden Ecksternen zwei (oder vier) B aneinander. Vier B können aber keinen Eckstern aus vier Steinen bilden. Somit erhalten wir als einzige verbleibende Möglichkeit die in Bild xx 1 beschriebene: Zwei Steine vom Typ B , ein K und ein weiterer Stein (eventuell noch ein K). Es müssen blaue Steine sein, weil Ausnahme 3 nur im blauen Bereich gilt. Die daraus resultierenden Ecksterne verwurzelt in x sind in Bild xx 2 dargestellt.

BILD

In den vier links dargestellten Ecksternen treffen sich maximal sechs Diagonalen. Der Eckstern rechts ist kongruent dem Eckstern ganz links, nur sind die Diagonalen nicht nach den Regeln von Ausnahme 1 eingezeichnet, sondern nach den gewöhnlichen Regeln für blaue Gebiete. Hier scheinen sich sieben Diagonalen zu treffen. Dieser Fall tritt jedoch nie auf. Denn: Bei \triangle kann nach Liste xx nur ein B, H oder L liegen. B und L lägen aber so, dass Kante 1 im Bild die Steinkante bildet. Dadurch entstünde eine nichtfüllbare Lücke. Also muss bei \triangle ein H liegen. Aus dem gleichen Grund muss rechts neben diesem noch ein H liegen. Wegen Ausnahme 1 erhalten wir dann die Diagonalen wie im Eckstern links. Damit ist bewiesen, dass in RP_n Ecksterne aus höchstens sechs Steinen bestehen können.

Als letztes müssen wir zeigen, dass in RP_n keine lokalen Drehsymmetrien mit $k > 2$ — damit auch keine Spiegelsymmetrien mit mehr als einer Achse — vorkommen. Angenommen, es gibt eine solche. Ein Rhombus ist D_2 -symmetrisch. Daher müsste das Drehzentrum schon auf einem Eckpunkt der Pflasterung liegen. In diesem müssten k Rhomben einen Eckstern bilden, wobei die Innenwinkel an diesem Punkt alle gleich sind. Als Winkel der Rhomben kommen vor: $w_i = \frac{i\pi}{n}$, $1 \leq i \leq n-1$. Daher muss gelten: $kw_i = \frac{2n\pi}{n}$. Das ist äquivalent zu $ki = 2n$ oder $k = \frac{2n}{i}$. Ist zunächst n prim, folgt: $k = 1$ oder $k = 2$. Widerspruch. Ist n nicht prim, kann k auch größer sein: Ein Teiler von $2n$. Andererseits muss $k \leq 6$ sein, da wir eben zeigten, dass in RP maximal sechs Rhomben in einem Eckstern liegen. Da n ungerade ist, bleibt nur $k \in \{3, 5, 6\}$ zu untersuchen. Schliessen wir zunächst $k = 5$ und $k = 6$ aus: Die zugehörigen Winkel der Rhomben sind dann $\frac{2\pi}{5}$ bzw. $\frac{2\pi}{6}$. Da hier $n \geq 9$ gelten muss, haben diese Winkel die Form $\frac{i\pi}{n}$ mit $i \geq 3$. Daraus folgt, dass der zum betrachteten Eckstern in RP_n gehörende Eckstern in TP_n keine Steine mit zwei Diagonalen besitzt. Denn in einem Stein mit zwei Diagonalen bilden diese einen Winkel $\frac{\pi}{n}$ oder $\frac{2\pi}{n}$. Also muss dieser Eckstern in TP_n aus fünf oder mehr Steinen bestehen. Da es nur fünf verschiedene solcher Ecksterne gibt, und diese wie schon gezeigt nicht zu einem Eckstern mit fünf- oder sechsfacher Drehsymmetrie führen, können wir diese ausschliessen. Den Fall $k = 3$ kann man auf ähnliche Weise widerlegen: Die Ecksterne aus drei oder sechs Steinen in TP_n führen zu keinem dreifach drehsymmetrischen Eckstern in RP . Wie kann nun ein Eckstern aus vier Steinen zu nur drei Diagonalen führen? Dazu müssen die Diagonalen zweier Steine aufeinanderliegen. Das kann nur vorkommen bei $A \cup A, H \cup H, K \cup K$ mit Ausnahme 1 und $B \cup B$ mit Ausnahme 3. Im letzten Fall erhält man aber Rhomben mit Winkeln $\frac{\pi}{n}, \frac{(n-1)\pi}{n}$, die hier nicht in Frage kommen. Für die Fälle $K \cup K$ mit Ausnahme 1 und $H \cup H$ genügt ein Blick auf die Diagonalenregeln: auch hier treten die falschen Winkel auf. Liegen zwei A so aneinander, dass ihre Diagonalen zur Deckung kommen, können wir aufgrund der bekannten Nachbarschaften sagen, dass der

