WS2011/12 & SS2012

PD W. Hoh

# Mathematatik für Naturwissenschaften

**Analysis I & II**

von Kai Zander

## Inhalt

# 1. Mengen und Abbildungen

## 1.1. Definition: Was ist eine Menge?

Unter einer **Menge** $M$ versteht man eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Objekten. Diese heißen **Elemente** der Menge.

## 1.2. Beschreibung von Mengen

Durch Mengenklammern: $\{\quad\}$, zwischen denen die Elemente angegeben werden. Dabei kann man Elemente aufzählen:

$$\begin{aligned} M &= \{1,3,5,8\} \\ M &= \{1,2,\dots,100\} \\ M &= \{\text{Apfel,Birne}\} \\ M &= \{\quad\} = \emptyset = \text{leere Menge,} \end{aligned}$$

oder durch eine charakterisierende Eigenschaft beschreiben:

$$M = \{\, x \mid x \text{ ist ganze Zahl zwischen 2 und 5} \,\}.$$

Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
Darstellung und Anordnung spielen dabei keine Rolle.

**Beispiel**

$$\{\, x \mid x \text{ ist Primzahl kleiner } 10 \,\} = \{2,3,5,7\} = \{3,2,5,7\}$$

**Bemerkung**
Eine präzise Formulierung des Mengenbegriffs muss vermeiden, dass Widersprüche/Anomalien auftreten.

**Beispiel**

$$M = \{\, x \mid x \text{ ist eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält} \,\}$$

Zwei Fälle:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ M \in M \Rightarrow \text{nach Definition } M \notin M \\ 2.\ M \notin M \Rightarrow \text{nach Definition } M \in M \end{array}\right\} \text{Antinomie}$$

Wird vermieden, wenn man mit klar definierter Grundmenge $G$ arbeitet:

$$M = \{\, x \in G \mid \dots \,\}$$

## 1.3. Häufig benutzte Mengen

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ Natürliche Zahlen
- $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$ Natürliche Zahlen mit Null
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ Ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ Rationale Zahlen/Brüche
- $\mathbb{R}$ Reelle Zahlen (dazu später mehr)
- $\mathbb{C}$ Komplexe Zahlen (auch hierzu später mehr)

**Intervalle**
Mit $a, b \in \mathbb{R}$:

- $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b \}$ Abgeschlossenes Intervall
- $]a,b[ \, = (a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ Offenes Intervall
- $]a,b] = (a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b \}$ Nach links halboffenes Intervall
- $[a,b[ \, = [a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b \}$ Nach rechts halboffenes Intervall

An offenen Intervallgrenzen ist auch $a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$ zulässig.
Zum Beispiel

$$[0,\infty[ \, = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0 \} \text{ oder } ]-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$$

## 1.4. Elementare Mengenoperationen

Mit $M, N$ Mengen:

**Teilmengen**
$M$ heißt Teilmenge von $N$, wenn $x \in M \Rightarrow x \in N$ gilt. In Zeichen: $M \subset N$.

Nicht $\subset$ und $\in$ verwechseln!
Es gilt $2 \in \{1,2,3\}$ und $\{2\} \subset \{1,2,3\}$, $2 \subset \{1,2,3\}$ ist aber falsch.

**Mengendurchschnitt**

$$M \cap N := \{ x \mid x \in M \land x \in N \}$$

**Mengenvereinigung**

$$M \cup N := \{ x \mid x \in M \lor x \in N \}$$

**Mengendifferenz**

$$M \setminus N := \{ x \mid x \in M \land x \notin N \} \text{ „}M\text{ ohne }N\text{“}$$

**Symmetrische Differenz**

$$M \Delta N := (M \setminus N) \lor (N \setminus M) = \{ x \mid x \text{ entweder in } M \text{ oder in } N\text{, aber nicht in beiden} \}$$

Zwei Mengen heißen **disjunkt**, wenn $M \cap N = \emptyset$, sie also keine Elemente gemeinsam haben.

Die Bildung von Durchschnitten und Vereinigungen ist auch über unendlich viele Mengen möglich. Sei $I$ Indexmenge und für jedes $i \in I$ eine Menge $A_i$ gegeben.

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{\, x \mid x \in A_i \ \forall i \in I \,\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\, x \mid x \in A_i \text{ für (mindestens) ein } i \in I \,\}$$

**Beispiel**

$I = \mathbb{N}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \left\{ \frac{k}{n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{Q}$$

**Kathetische Produkte**

Sind $M$ und $N$ Mengen, so heißt die Menge der Paare $M \times N := \{\, (a, b) \mid a \in M, b \in N \,\}$ das kathetische Produkt von $M$ und $N$.

**Allgemeiner**

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a \in M_i, i = 1, \ldots, n \,\}$$

Gilt $M_1 = M_2 = \cdots = M_n$, so schreibt man auch $M^n$.

**Beispiel**

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}} = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \,\}$$

Die Menge der $n$-dimensionalen (Zeilen-)Vektoren.

