xxx Aufbau paper

xxx irgendwie als “best practice” einordnen?

xxx gender disclaimer

1 Richtig Einsteigen

xxx Projekt schildern, Kurs einordnen

2 Example-based Learning and Cognitive Apprenticeship

3 Der Auffrischungskurs

3.1 Die Ausgangssituation

Die Technische Fakultät der Universität Bielefeld ist im Wesentlichen eine Informatikfakultät. Von den 17 Arbeitsgruppen der Technischen Fakultät widmen sich aktuell 14 der Informatik, drei der Biotechnologie. Die Fakultät bietet die Bachelorstudiengänge “Bioinformatik und Genomforschung” (BIG), “Naturwissenschaftliche Informatik” (NWI), “Kognitive Informatik” (KOI), “Medieninformatik und Gestaltung” (MIG) sowie “Molekulare Biotechnologie” (MBT) an. Die Studiengänge BIG, NWI und KOI sind im Wesentlichen klassische Informatikstudiengänge, mit einer frühen Spezialisierung auf einen der Forschungsschwerpunkte der Technischen Fakultät. Der Studiengang MIG ist eine Kombination aus Informatik- und Design-Studium. Der Studiengang Molekulare Biotechnologie wird in Zusammenarbeit mit der Fakultät für Biologie der Universität Bielefeld angeboten und ist stark an ein Biologiestudium angelehnt. Die im vorliegenden Text beschriebene Maßnahme richtet sich an die Studierenden in BIG, NWI, KOI und MIG.

Die Studierenden in BIG, NWI, KOI und MIG belegen im ersten Studienjahr die Pflichtvorlesungen “Mathematik für Informatik I und II” (jeweils 4 h Vorlesung und 2 h Übung pro Woche). Diese Vorlesungen behandeln Themen aus Analysis und Linearer Algebra, bis hin zu Extrema von Funktionen mit mehreren Veränderlichen, Differentialgleichungen und Jordanscher Normalform; eine Veranstaltung, wie sie für fast alle Informatik- oder Ingenieur-Studiengänge an deutschen Universitäten im ersten Studienjahr üblich ist. Die Vorlesung ist ein Serviceangebot der Fakultät für Mathematik, die Dozenten sind also Mathematiker, keine Informatiker. Jeweils am Ende des ersten Semesters findet eine Hauptklausur statt, etwa zwei Monate später — kurz vor Beginn des zweiten Semesters — findet eine Nachklausur statt. Im weiteren Verlauf des Studiums hören die Studierenden in BIG, NWI und KOI je nach Fach verschiedene weitere Mathematikvorlesungen: KOI, NWI: Differentialgleichungen, Stochastik (beide Pflicht); BIG: Diskrete Mathematik, Stochastik (beide Pflicht).

Viele Studierende haben insbesondere Probleme mit den Vorlesungen Mathematik I und II. Die Beobachtungen der letzten Jahre zeigen

- Eine uneinheitliche, aber oft hohe Durchfallquote in den Hauptklausuren und Nachklausuren zu Mathe I und Mathe II (Hauptklausur Mathe I 2010: 55 %, 2011: 48%, 2012:

12%, 2013: 58%).

- Viele Wiederholer, also Studierende aus höheren Semestern, die die Mathematikveranstaltungen mehrfach besuchen (ablesbar an den Matrikelnummern der Teilnehmer).

Beide Effekte bedingen sich gegenseitig: Hohe Durchfallquoten verursachen viele Wiederholer. Viele Wiederholer verursachen offenbar auch höhere Durchfallquoten: Studierende ohne Probleme in der Mathematik absolvieren die Klausur im ersten Studienjahr, werden also nur einmal gezählt. Studierende mit großen mathematischen Defiziten nehmen mehrmals an den Klausuren zu Mathe I und II teil, werden also mehrfach gezählt.