— aus vier Steinen bestehende — Eckstern zusätzlich zwei K , zwei C oder ein K und ein C aufweist. Deren Diagonalen bilden zueinander immer einen Winkel $\frac{2\pi}{n}$, also keinen der gesuchten Winkel. Damit ist auch der letzte Fall abgehandelt und es ist gezeigt, dass in $\mathbb{R}P_n$ keine lokalen n -fachen Drehsymmetrien für $n > 2$ auftreten. \square

Literatur

- [B-S-J] M. Baake, M.Schlottmann und P.D. Jarvis: Quasiperiodic tilings with tenfold symmetry and equivalence with respect to local derivability, *J.Phys. A* 24 (1991), 4637–4654.
- [BORCH] W. Borchardt-Ott: *Kristallographie*, Springer-Verlag Berlin 1990.
- [BROC] *dtv Lexikon*, Deutscher Taschenbuchverlag mit Genehmigung des Verlages F.A.Brockhaus (1990).
- [DEB] N.G. de Bruijn: Algebraic theory of Penrose’s non-periodic tilings of the plane, *Math. Proc. A* 84 (1981) 39–66 (Teil II)
- [DANZ] L. Danzer: *Quasiperiodische Strukturen*, Vorl. Uni Dortmund WS 1995/96.
- [DO-D] L. Danzer und N. Dolbilin: Delone Graphs and certain species of such, Preprint, Institut für Mathematik, Universität Dortmund 1996.
- [GARD] M. Gardner: *Mathematische Hexereien*, Verlag Ullstein, Berlin 1980.
- [GERT] C. Gerthsen; H. Vogel: *Physik*, Springer-Verlag 1995 (18. Auflage).
- [GRUN] B. Grünbaum: The emperor’s new clothes: Full regalia, G string or nothing? *Math. Intelligencer* Vol 6, (1984), 47–53.
- [GR-SH] B. Grünbaum und G.C. Shephard: *Tilings and patterns*, Freeman, New York 1987.
- [HILB] D. Hilbert: *Gesammelte Abhandlungen*, Chelsea Publishing Company, New York 1965.
- [NI-D] K.-P. Nischke und L. Danzer: A construction of inflation rules based on n -fold symmetry, *Discrete Comput. Geom.* Vol 15, (1996), S. 221–236.
- [REIN] K. Reinhardt: Zwei Beweise für einen Satz über die Zerlegung der Ebene, *Tohoku Math. J* Vol 28, (1927), 221–225
- [SCHL] M. Schlottmann: *Geometrische Eigenschaften quasiperiodischer Strukturen*, Dissertation, Tübingen 1993.

[WAER] B.L. van der Waerden: *Algebra I*, Springer-Verlag Berlin 1971 (8. Auflage).

[W-W] E.J.W. Whittaker und R.M. Whittaker: Some generalized Penrose patterns from projections of n -dimensional lattices, *Internat. J. Mod. Phys. B* 4 (1990), 2217–2268.