## 1.5. Abbildungen/Funktionen

**Definition**

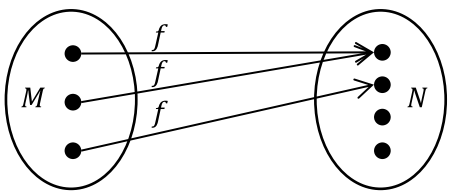
Seien $M, N$ nichtleere Mengen:

Eine Abbildung (oder eine Funktion) $f$ von $M$ nach $N$ ist eine Vorschrift

$$\begin{aligned} f: M &\to N \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

die **jedem** Element $x \in M$ **genau** ein Element $f(x) \in N$ zuordnet. Dabei heißt $M$ **Definitionsbereich** und $N$ **Wertebereich** von $f$.

Nicht jeder Wert von $N$ muss von $f$ als Funktionswert angenommen werden:



Die Menge $f(x) := \{ f(x) \mid x \in M \}$ heißt das **Bild** von $f$.

**Allgemeiner**
Für $A \subset M$:

$$f(A) := \{ f(x) \mid x \in A \} \textbf{ Bild} \text{ von } A \text{ unter } f$$

Für $B \subset N$:

$$f^{-1}(B) := \{ x \in M \mid f(x) \in A \} \textbf{ Urbild} \text{ von } B \text{ unter } f.$$

**Beispiele**

(i) Sei $M = N = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

(ii) Sei $M = N = [0, \infty[$:

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty[ &\to [0,\infty[ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

(iii) Identische Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_M\colon M &\to M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

## 1.6. Hintereinanderausführung von Abbildungen

Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$. Dann definiert

$$\begin{aligned} g \circ f\colon M &\to P \\ x &\mapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

die **Hintereinanderausführung** oder **Komposition** von $f$ und $g$.

Ist $h\colon P \to R$ eine weitere Abbildung, so gilt für $x \in M$:

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big(g \circ f(x)\big) = g \circ (g \circ f)(x)$$

Das heißt die Funktionskomposition ist **assoziativ**, denn es gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

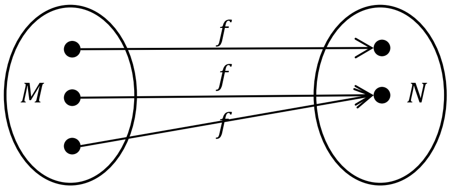
## 1.7. Definition

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung.

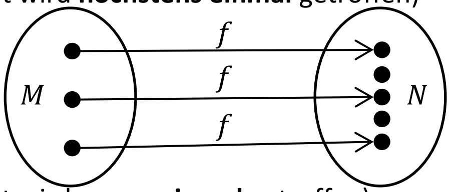
(i) $f$ heißt **surjektiv**, wenn $f(M) = N$.
(ii) $f$ heißt **injektiv**, wenn gilt: $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$.
(iii) $f$ heißt **bijektiv**, wenn $f$ surjektiv **und** injektiv ist (Dann bezeichnet man $f$ auch mit $f\colon M \xrightarrow{\sim} N$).

**Graphische Darstellungen**

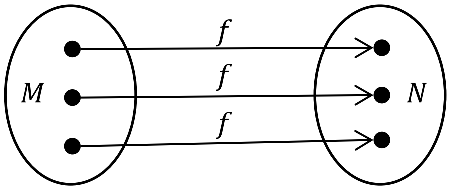
**Surjektivität** (Jeder Wert wird **mindestens einmal** getroffen)




**Injektivität** (Jeder Wert wird **höchstens einmal** getroffen)




**Bijektivität** (Jeder Wert wird **genau einmal** getroffen)



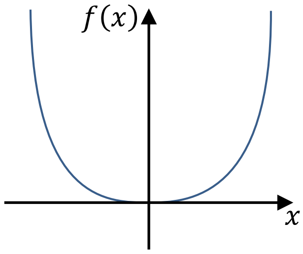

**Beispiele**

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv

(ii) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty[, x \mapsto x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv

(iii) $f: [0, \infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

(iv) $f: [0, \infty[ \to [0, \infty[, x \mapsto x^2$ ist bijektiv (injektiv **und** surjektiv)




**Es gilt**: Zu jeder bijektiven Abbildung $f: M \to N$ gibt es eine eindeutig bestimmte Umkehrabbildung $f^{-1}: N \to M$.

**1.8. Es gilt**

Zu einer Abbildung $f: M \to N$ sind äquivalent:

(i) $f$ ist bijektiv

(ii) Es gibt eine Abbildung $g: N \to M$ mit

$g \circ f = \mathrm{id}_M \Leftrightarrow f$ ist injektiv
$f \circ g = \mathrm{id}_N \Leftrightarrow f$ ist surjektiv

## 1.9. Anwendung: Mächtigkeit von Mengen

**Definition**

Zwei Mengen $M$ und $N$ heißen gleich mächtig, wenn es eine Bijektion von $M$ nach $N$ gibt.

**1. Fall**

Endliche Menge $M$: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Bijektion $\{1, \dots, n\} \to M$. $M$ hat dann $n$ Elemente: $|M| = n$ (Mächtigkeit/Kardinalität).

**2. Fall**

Unendliche Menge $M$: Es gibt hier unterschiedliche Mächtigkeiten:

(i) Es gibt eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ (gleich mächtig). $M$ heißt dann **abzählbar**.

(ii) Andernfalls heißt $M$ **überabzählbar** ($M$ hat mehr Elemente).