3.2 Der Auffrischungskurs

Um gezielt Studierende mit mathematischen Defiziten zu erreichen und zu fördern, wird im Rahmen des Projekts "richtig einsteigen." ein Auffrischungskurs angeboten. Dieser findet zwischen Hauptklausur und Nachklausur der jeweiligen Mathematikvorlesung statt, jeweils im März (für Mathe I) und im September (für Mathe II). Dieser Kurs findet jeweils zwei Wochen als Blockveranstaltung statt, mit täglich 4 h Unterricht. Die Teilnahme an dieser Veranstaltung ist freiwillig. Alle Teilnehmer der Vorlesungen Mathe I und II werden auf dieses Angebot hingewiesen. Zum Zeitpunkt des Verfassens dieses Textes haben zwei solcher Kurse stattgefunden, einer im September 2012 (zu Mathe II, circa 14 Teilnehmer), einer im März 2013 (zu Mathe I, circa 46 Teilnehmer, verteilt auf zwei Gruppen an verschiedenen Terminen).

3.3 Vorgehen und Methodik

Ich höre und vergesse, ich sehe und erinnere, ich tue und verstehe.

Die Vorlesung Mathematik für Informatik wird von Dozenten der Fakultät für Mathematik gehalten. Einige typische Eigenschaften dieser Vorlesungen sind

- Hohe Stoffdichte
- Hoher Abstraktionsgrad
- Wenige illustrierende Beispiele in der Vorlesung
- Anspruchsvolle Übungsaufgaben, viele Beweise
- Keine eingebauten Wiederholungen des Stoffs
- Kein Bezug zum eigentlichen Studienfach, hier Informatik

Viele Elemente, die zum Verstehen des Stoffs notwendig sind, müssen von den Studierenden eigenständig geleistet werden; etwa konkrete Beispiele durchrechnen, Veranschaulichung abstrakter Konzepte an Beispielen finden, einen Überblick der Zusammenhänge herstellen, zentrale Punkte der Vorlesung herausarbeiten. Von Studierenden der Mathematik wird das wie selbstverständlich verlangt. Ohne zu diskutieren, ob das bei denen gerechtfertigt oder sinnvoll ist: Bei Studierenden anderer Fächer kann diese Art, eine Vorlesung zu halten, problematisch sein. Gerade wenn festgestellt wird, dass viele Studierende an den Mathematikvorlesungen scheitern, kann man an den obigen Punkten ansetzen.

Die Form des Auffrischungskurses ist an diese Erkenntnisse angepasst. Die Themen der Vorlesung wurden auf Einheiten heruntergebrochen, die sich an konkreten Rechenaufgaben orientieren. Die Themenblöcke hießen also etwa "Grenzwerte von Funktionen (berechnen)" oder "Inverse einer Matrix (berechnen)".

Die praktische Umsetzung orientiert sich am "Example Based Learning" (xxx Renkl zitieren, s.Ableit) und lässt sich recht gut am Modell des "Cognitive Apprenticeship" schildern. (xxx Ableit bzw Quellen dort zitieren) Eine zentrale Rolle bilden Beispiellösungen (xxx hier Renkl), die dem selbständigen Lösen der Aufgaben vorausgehen, und an denen der Lehrende die Herangehensweise möglichst gut erläutert und begründet, also "ein echtes Vorbild für einen Aufgabenlösungsprozess gibt." (xxx Zitat Ableit Buch Kap 2 S. 10).

Der zeitliche Ablauf des Kurses folgte keinem starren Zeitschema (wie etwa vormittags Vorlesung, nachmittags Übung), sondern richtete sich nach den Themenblöcken und deren Abschnitten. Zu jedem Themenblock gab es typischerweise vier bis sechs Abschnitte.

Abschnitt 1 ist eine kurze Einführung in den betrachteten Gegenstand. Das kann eine kurze Wiederholung der Definition sein, eine Visualisierung (Was "macht" eine 2×2-Matrix mit einem Vektor, oder einem Quadrat, oder einem Kreis) und/oder ein intuitives Annähern an das aktuelle Konzept (was sind die Werte der Summen $1+1+1+1+\cdots$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$?).

