Dr. Reinhard Lück
Weilstetter Weg 16
70567 Stuttgart
Tel.: 0711-714323

Regular 3D (hyperbolic) tilings

Es ist praktisch, die regelmäßigen oder regulären Polyeder (Archimedische Körper, Platonische Körper) nicht nach der Anzahl der Flächen, sondern nach der der Ecken zu bezeichnen. Dann ist

Tetraeder = 4
Oktaeder = 6
Kubus = 8
Ikosaeder =12
Pentagondodekaeder = 20

Die Vertizes bezeichnet man nach der Anzahl der sich treffenden Polyeder: 4, 6, 8, 12, 20, da auch die Konfiguration der Vertizes regelmäßig sein soll.

Die Symmetrien der Polyeder und der Vertexkonfigurationen müssen kompatibel sein. Dann ergeben sich folgende 3D tilings:

Anzahl der Vertizes	**Tetraeder**	**Oktaeder**	**Kubus**	**Ikosaeder**	**Dodekaeder**
4	**(4^4)**	**-**	**(8^4)**	**-**	**(20^4)**
6	**-**	**(6^6)**	**-**	**-**	**-**
8	**(4^8)**	**-**	**(8^8)**	**-**	**(20^8)**
12	**-**	**-**	**-**	**(12^{12})**	**-**
20	**(4^{20})**	**-**	**(8^{20})**	**-**	**(20^{20})**

Spiegelung an der Diagonalen dieser Aufstellung führt zum dualen tiling.
(4^4) ist recht kurios, da kein Inversionszentrum vorhanden ist. Es gibt nur 2 Tetraeder und 2 Vertizes, dabei kann die Darstellung der Vertizes schwierig werden.
(8^8) ist ein primitiv kubisches Gitter im euklidischen Raum. Es trennt in der Darstellung die hyperbolischen 3D tilings von den „sphärischen Polytopen“ ab. (4^4), (8^4), (20^4), (6^6), (4^8) und (4^{20}) sind sphärische Polytope, zu (20^4) haben wir einiges publiziert, da wir es zur Darstellung der Koinzidenzorientierungen ikosaedrischer Quasikristalle in der Frank’schen Kugel benutzt haben (Z.B. mit David H. Warrington oder auch mit Johannes Roth, er ist ein Spezialist für Polytope).
Es bleiben also nur 4 vollkommen regelmäßige hyperbolische 3D tilings übrig. Dabei sind (20^8) und (8^{20}) zueinander dual, so dass drei essentiell verschiedene hyperbolische 3D tilings übrig bleiben.

Die Fundamentalbereiche der regelmäßigen 3D tilings werden durch mehr oder weniger asymmetische Tetraeder gebildet, die vier begrenzenden Dreiecke möchte ich mit A, B, C, D bezeichnen, ich wählte Großbuchstaben, um sie von den Kanten der Dreiecke in 2D zu unterscheiden. Für die Zuordnung der Buchstaben zu den Dreiecken mag es Präferenzen geben. Ich habe eine Wahl getroffen, bei der sich folgende Symmetrien ergeben:

$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^3 = (BD)^3 =(AD)^2 = (BC)^3 = (CD)^3 = 1 \qquad (4^4)}$$
$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^4 = (BD)^2 =(AD)^2 = (BC)^2 = (CD)^3 = 1 \qquad (6^6)}$$
$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^4 = (BD)^4 =(AD)^2 = (BC)^2 = (CD)^2 = 1 \qquad (8^8)}$$
$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^5 = (BD)^2 =(AD)^2 = (BC)^2 = (CD)^3 = 1 \qquad (12^{12})}$$
$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^5 = (BD)^2 =(AD)^2 = (BC)^2 = (CD)^2 = 1 \qquad (20^{20})}$$

$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^3 = (BD)^4 =(AD)^2 = (BC)^2 = (CD)^2 = 1 \qquad (8^4)\ und\ (4^8)}$$
$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^3 = (BD)^5 =(AD)^2 = (BC)^2 = (CD)^2 = 1 \qquad (20^4)\ und\ (4^{20})}$$
$$\mathbf{(AB)^3 = (AC)^4 = (BD)^3 =(AD)^2 = (BC)^2 = (CD)^2 = 1 \qquad (8^{20})\ und\ (20^8)}$$

Diese Aufstellung wurde nach einer Abwicklung des Tetraeders ermittelt, ich hoffe, dass sich keine Fehler eingeschlichen haben.