$M$ abzählbar bedeutet, dass man mittels Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to M$ die Elemente von $M$ durchnummerieren kann:

$$M = \{f(1), f(2), \dots\}$$

$f$ heißt dann eine **Abzählung** von $M$.

**Beispiele**

(i) $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(ii) $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\leftrightarrows \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto x - 1 \end{aligned}$$

Hier: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N} \neq \mathbb{N}_0$. Somit echte Teilmenge, trotzdem sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ gleich mächtig.

(iii) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. Abzählung: $0, +1, -1, +2, -2, \dots$

(iv) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Dazu genügt zu zeigen, dass $\mathbb{Q}_+^* = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \,\}$ abzählbar ist. Betrachte dazu folgendes Schema:

$$\boxed{\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \text{Zähler} \\
1 & 1/1 & \rightarrow & 2/1 & & 3/1 & \rightarrow & 4/1 & \cdots & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
2 & 1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & \cdots & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
3 & 1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & \cdots & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
4 & 1/4 & \rightarrow & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & \cdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\text{Nenner} & & & & & & & & &
\end{array}}$$

Überspringt man nicht teilerfremde Brüche, so definiert dieser Weg eine Abzählung von $\mathbb{Q}_+^*$.

(v) Betrachte die Menge der **0-1-Folgen**, d.h. die Menge aller Folgen $a_1, a_2, a_3, \dots$ mit $a_n \in \{0,1\}$. Diese Menge entspricht der Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{N} &\to \{0,1\} \\ n &\mapsto a_n. \end{aligned}$$

**Behauptung**
$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.

**Beweis** (Cantorsches Diagonalverfahren)
Wir nehmen das Gegenteil an und finden einen Widerspruch. Beweis durch Widerspruch. Dazu invertieren wir die Annahme: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist abzählbar.
Dann gibt es eine Abzählung von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$
Diese lässt sich als unendliche Tabelle schreiben:

$$\begin{array}{cccll} \boldsymbol{\varphi_1(1)} & \varphi_1(2) & \varphi_1(3) & \dots & \leftarrow \text{erste 0-1-Folge} \\ \varphi_2(1) & \boldsymbol{\varphi_2(2)} & \varphi_2(3) & \dots & \leftarrow \text{zweite 0-1-Folge} \\ \varphi_3(1) & \varphi_3(2) & \boldsymbol{\varphi_3(3)} & \cdots & \leftarrow \text{dritte 0-1-Folge} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

Betrachte Diagonale $(\varphi_1(1), \varphi_2(2), \varphi_3(3), \dots)$ in dieser Tabelle und definiere 0-1-Folge $\varphi$ durch

$$\varphi(n) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \varphi_n(n) = 1, \\ 1, \text{ wenn } \varphi_n(n) = 0. \end{cases}$$

Der Vergleich mit jeder Zeile der Tabelle zeigt: Die 0-1-Folge $\varphi$ kommt in der Liste $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ aller 0-1-Folgen nicht vor: **Widerspruch**.

Also ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar.

□

**Folgerung**
Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.
Denn es genügt zu zeigen, dass das Intervall $[0,1[$ überabzählbar ist. Jedes $x \in [0,1[$ lässt sich im Zweiersystem eindeutig im Dualbruch $0, a_1 a_2 a_2 \dots$ mit $a_i \in \{0,1\}$ der nicht in 1er-Periode endet, entwickeln.
$[0,1[$ ist gleich mächtig wie die Menge der 0-1-Folgen, $\underbrace{\text{die nicht in 1er-Periode enden}}_{\text{Dies sind nur abzählbar viele.}}$.
Daher ist mit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ auch $[0,1[$ überabzählbar.

# 2. Vollständige Induktion

## 2.1. Beispiele

Aussagen, die angeblich für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr sind:

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} \cdot n(n+1)$.

(ii) $1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \text{ falls } q \neq 1, \\ n+1, \text{ falls } q = 1 \end{cases}$ für $q \in \mathbb{R}$.

(iii) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

**Beweise**

(i)
$$\begin{aligned} &1 + \quad 2 \quad + \cdots + n \\ &n + n - 1 + \cdots + 1 = n(n+1) \Rightarrow 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1) \end{aligned}$$

(ii) Für $q \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} (q-1)(1 + q^1 + \cdots + q^n) &= q + q^2 + \cdots + q^{n+1} - 1 - q - q^2 - \cdots - q^n \\ &= q^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Falls $q \neq 1$: Durch $q - 1$ dividieren.
Falls $q = 1$: Trivial.

(iii) Ausprobieren für $n = 1$:
$$1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ o.k.}$$

**Idee der vollständigen Induktion**
Beweise nun, dass aus der Gültigkeit der Aussage für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ auch die Gültigkeit der Aussage für $n + 1$ folgt.

**Voraussetzung**
Für ein beliebiges, aber festes $n$ ist $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

**Behauptung**
$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

**Beweis**
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 7n + 6] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

## 2.2. Prinzip der vollständigen Induktion (Ablauf)

Es sei $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage.
Es gelte:

(i) $A(1)$ ist wahr.
(ii) Wenn $A(n)$ wahr ist, so ist auch $A(n+1)$ wahr.
Dann ist $A(n+1)$ wahr für jedes $n \in \mathbb{N}$.