Dieser Abschnitt entspricht streng genommen keiner Phase im Modell des Cognitive Apprenticeship, ist aber sicher nützlich, um zu klären, wovon überhaupt die Rede ist.

In **Abschnitt 2** wird vom Dozenten eine kompakte Anleitung zum Berechnen des Gefragten angegeben. Diese Anleitung ist oft recht algorithmisch gehalten, im Hinblick darauf, dass Studierenden der Informatik diese Herangehensweise vertraut sein sollte. Direkt daran schließt sich eine detailliert durchgeführte und kommentierte Beispielrechnung an, eventuell eine zweite. Dabei wird die Rechnung ausführlich kommentiert, etwa wann die Methode versagen würde, oder in Bezug auf die einzelnen Schritte der Anleitung, oder warum eine bestimmte Wahl so und nicht anders getroffen wird, oder — wieder mit Hinblick auf das Fach Informatik — welche Datentypen die betrachteten Objekte haben. (Eine Gleichung $Av = \lambda v$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist sinnvoll, da die Datentypen stimmen: rechts steht ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$, links auch). Eine Idee, welche Form eine solche Anleitung haben kann, findet sich in (xxx Furlan, Auffr-kurs-Material online). Dort finden sich auch Beispiellösungen, allerdings sparsamer kommentiert, als es im Kurs stattfand.

Dieser Abschnitt entspricht der Phase des *Modelling* im Cognitive Apprenticeship.

In **Abschnitt 3** werden den Studierenden Aufgaben gegeben, und damit die Gelegenheit, die vorgestellten Techniken an den Aufgaben selbst anzuwenden. Dafür gibt es typischerweise 20 bis 30 Minuten Zeit. Die Studierenden dürfen und sollen sich untereinander besprechen. Bei den bisherigen Kursen ist es immer gelungen, die Teilnehmerzahl unter 30 zu halten (auch durch Aufteilen des Kurses auf zwei Termine). Der Dozent geht umher und beobachtet die Lösungsversuche der Studierenden. Er gibt individuelle Hilfestellungen oder positive Rückmeldung und beantwortet Fragen. Die Gelegenheit, Fragen beantwortet zu bekommen, wird nach den bisherigen Erfahrungen intensiv genutzt. Die gestellten Aufgaben haben typischerweise unterschiedliche Schwierigkeitsgrade, so dass der Dozent auch den Hinweis geben kann, es mit einer einfacheren oder schwierigeren Aufgabe zu versuchen.

Dieser Abschnitt entspricht der Phase des *Coaching* im Cognitive Apprenticeship. Durch die Aufforderung, ihr Vorgehen zu kommentieren, kann der Dozent hier auch die Phase des *Articulation* einbauen.

In **Abschnitt 4** werden die Lösungen besprochen. Das wird so weit wie möglich im Dialog mit den Studierenden erfolgen. Die Erfahrung zeigt, dass fast kein Studierender bereit ist, seine Lösung an der Tafel vorzuführen. Studierende sind aber sehr oft bereit, ihre Lösung dem Dozenten zu diktieren. Dies kann man nutzen: Erstens kann man selber das Vorgehen bei der diktierten Lösung — höflich! — kommentieren. Zweitens ist es unproblematischer zu moderieren, wenn sich andere Studierende einschalten, die Alternativen oder Verbesserungen vorschlagen. Drittens spart man oft Zeit.

Dieser Abschnitt entspricht in etwa der *Reflection* im Cognitive Apprenticeship. Eine tiefere Reflektion, "Warum eine Methode funktioniert, wie sie funktioniert und in welchem Bereich sie funktioniert" (Zitat Ableit Buch S.10-11) in die Veranstaltung zu integrieren wäre wünschenswert. Vorschläge sind willkommen.