Schnitte durch den 3D Raum können reguläre 2D tilings sein, oft sind sie es nicht. Aber reguläre 2D Schnitte erleichtern uns die Darstellung.
Auch die vier begrenzenden Dreiecke A, B, C, D legen Schnitte durch den 3D Raum fest.

Einen günstigen Fall haben wir bei (8^{20}). Wenn ein Vertex im Mittelpunkt einer Poincaré-Kugel ist, entspricht dies dem 20-Stern des primitiven ikosaedrischen 3D tilings (Ammann-Kowalewski-Penrose-Kramer oder wen Sie als Autor zitieren würden). Ich habe zur Zeit diesen Stern, aber auch ein Dodekaeder und ein Ikosaeder immer als Modell vor mir.
Die Frage nach dem Baustein würde ich also mit Kubus beantworten, aber ein Dodekaeder wäre der Baustein des Dualen.
Man kann den Kubus (oder den Vertexpunkt von (20^8)) auch in den Mittelpunkt der Poincaré-Kugel legen.
Schnitte können senkrecht zu vierzähligen, fünfzähligen und dreizähligen Achsen durch Vertexpunkte und Bausteinzentren, gegebenfalls auch durch Flächenmittelpunkte, gelegt werden. Schnitte können also auch Oberflächen von Bausteinen enthalten.

Für das GAP Programm müssen Sie noch festlegen, welche Spiegelebenen von A, B, C, D zur gleichen Farbe führen, bzw, welche der vier Ebenen in einen anders gefärbten Bereich führt. Z. B. bilden in **(8^{20}**) und **(20^8)** A = B = C den Kubus und B = C = D das Dodekaeder *(auch im neuesten Duden sind die ..-eder sächlich).*

Man hat also zu den oben aufgeführten acht Gleichungssystemen noch vier verschiedene Auswahlmöglichkeiten. In den fünf Fällen der ersten drei Gleichungen (der zu sich selbst dualen tilings auf der erwähnten Diagonalen) führen diese zu paarweise gleichwertigen Ergebnissen. Man bekommt dann 5 + 2*3 Farbdekorationen echt regulärer tilings, und noch einmal 5 + 2*3 Farbdekorationen vom (nicht regulären) Laves tiling Typ.

Ob Koinzidenzen und enantiomorphe Paare irgendwie abgeleitet werden können, habe ich mir nicht überlegt.

Andere nicht-reguläre tilings sind mit Sicherheit interessant. Wir haben solche für die Darstellung der Koindizenzen der kubischen Kristalle in der Frank'schen Kugel verwendet. Man braucht dann aber fünf anstatt vier Begrenzungsdreiecke für den Fundamentalbereich.
Wenn Sie die fünf Fundamentalbereiche der ersten fünf Gleichungen anschauen, können Sie erkennen, dass durch eine passende Halbierung zwei identische Bereiche entstehen. Diese Schnittebene als fünfte Oberflächenebene E ist keine Spiegelebene. Es mag einen Weg geben, auch diese zu behandeln, ich kenne ihn aber noch nicht. U. a. kann man die flächenzentrierten und raumzentrierten kubischen Gitter so behandeln-

Wenn das 3D Programm läuft, gibt es also einige Anwendungen. Mich würde am meisten das tiling aus Kuben mit Vertizes der Dodekaedersymmetrie interessieren, da wir hierfür die meisten Kenntnisse mitbringen. Es muss auch hier eine Einfärbung mit 10 Farben geben, wie wir sie in Zürich vorgestellt haben.

Diverse hierzu Skizzen habe ich, brauchbare Bilder kann ich herstellen. Für (8^{20}) [und (20^{8})] gibt es reguläre Schnitte durch das Zentrum des Kubus in drei Orientierungen senkrecht zur vierzähligen Achse [in 2D (4^{5}) 4 im Zentrum] durch das Zentrum des Dodekaeder oder des Vertexpunktes senkrecht zur fünfzähligen Achse in sechs Orientierungen [in 2D (3^{10})] und durch das Zentrum der Kubenkanten senkrecht zu fünfzähligen Achsen in sechs Orientierungen [in 2D (4^{5}) (4^{5})] Vertex im Zentrum].

Den schwierigsten Punkt im Programm, welche Gleichungen man aus A, B, C, D aufstellen muss, um zu Farbsymmetrien zu gelangen, kann ich Ihnen noch nicht mitteilen, weil ich ihn noch kein Beispiel kenne.