**Induktionsanfang**
$A(1)$ wird bewiesen.

**Induktionsschluss/Schluss von $n$ auf $n+1$**
Voraussetzung: $A(n)$ ist wahr für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: $A(n+1)$ ist wahr. → Beweis...

**Induktionsbeweis für (i)**
**Anfang** $n = 1$ klar.
**Schluss** Wir setzen voraus, dass $1 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann:

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \qquad \square$$

**Induktionsbeweis für (ii)**
**Anfang** $n = 1$.
Linke Seite: $1 + q$. Rechte Seite: $\frac{q^2-1}{q-1} = \frac{(q+1)(q-1)}{q-1}$ richtig.
**Schluss von $n$ auf $n+1$**

$$1 + q + \dots + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \qquad \square$$

## 2.3. Definitionen durch vollständige Induktion (Rekursion)

(i) **Fakultät** $n!$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$1! := 1$$
$$(n+1)! := (n+1) \cdot n!$$
$$\Rightarrow n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

(ii) **Summenzeichen** für $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

**Definition mittels vollständiger Induktion**

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \; \sum_{i=1}^{k+1} a_i := a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i$$

**Beispiele**

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

(iii) **Produktzeichen**:

$$\prod_{i=1}^{k} a_i \coloneqq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$$

oder

$$\prod_{i=1}^{1} a_i \coloneqq a_1, \prod_{i=1}^{k+1} a_i \coloneqq a_{k+1} \cdot \prod_{i=1}^{k} a_i$$

(iv) **Zusatzdefinitionen**:

$0! \coloneqq 1$

Leere Summe: $\sum_{i=1}^{0} a_i \coloneqq 0$

Leeres Produkt: $\prod_{i=1}^{0} a_i \coloneqq 1$

**2.4. Satz**

Gegeben sei eine $n$-elementige Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Anzahl der Möglichen Anordnungen (Permutationen) der Elemente der Menge gleich $n!$ (vergleiche Lineare Algebra 1.3).

**Beweis durch vollständige Induktion**
**Anfang** $n = 1$.
Anzahl der Permutationen ist $1 = 1!$. O.k.
**Schluss von $\boldsymbol{n}$ auf $\boldsymbol{n+1}$**
Anordnungen mit $a_1$ an erster Stelle: $n!$ Möglichkeiten.
Anordnungen mit $a_2$ an erster Stelle: $n!$ Möglichkeiten.
⋮
Anordnungen mit $a_n$ an erster Stelle: $n!$ Möglichkeiten.

⇒ Insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Möglichkeiten.

**2.5. Definition**

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$\binom{n}{k} \coloneqq \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{k}$$

**Binomialkoeffizient** („$n$ über $k$“).

### 2.6. Eigenschaften

(i) $\binom{n}{0} = 1$ (leeres Produkt)

(ii) $\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k}$

$\Rightarrow \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

Es genügt also, $\binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$ zu studieren.

Dann gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Also:

(iii) $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$.

(iv) Aus (iii) folgt $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

### 2.7. Beweis

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &\overset{\text{(iii)}}{=} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} \\ &= \frac{k!\,(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

□

**Pascalsches Dreieck**

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 1 && 2 && 1 && \\ & 1 && 3 && 3 && 1 & \\ 1 && 4 && 6 && 4 && 1 \\ &&&& \vdots &&&& \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} &&&& \binom{0}{0} &&&& \\ &&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&& \\ && \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} && \\ & \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} \\ &&&& \vdots &&&& \end{array}$$

### 2.8. Satz

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge gegeben durch $\binom{n}{k}$ (Also die Anzahl der Möglichkeiten, aus $n$ Objekten $k$ Objekte ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen).

**Beweis**

Offenbar richtig für $k = 0$, $k = n$ und $k > n$.

**Vollständige Induktion nach $n$**
**Anfang** $n = 1$.
**Schluss von $n$ auf $n + 1$**
Betrachte $(n+1)$-elementige Menge: $\{1,2,\dots,n+1\}$ und $k$-elementige Teilmenge $A$ mit $1 \le k \le n$.

**1. Fall**

$$n + 1 \notin A \Rightarrow A \subset \{1,\dots,n\}$$

nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\binom{n}{k}$ derartige Teilmengen.

**2. Fall**

$$n + 1 \in A \Rightarrow \underbrace{A \setminus \{n+1\}}_{\text{hat } k-1 \text{ Elemente}} \subset \{1,\dots,n\}$$

nach Induktionsvoraussetzung gibt es $\binom{n}{k-1}$ derartige Teilmengen.

Gesamtzahl: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{2.7}{=} \binom{n+1}{k}$ □

## 2.9. Binomischer Lehrsatz

Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Zum Beispiel

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= 1 \cdot y^2 + 2xy + 1 \cdot x^2 \\ (x+y)^3 &= 1 \cdot x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1 \cdot y^3\end{aligned}$$

(Gilt für $x, y$ in beliebigem kommutativen Ring.)