Eventuelle weitere Abschnitte. Da der Dozent die Studierenden in Abschnitt 3 bei der Bearbeitung der Aufgaben beobachten kann, kann er abschätzen, wie nötig eine Wiederholung des Abschnitts 3 allein, oder der Abschnitte 3 und 4 zusammen, ist. In den absolvierten Kursen wurden bei sehr wenigen Themenblöcken diese Abschnitte unverändert wiederholt. Oft wurde eine weitere Gelegenheit zum Selberrechnen und eine Besprechung der Lösungen in einem breiteren Kontext gegeben. Zwei Beispiele:

1. Nachdem die Substitutionsregel zur Ermittlung einer Stammfunktion in einem Themenblock besprochen wurde, die partielle Integration im nächsten und die Partialbruchzerlegung im übernächsten, gab es danach weitere 30 Minuten Zeit zur Bearbeitung von Aufgaben zur Bestimmung von Stammfunktionen. Bei diesen Aufgaben ging es diesmal darum, zunächst eine geeignete Integrationsmethode aus den bisher gelernten auszuwählen und sie dann anzuwenden, oder diese Methoden zu kombinieren.

2. Nachdem die Berechnung von Determinanten geübt wurde, ging es am folgenden Tag um die Berechnung von Eigenwerten. Dabei müssen wieder Determinanten berechnet werden. Die Aufgaben waren so gestellt, dass die Kenntnis von "Abkürzungen" beim Determinantenberechnen hilfreich ist.

Darüber hinaus gab es in jedem Kurs zwei "Probeklausuren": Aufgabensammlungen mit Aufgaben aus allen bislang besprochenen Themengebieten, möglichst jede Aufgabe mit einem neuen Dreh (ein freier Parameter statt keinem, Kombination verschiedener erlernter Methoden). Diese beiden Elemente — allgemeiner gestellte Aufgaben und Probeklausuren — fallen unter den Punkt *Exploration* in der Cognitive Apprenticeship.

Eine weitere Gelegenheit zur *Exploration* geht über das hinaus, was ein solcher Kurs leisten kann. Die Hoffnung ist, dass eine solche im Fach Informatik automatisch eingebaut ist: im weiteren Verlauf ihres Studiums begegnen den Studierenden viele der hier behandelten Begriffe wieder. Eine Beherrschung der im Kurs erlernten — ja eigentlich in der Mathematikvorlesung zu erlernenden! — Methoden ermöglicht ihnen, diese dann in neuen Kontexten zu nutzen.

3.4 Ergebnisse

Für die weitere Gestaltung des Auffrischungskurses ist eine Auswertung der Ergebnisse und der Rückmeldungen der Teilnehmer von hohem Interesse. Daher wurden diverse Daten erhoben und ausgewertet.

3.4.1 Punktevergleich

Das Punkteschema der Klausuren war kompliziert. Für jede Aufgabe gab es 3 oder 4 Punkte. Aber diese Punkte wurden zur p-ten Potenz erhoben (mit einem p zwischen 1 und 2), mit verschiedenen Faktoren gewichtet, addiert und dann linear auf Werte zwischen 0 und 1 skaliert. Ab 0,51 (so errechneter) Punkte galt die Klausur als bestanden. Dabei wurden die Klausuren, die auf der Grenze lagen, jeweils noch individuell als "bestanden" oder "nicht bestanden" gewertet (so haben etwa drei Teilnehmer mit mehr als 0,51 Punkten nicht bestanden).

Den Autoren liegen die Puntkzahlen der Teilnehmer des Auffrischungskurses vor, die jeweils in der Hauptklausur und in der Nachklausur erzielt wurden. Auf Grund der Konzeption des Kurses ist klar, dass die Teilnehmer des Kurses fast alle die Hauptklausur nicht bestanden haben: Nur drei der insgesamt 46 Teilnehmer hatten die Hauptklausur bestanden. Betrachtet man das Abschneiden der Kursteilnehmer bei der Nachklausur im Vergleich mit der Hauptklausur, so war eine Steigerung der Punktzahl und der Noten zu erwarten. Das hat sich bestätigt.

In der Hauptklausur erzielten die Teilnehmer des Auffrischungskurses durchschnittlich rund 32 Prozent der möglichen Punkte, in der Nachklausur rund 48 Prozent. 18 von 46 Teilnehmern bestanden die Nachklausur, 25 bestanden nicht, drei nahmen nicht an der Nachklausur teil.

3.4.2 Rückmeldungen der Teilnehmer

Es wurden im Kurs zwei Fragebögen verteilt, einer wurde von den Autoren gestaltet, einer ist Teil der obligatorischen Evaluation einer jeden Lehrveranstaltung.

xxx Feedback zum Verständnis bzw Mathias' Fragebögen

xxx Feedback zu "wie fanden wir's" bzw TechFak-Evaluationsbögen

Außerdem wurden einzelne Klausurbearbeitungen der Teilnehmer des Auffrischungkurses verglichen, jeweils der Hauptklausur und der Nachklausur; also vor dem Kurs und nach dem Kurs. Ergebnisse dieser Untersuchung schildern wir ausführlich im nächsten Kapitel

4 Vergleich der Bearbeitung zweier Klausuraufgaben

Dieses Kapitel schildert typische Lösungen und Fehler, die bei zwei vergleichbaren Klausuraufgaben auftraten, jeweils in der Hauptklausur zu Mathematik I im Februar 2013 (vor Teilnahme an dem Auffrischungskurs) und der Nachklausur dazu im April 2013 (nach Teilnahme an dem Auffrischungskurs). Diese beiden Aufgaben wurden gewählt, da sie am ehesten vergleichbar sind; ansonsten enthielten die Hauptklausur und die Nachklausur sehr verschiedene Aufgabentypen.

Es wurden jeweils die Klausurbearbeitungen von 16 Teilnehmern des Auffrischungskurses gesichtet. Sowohl bei der Hauptklausur als auch bei der Nachklausur gab es zwei Varianten, A und B.

4.1 Aufgabe zur partiellen Integration

Sowohl in der Hauptklausur als auch in der Nachklausur gab es eine Aufgabe zur partiellen Integration. Es sollte die Stammfunktion einer Funktion bestimmt werden, die die Form "lineare Funktion mal transzendente Funktion" besaß. In der Hauptklausur, war Aufgabe 6 diese:

Berechnen Sie das Integral $\int 4(x-1)\sin(2x+1)dx$ (bzw $\int 9(x+2)\cos(3x+1)dx$ in Variante B)

Die korrekte Lösung dieser Aufgabe ist

$$\int 9(x+2)\cos(3x+1)dx = (3x+6)\sin(3x+1) + \cos(3x+1) + c$$

Es gibt zwei naheliegende Rechenwege zur Lösung dieser Aufgabe (hier für Variante B angegeben).

Substituieren, dann partiell integrieren Substitution mit $u := 3x+1$ führt zu $\int(u+5)\cos(u)du$. Anschließende partielle Integration mit $f := u+5$ und $g' := \cos(u)$ führt zu $(u+5)\sin(u)+\cos(u) = (3x+6)\sin(3x+1)+\cos(3x+1)$. Unter Berücksichtigung der additiven Integrationskonstante ergibt sich obige Lösung. Dies war die von den Aufgabenstellern nach Korrektur der Hauptklausur angegebene Beispiellösung. Unter den von uns untersuchten Klausurbearbeitungen gab es nur eine, in der dieser Lösungsweg gewählt wurde.

Direkt partiell integrieren Direkt partiell integrieren mit $f(x) = 9(x+2)$, $g'(x) = \cos(3x+1)$ — mit ein wenig Erfahrung ist direkt zu sehen, dass dann $g(x) = \frac{1}{3}\sin(3x+1)$ gilt — führt zu $9(x+2)\frac{1}{3}\sin(3x+1) - \int 9\frac{1}{3}\sin(3x+1)dx = 3(x+2)\sin(3x+1) - 3\frac{1}{3}(-\cos(3x+1))$ und unter Berücksichtigung der additiven Integrationskonstante zur obigen Lösung. Dieser Weg wurde in der Mehrzahl der von uns untersuchten Klausurbearbeitungen gewählt.