**Beweis**: Vollständige Induktion nach Potenz $n$
**Anfang**
$n = 0$: $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot 1 \cdot 1$. O.k.
**Schluss** $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n+1-k} + y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{\overset{2.7}{=}\binom{n+1}{k}} x^k y^{n+1-k}\end{aligned}$$

$$= x^{n+1}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

□

# 3. Die reellen Zahlen

## 3.1. Definition

Ein Körper $K$ heißt **angeordneter** Körper, wenn gewisse Elemente $x \in K$ als **positiv** ausgezeichnet werden, also $x > 0$, so dass die folgenden Axiome gelten:

(i) Für jedes $x \in K$ gilt entweder $x > 0$ oder $x = 0$ oder $-x > 0$ (exklusives Oder).
(ii) $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$
(iii) $x > 0, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

## 3.2. Definition

Wir schreiben $x < y$ oder $y > x$, wenn $y - x = 0$.
Wir schreiben $x \leq y$ oder $y \geq x$, wenn $y - x > 0$ oder $x = y$.

## 3.3. Bemerkung

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit der üblichen Wahl von positiven Elementen sind angeordnete Körper.

## 3.4. **Eigenschaften** (Rechnen mit Ungleichungen)

Sei $K$ ein angeordneter Körper und $x, y, z, a \in K$:

(i) $x < y \Leftrightarrow -y < -x$.
Speziell:
$x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$, denn $y - x = -x - (-y)$, also $y - x > 0 \Leftrightarrow -x - (-y) > 0$.

(ii) **Transitivität**
$x < y, y < z \Rightarrow x < z$ denn:

$$\left.\begin{matrix} x < y \Leftrightarrow y - x > 0 \\ y < z \Leftrightarrow z - y > 0 \end{matrix}\right\} \overset{3.1(\text{ii})}{\Longrightarrow} z - x = (z - y) + (y - x) > 0 \Leftrightarrow x < z$$

(iii) $x < y \Rightarrow a + x < a + y$ denn $(a + y) - (a + x) = y - x > 0$.

(iv) $x < y \Rightarrow \begin{cases} ax < ay, \text{ falls } a > 0, \\ ax > ay, \text{ falls } a < 0. \end{cases}$

Dann:

Falls $a > 0$: $ay - ax < \underbrace{a}_{>0} \cdot \underbrace{(y - x)}_{>0} \overset{3.1(\text{iii})}{>} 0 \Rightarrow ax < ay$.

Falls $a < 0 \overset{(\text{i})}{\Rightarrow} -a > 0 \Rightarrow -ax = (-a)x < (-a)y = -ay \overset{(\text{i})}{\Rightarrow} ax > ay$.

(v) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$.
Denn: $x \neq 0 \overset{3.1(\mathrm{i})}{\Longrightarrow} x > 0$ oder $-x > 0 \overset{3.1(\mathrm{iii})}{\Longrightarrow} x^2 = (-x)^2$.
Wegen $1^2 = 1$ gilt insbesondere $1 > 0$.

**3.5. Weitere Eigenschaften** (Siehe Übung)

(i) $x < y, x' < y' \Rightarrow x + x' < y + y'$
(ii) $0 \leq x \leq y, 0 \leq x' \leq y' \Rightarrow x \cdot x' \leq y \cdot y'$
(iii) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
(iv) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

**3.6. Bemerkung**

In einem angeordneten Körper $K$ mit Einselement $1_K$ kann man jeder natürlichen Zahl $n$ ein Element $n \cdot 1_K := \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n \text{ mal}} \in K$ zuordnen. Dann:

(i) $n \cdot 1_K > 0$, da $1_K > 0$.
(ii) $n \underset{\text{in } \mathbb{N}}{<} m \Rightarrow n \cdot 1_K \underset{\text{in } K}{<} m \cdot 1_K$
Denn:

$$m \cdot 1_K - n \cdot 1_K = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{m \text{ mal}} - (\underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n \text{ mal}}) = \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n - m \text{ mal}} > 0$$

Insbesondere für $n \neq m \Rightarrow n \cdot 1_K \neq m \cdot 1_K$, d.h. die Abbildung $\mathbb{N} \to K, n \mapsto n \cdot 1_K$ ist **injektiv**.

Weiter sieht man:

$$\underbrace{(n \cdot 1_K) + (m \cdot 1_K)}_{\text{Addition im Körper}} = \underbrace{(1_K + \cdots + 1_K)}_{n \text{ mal}} + \underbrace{(1_K + \cdots + 1_K)}_{m \text{ mal}} = \underbrace{(n + m)}_{\text{Addition in } \mathbb{N}} \cdot 1_K$$
$$\underbrace{(n \cdot 1_K) + (m \cdot 1_K)}_{\text{Multiplikation im Körper}} = \underbrace{(1_K + \cdots + 1_K)}_{n \text{ mal}} + \underbrace{(1_K + \cdots + 1_K)}_{m \text{ mal}} = \underbrace{(n + m)}_{\text{Multipl. in } \mathbb{N}} \cdot 1_K$$

Dies rechtfertigt natürliche Zahlen $n$ mit Körperelementen $n \cdot 1_K \in K$ zu identifizieren.
⇒ (Kopie von) $\mathbb{N}$ erscheint als Teilmenge von $(K, +, \cdot)$. Man sagt „$\mathbb{N} \subset K$" oder „$\mathbb{N}$ ist eingebettet in $K$".