4.1.1 Typische Fehler in der Hauptklausur

In den 16 untersuchten Bearbeitungen der Hauptklausur wurden bei der obigen Aufgabe (Variante A und B) die folgenden Fehler oder Auslassungen gefunden (in Klammern jeweils die Anzahl). Die Tabelle ist so zu lesen, dass eine Klausurbearbeitung mehrfach in der höchsten Ebene gezählt werden kann, aber nicht mehrfach in einer Gruppe von Unterpunkten darunter. Zum Beispiel werden die beiden Studierenden, die die Aufgabe gar nicht bearbeitet haben, sowohl im ersten Punkt mitgezählt ("Gar keine Bearbeitung der Aufgabe (2)") als auch im zweiten Punkt ("Kein Anwenden der Formel (10)"). Auf der Ebene darunter werden diese beiden unter "(a) gar keine Bearbeitung (2)" gezählt, aber nicht unter "(e) kein Anwenden der Formel (3)". Die Anzahl hinter einem Punkt auf der höchsten Ebene muss also mit der Summe der Anzahlen hinter den Unterpunkten darunter übereinstimmen. Aber die Summe der Anzahlen hinter den Punkten auf der obersten Ebene muss nicht 16 ergeben. [xxx so? anders sortieren? anders erklären?]

1. Gar keine Bearbeitung der Aufgabe (2)

2. Kein oder falsches Anwenden der partiellen Integrationsformel (10)
   (a) Gar keine Bearbeitung der Aufgabe (2)
   (b) Gliedweises Integrieren: $\int f'(x)g'(x)dx = f(x)g(x)$ (2)
   (c) Falsche Formel: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - f(x)g'(x)$ (2)
   (d) Falsche Formel: $\int f(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)$ (1)
   (e) Gar keine Anwendung einer solchen Formel (3)
3. Fehler beim Klammern (2)
4. Fehler beim Interpretieren von $\cos(x)$ bzw $\sin(x)$ (3)
   (a) Falsches Umformen: $\sin(2x+1) = \sin(2x) + \sin(1)$ (2)
   (b) Ignorieren des Kosinus': $\cos(3x+1) = 3x+1$ (1)
5. Fehler beim Ableiten (2)
   (a) Falsche Anwendung Kettenregel: $(\sin(2x+1))' = \cos(2)$ (1)
   (b) Fehler beim Ableiten von $4(x-1)$: $(4(x-1))' = 4x$ (1)
6. Fehler beim Integrieren von $\cos(3x+1)$ bzw $\sin(2x+1)$ (4)
   (a) Falsche Stammfunktion (2)
   (b) Keine Lösung von $\int \cos(2x+1)\,\mathbf{4}\,dx$ bzw. von $\int \sin(3x+1)\,\mathbf{3}\,dx$ (2)
7. Ungünstige Wahl von f und g: $f(x) = \sin(2x+1)$, $g'(x) = 4(x-1)$ (1)

In keiner von 16 Bearbeitungen war die Lösung auch nur einigermaßen korrekt. Im Schnitt wurden in den untersuchten Klausuren bei dieser Aufgabe 0,8 Punkte erzielt.

4.1.2 Typische Fehler in der Nachklausur

Die Aufgabe in der Nachklausur zur Bestimmung einer Stammfunktion einer vorgegebenen Funktion der Form "lineare Funktion mal transzendente Funktion" lautete:

$$\text{Berechnen Sie das Integral} \quad \int x\ln(x)dx$$

Offenbar ist diese Funktion von einfacherer Gestalt als die entsprechende Funktion in der Hauptklausur: Die lineare Funktion hier ist einfach x, im Gegensatz zu $9(x+2)$ bzw $4(x-1)$.

Es gibt im Wesentlichen nur einen sinnvollen Rechenweg: direkt partiell integrieren. Mit $f(x) = \ln(x)$, $g'(x) = x$ ergibt sich

$$\int x\ln(x)dx = \ln(x)\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \ln(x)\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}xdx = \ln(x)\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + c$$

In den 16 untersuchten Bearbeitungen der Nachklausur wurden bei der obigen Aufgabe die folgenden Fehler oder Auslassungen gefunden:

1. Falsches Anwenden der partiellen Integrationsformel (3)
   (a) Falsche Formel: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g'(x)$ (3)
2. Ungünstige Wahl von f und g, hier: $f(x) = x$, $g'(x) = \ln(x)$ (2)
3. Fehler mit konstantem Vorfaktor (1)
4. Kein x gekürzt in $\int \frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2 dx$, nochmalige partielle Integration statt sofortiger Lösung des Integrals (2)
5. Korrekte Lösung ohne Rechnung angegeben (1)

In sieben von 16 Bearbeitungen war die Lösung ohne Abstriche korrekt. Im Schnitt wurden in dieser Aufgabe 3,2 Punkte erzielt, also 2,4 mehr als in der Hauptklausur.

4.2 Aufgabe zum Konvergenzradius

Sowohl in der Hauptklausur als auch in der Nachklausur gab es eine Aufgabe zur Berechnung des Konvergenzradius' einer Potenzreihe. Die beiden Varianten der Aufgabe 3 aus der Hauptklausur lauteten

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} x^n \qquad \text{(A)}$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k+1}\right) x^k \qquad \text{(B)}$$

Die Lösung erfordert die Anwendung eines Quotientenkriteriums für Potenzreihen und eine Termumformung, nach der der Grenzwert einfach abzulesen ist. Ein Quotientenkriterium kann hier auf zwei Weisen benutzt werden: Entweder in der Form für Potenzreihen $\sum_n a_n x^n$, dann ist $R = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$. (xxx zitat Forster oder Furlan oder so?) Oder es wird das Quotientenkriterium für gewöhnliche unendliche Reihen angewendet, dann konvergiert die Potenzreihe für $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x| < 1$, und es ergibt sich auch ohne explizite Kenntnis der ersten Formel der Konvergenzradius R als $\frac{1}{\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ (falls $R \notin \{0, \infty\}$). Das andere sehr gebräuchliche Kriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius' von Potenzreihen, das Cauchy-Hadamard-Kriterium, greift bei dieser Aufgabe nicht.

Die beiden Varianten der entsprechenden Aufgabe 8 in der Nachklausur waren

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^2} x^k \quad \text{(A)} \quad \text{bzw} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} x^k \quad \text{(B)}$$

Die Lösung erfordert wieder die Anwendung des Quotientenkriteriums in einer der beiden oben geschilderten Formen, sowie entweder Termumformung unter Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus, oder die Aufspaltung von $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ in zwei Faktoren und Anwendung der Regal von l'Hospital auf einen dieser Faktoren. Das Cauchy-Hadamard-Kriterium greift auch bei dieser Aufgabe nicht.

4.2.1 Typische Fehler in der Hauptklausur

In den 16 untersuchten Bearbeitungen der Aufgabe aus der Hauptklausur fanden sich die folgenden Fehler oder Auslassungen (in Klammern wieder die Anzahl)

1. Gar keine Bearbeitung der Aufgabe (2)
2. Kein oder falsches Anwenden des Kriteriums (5)
   (a) Gar keine Bearbeitung der Aufgabe (2)
   (b) Kein Anwenden dieses oder eines ähnlichen Kriteriums (2)
   (c) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (statt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$) (3)
3. Die a_n falsch oder nicht bestimmt (7)
   (a) Die a_n nicht bestimmt (nichts in die Formel eingesetzt) (2)
   (b) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}$ (1)
   (c) $a_k = \frac{1}{k+1}$ (anstatt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1}$) (3)
   (d) Aus $\frac{n!}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}x^n$ abgelesen: Nenner $= 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)^{x^n}$ (1)
4. Grenzwert nicht oder falsch bestimmt
   (a) Grenzwert nach richtigen Einsetzen in die Formel nicht weiter bestimmt (2)
   (b) Fakultät falsch gekürzt (2)
   (c) Falsche Anwendung der Potenzgesetze: $(2n+2)^{x^{n+1}} = (2n+2)^{x^n} + (2n+2)$ (1)

Im Schnitt wurden in dieser Aufgabe in den untersuchten Klausuren 0,6 von 3 Punkten erzielt.