Genauso kann man sehen, dass jeder angeordnete Körper $K$ (eine Kopie) von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ enthält:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$$

In diesem Sinne ist also der Körper der rationalen Zahlen der kleinste angeordnete Körper.

**3.7. Beispiel** (Bernoullische Ungleichung)

Sei $K$ angeordneter Körper.
Ist $a \geq -1 \in K$, so gilt
$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a \; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

**Beweis** durch vollständige Induktion nach $n$
**Anfang** $n = 0$. O.k.
**Schluss** $n \to n+1$

$$(1+a)^{n+1} = \underbrace{(1+a)}_{\geq 0}(1+a)^n \overset{\text{I.V.}}{\geq} (1+a)(1+na) = 1 + na + a + n^2$$
$$= 1 + (n+1)\cdot a + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)\cdot a$$

□

**3.8. Definition**

Sei $K$ angeordneter Körper und $x \in K$. Dann heißt

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ wenn } x \geq 0, \\ -x, \text{ wenn } x < 0 \end{cases}$$

der **absolute Betrag** von $x$.

**3.9. Eigenschaften**

(i) $|x| \geq 0$: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|-x| = |x|$, denn
$$|-x| = \begin{cases} -x, \text{ falls } -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0, \\ x, \text{ falls } -x < 0 \Leftrightarrow x > 0. \end{cases}$$

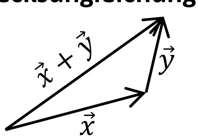
(iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, für $y \neq 0$.

Denn ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgt wegen (ii):

$$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y > 0\} \Rightarrow |x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$$

weiter ist für $y \neq 0$
$$y \cdot \frac{x}{y} = x \Rightarrow |y| \cdot \left|\frac{x}{y}\right| = |x| \Rightarrow \text{Behauptung}$$

**Dreiecksungleichung**




$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

**Beweis**

**1. Fall** $x \geq 0, y \geq 0$

$$x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y = |x| + |y|$$

**2. Fall** $x \leq 0, y \leq 0$

$$x + y \leq 0 \Rightarrow |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$$

**3. Fall** $x \geq 0, y \leq 0$

$$\left.\begin{aligned} x + y \leq x = |x| &\overset{\text{1. F.}}{\leq} |x| + |y| \\ -(x + y) = -x - y \leq -y = |y| &\overset{\text{1. F.}}{\leq} |x| + |y| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

**4. Fall** $x \leq 0, y \geq 0$

Analog zum 3. Fall.

Es gilt dann auch

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$$

Also:

$$\boxed{|x \pm y| \leq |x| + |y|} \qquad \square$$

(iv) **Dreiecksungleichung nach unten**

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$$

sowie $y \to -y$:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

denn:

$x = (x + y) - y$

$$\overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} |x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x + y| \\ x \text{ und } y \text{ vertauschen} \\ |y| - |x| \leq |y + x| \end{array}\right\} \Rightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$$

**3.10. Definition (Vollständigkeit)**

Sei $K$ ein angeordneter Körper und $A \subset K$.

(i) $A$ heißt „nach **unten** (bzw. **oben**) **beschränkt**“, wenn es ein $x \in K$ gibt mit $x \leq a$ (bzw. $x \geq a$) $\forall a \in A$.
$x$ heißt dann **untere** (bzw. **obere**) **Schranke** von $A$.

(ii) $x$ heißt **größte untere Schranke** von $A$ oder **Infimum** $\inf A$ (bzw. **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** $\sup A$), wenn $x$ untere Schranke von $A$ und für jede weitere untere Schranke $y$ gilt: $y \leq x$ (bzw. $x$ obere Schranke von $A$ und für jede weitere obere Schranke $y$ gilt: $y \geq x$).

**3.11. Beispiele**

(i) Sei $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ in $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$. $\Rightarrow A$ ist nach unten beschränkt mit $\inf A = 0$.

(ii) Sei $A = \{ a \in \mathbb{Q}_+ \mid a^2 > 2 \}$. $\Rightarrow A$ ist nach unten beschränkt mit zum Beispiel 0.
Für $A$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ gilt: $\inf A = \sqrt{2}$, aber für $A$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ gilt: $A$ hat kein Infimum, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

**3.12. Definition**

Ein angeordneter Körper erfüllt das **Vollständigkeitsaxiom**, wenn jede nicht leere nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum besitzt.

**3.13. Bemerkungen**

(i) $\mathbb{R}$ erfüllt das **Vollständigkeitsaxiom**.

(ii) Man kann zeigen, dass es im Wesentlichen („bis auf Isomorphie") nur einen solchen Körper gibt. Daher ist sinnvoll:

**Definition**
Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist der angeordnete Körper, der das Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

**3.14. Folgerungen**

(i) $\mathbb{R}$ ist „archimedisch angeordnet", das heißt zu $x, y > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$.

(ii) Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.

**Beweis** $\forall n \in \mathbb{N}$

(i) **Annahme**
Währe $nx \leq y \Rightarrow n \leq \frac{y}{x} \Rightarrow \mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt.
$\xRightarrow{\text{Vollst.axiom}}$ Es existiert $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R} \Rightarrow n + 1 \leq M \Rightarrow n \leq M - 1$, also ist $M - 1$ obere Schranke von $\mathbb{N} \Rightarrow$ Widerspruch zu „$M$ ist kleinste obere Schranke".