4.2.2 Typische Fehler in der Nachklausur

In den 16 untersuchten Bearbeitungen der Nachklausur wurden bei der obigen Aufgabe die folgenden Fehler oder Auslassungen gefunden:

1. Kriterium nicht oder falsch angewandt (3)
   (a) Kein Anwenden dieses oder eines ähnlichen Kriteriums (1)
   (b) $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (statt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$) (1)
   (c) Cauchy-Hadamard angewandt (1)
2. Grenzwert nach richtigen Einsetzen in die Formel nicht weiter bestimmt (1)
3. Probleme bei Grenzwerten mit Logarithmen (7)
   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln k+1}{\ln k}$ nicht gefunden (an dieser Stelle aufgehört) (2)
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln k+1}{\ln k} = \infty$ (falsch) (1)
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln k+1}{\ln k} = 1$ (korrekt, aber nicht begründet) (3)

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln k+1}{\ln k} = \frac{0}{0} = 1$ (korrekter Grenzwert, falsch begründet) (1)

4. Probleme beim Rechnen mit Logarithmen (5)

   (a) $\ln(k+1) = \ln(k) + \ln(1)$ (1)

   (b) $\ln(k+1) = \ln(k) \cdot \ln(1)$ (1)

   (c) $\frac{\ln k+1}{\ln k} = \frac{e^{\ln k+1}}{e^{\ln k}}$ (1)

   (d) Falsch gekürzt: $\frac{\ln k}{\ln k+1} = \frac{1}{\ln k}$ bzw $\frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln \frac{1}{k}}{1}$ (2)

5. Summe falsch umgeformt: $\sum (a_n)^2 = (\sum a_n)^2$ (1)

6. Wurzel falsch interpretiert: $\sqrt[k]{x} = \sqrt[2]{x}$ (1)

Niemand erzielte hier die volle Punktzahl von 3 Punkten. Im Mittel wurden 0,9 Punkte erzielt, das sind 0,3 mehr als in der Hauptklausur.

4.3 Fazit

xxx scans wohin?

Sowohl die reinen Punktzahlen, die bei den hier betrachteten Aufgaben erzielt wurden, als auch die detaillierte Untersuchung der Fehler in den einzelnen Klausurbearbeitungen, zeigen eine Verbesserung zwischen Haupt- und Nachklausur. Die Durchschnittspunktzahl ist höher (einmal um 2,4 von 4 Punkten, einmal um nur 0,3 von 3 Punkten). Die Zahl der Fälle, in denen die entscheidende Formel nicht oder falsch angewandt wurde, sank deutlich.

Es gibt einen Unterschied in den beiden betrachteten Aufgabentypen: die Aufgabe zur partiellen Integration erfordern sowohl in der Hauptklausur als auch in der Nachklausur — neben dem Anwenden der Formel zur partiellen Integration — nur recht elementare Umformungen, während die Aufgabe zum Konvergenzradius in beiden Fällen noch eine nichtelementare Umformung erfordert (Vereinfachen des Logarithums bzw geschicktes Aufspalten eines Bruches). Das schlägt sich in unseren beobachteten Ergebnissen nieder: In der Aufgabe zur partiellen Integration verbessern sich die Teilnehmer des Auffrischungskurses deutlich, während sich in der anderen Aufgabe nur eine leichte Verbesserung zeigt.

Wir schließen daraus, dass es erstrebenswert ist, dem Rechnung zu tragen, indem in den nächsten Auffrischungskursen dem praktischen Rechnen, dem Umformen von Termen, dem Manipulieren von Gleichungen und Ungleichungen, [xxx treffende Umschreibung?] viel Raum eingeräumt wird.