(ii) $a < b \Rightarrow \frac{1}{b-a} > 0$
$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{b-a} < m \cdot (1) \Leftrightarrow m \cdot a + 1 < m \cdot b$.
Daher gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $m \cdot a < n \leq m \cdot a + 1 < m \cdot b$

$$\Rightarrow a < \frac{n}{m} < b.$$

Setze also $r := \frac{n}{M} \in \mathbb{Q}$.

□

**3.15. Satz**

Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, das heißt $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossener Intervall $\forall n \in \mathbb{N}$, so dass:

(i) $I_{n+1} \subset I_n$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| := b_n - a_n < \varepsilon$ und $\varepsilon$ beliebig kleine, positive Zahl.
Dann gibt es genau ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$$

Zum Beispiel: Dezimalbruchentwicklung. $a = 0,r_1r_2r_3 \ldots$ mit $r_i \in \{0,\ldots,9\}$ definiert Intervallschachtelung $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\left.\begin{aligned} a_n &:= r_1 \cdot \frac{1}{10} + r_2 \cdot \frac{1}{100} + \cdots + r_n \cdot \frac{1}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot 10^{-k} \\ b_n &:= a_n + \frac{1}{10^n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n,b_n] = \{a\}.$$

Dies liefert Möglichkeit, $\mathbb{R}$ durch Intervallschachtelungen mit Intervallen $[a_n,b_n]$, mit $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ zu bestimmen.

**Beweis von 3.15**
Es gilt: $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \; \forall n$.

$\Rightarrow \{\, b_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ ist nach unten beschränkt (durch $a_1$).
$\Rightarrow$ Es gilt $b := \inf\{\, b_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.
Ebenso:
$\{\, a_n \mid n\mathbb{N} \,\}$ ist nach oben beschränkt (durch $b_1$).
$\Rightarrow$ Es gilt $a := \sup\{\, a_n \mid n\mathbb{N} \,\}$.

Es gilt $a_k < a_n \; \forall k,n \in \mathbb{N}$.
Das heißt $a \cdot n$ ist untere Schranke von $\{\, b_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \Rightarrow a_k \leq b \; \forall k \in \mathbb{N}$.
Also ist $b$ die obere Schranke von $\{\, a_k \mid n \in \mathbb{N} \,\} \Rightarrow a \leq b$.

Somit gilt $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, das heißt $[a,b] \subset [a_n,b_n] = I_n \; \forall n$.

$$\Rightarrow [a,b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ und } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

**Annahme**
Es gibt

$$a, a' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ mit } a' > a.$$

Wegen

$$a, a' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset I_{n_0}$$

folgt

$$b_{n_0} - a_{n_0} \geq a' - a = \varepsilon.$$

Widerspruch!
Daher ist

$$a = a' \text{ und } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}.$$

□

## Komplexe Zahlen

In $\mathbb{R}$ liefert die Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine Lösung (vergleiche 3.4).

Postuliere daher „imaginäre Zahle“ $i$ mit der Eigenschaft $\boxed{i^2 = -1}$. $i$ ist die **imaginäre Einheit**.

### 3.16. Definition

Die Menge

$$\mathbb{C} := \{\, z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \,\}$$

ist die Menge der **komplexen Zahlen**.
Für $z = a + bi$ heißt

$$a := \operatorname{Re} z := \Re z$$

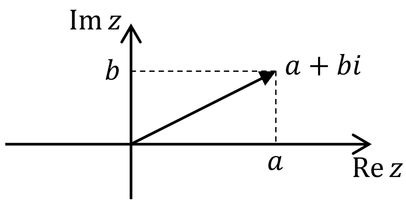
der **Realteil** von $z$ und

$$b := \operatorname{Im} z := \Im z$$

der **Imaginärteil** von $z$.
Man identifiziert reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a + 0i \in \mathbb{C}$, das heißt

$$\mathbb{R} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \,\} \subset \mathbb{C}.$$

Komplexe Zahlen mit $\operatorname{Re} z = 0$, das heißt $z = bi$ heißen **rein imaginär**.
Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ lässt sich mit Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren.
Dies erlaubt die Darstellung von $\mathbb{C}$ als **komplexe** oder **Gaußsche Zahlenebene**.




**Addition in $\mathbb{C}$**

$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = a + c + bidi = a + c + (b + d)i}$$

Entspricht Addition in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow (\mathbb{C}, +)$ ist abelsche Gruppe.

**Multiplikation in $\mathbb{C}$**

$$(a + bi)(c + di) = ac + cbi + adi + bdi^2 = \underbrace{(ac - bd)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\text{Imaginärteil}} i$$

$$\boxed{(a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (ad + cb)i}$$

**3.17. Satz**

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein Körper.
Inverses Element der Multiplikation:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}\text{ für } a+bi\neq 0$$

Trick hierzu: „Nenner reell machen“: Mit $a-bi$ erweitern.

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2-(bi)^2}=\frac{1-bi}{a^2+b^2}$$

(Dies rechtfertigt die obigen formalen Rechnungen.)

**3.18. Definition**

Für

$$z=a+bi$$

heißt

$$\bar{z}:=a-bi$$

die **zu $z$ konjugiert komplexe Zahl** und

$$|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$$

der **Betrag** von $z$.

Es gilt:

$$|z^2|=z\cdot\bar{z},$$

denn

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=|z|^2.$$

**3.19. Eigenschaften**

Mit $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$:

(i) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
(ii) $\overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
(iii) $|\bar{z}|=|z|$
(iv) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
(v) $|z_1+z_2|\leq|z_1+|z_2|$

**3.20. Quadratische Gleichungen**

$$x^2-c=0\text{ mit } c\in\mathbb{R}$$

**1. Fall** $c>0\Rightarrow x^2-c=\left(x-\sqrt{c}\right)\left(x+\sqrt{c}\right)=0\Leftrightarrow x_1=\sqrt{c}\wedge x_2=-\sqrt{c}$
Zwei reelle Nullstellen.
**2. Fall** $c=0\Rightarrow x^2=(x-0)(x-0)=0\Leftrightarrow x_1=x_2=0$
Eine (doppelte) reelle Nullstelle.

**3. Fall** $c < 0 \Rightarrow x^2 - c = \left(x - i\sqrt{-c}\right)\left(x + i\sqrt{-c}\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = i\sqrt{-c} \wedge x_2 = -i\sqrt{-c}$
Zwei rein imaginäre Nullstellen.

Sei nun

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

eine allgemeine quadratische Gleichung.

**Quadratische Ergänzung**

$$\begin{aligned} 0 = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{21}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{4a^2}}_{>0}(\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{Diskriminante}}) \text{ rein quadratische Gleichung.}$$

**1. Fall** $(b^2 - 4ac) > 0$
Dann:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Zwei reelle Nullstellen.

**2. Fall** $(b^2 - 4ac) = 0$
Dann

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Doppelte reelle Nullstelle.

**3. Fall** $(b^2 - 4ac) < 0$
Dann

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac)} = \frac{\pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-bi\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \wedge \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Zwei komplexe Nullstellen.

In jedem Fall gilt:
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ „Linearfaktorzerlegung"
$ax^2 + bx + c$ besitzt stets zwei im Allgemeinen komplexe eventuell zusammenfallende Nullstellen.

### 3.21. Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle (Beweis später).

Da für Nullstelle $z_1 \in \mathbb{C}$ dann

$$p(z) = (z - z_1) \cdot \tilde{p}(z)$$

gilt, mit $\tilde{p}$ Polynom mit $\operatorname{grad} \tilde{p} = \operatorname{grad} p - 1$, folgt rekursiv:

### 3.22. Korollar

Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ besitzt in den komplexen Zahlen genau $n$ (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen $z_1, \dots, z$_$n \in \mathbb{C}$ und es gibt die Linearfaktorzerlegung $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$.

### 3.23. Beispiel

$$p(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$$

Rate Nullstelle: $z_1 = 1 \Rightarrow p(z_1) = 0$.
Dann Polynomdivision durch den zu $z_1$ gehörenden Linearfaktor:

$$\begin{array}{l}
\phantom{-}(z^3 - z^2 + 4z - 4) \div (z - 1) = z^2 + 4 \\
-\underline{(z^3 - z^2)} \\
\phantom{-(z^3 - z^2 +{}} 4z - 4 \\
\phantom{-(z^3 - z^2} -\underline{(4z - 4)} \\
\phantom{-(z^3 - z^2 + 4z -{}} 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Somit Nullstellen

$$z_1 = 1, z_2 = 2i, z_3 = -2i$$

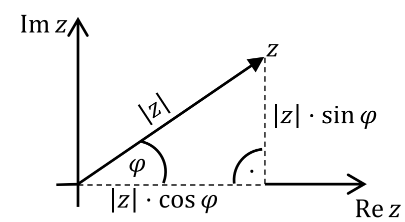
und Linearfaktorzerlegung

$$p(z) = (z - 1)(z - 2i)(z + 2i).$$

### 3.24. Polardarstellung komplexer Zahlen

$z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als

$$z = |z| \cdot \cos\varphi + i \cdot |z| \cdot \sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$



Der Winkel $\varphi = \arg z$ heißt **Argument** von $z$ und ist bis auf Vielfache von $2\pi$ eindeutig.
Wir setzen

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi} \text{ mit } \varphi \in \mathbb{R}$$

Eulersche Formel (Begründung später).

Beachte:

$$\left|e^{i\varphi}\right| = 1 \Rightarrow e^{i\varphi} \text{ liegt auf Einheitskreis.}$$

Es gilt

$$\left|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\right| = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}.$$

Somit **Polardarstellung**

$$\boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}} \text{ mit } \varphi = \arg z\,.$$

Geometrische Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$:

Seien $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$.
Dann:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = \underbrace{|z_1| \cdot |z_2|}_{=|z_1 \cdot z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \text{ mit } \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z\,.$$

Also werden komplexe Zahlen multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (Winkel $\varphi$) addiert.

**Beispiele**

$$i \cdot (-1) =?$$

$$|i| = |-i| = 1 \Rightarrow |i(-i)| = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\arg i = \frac{\pi}{2} \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$$
$$\arg\big(i \cdot (-1)\big) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi = 0 \bmod 2\pi$$

$z^8 = 1$, denn

$$|z^8| = |z|^8 = 1.$$

Daher

$$z = e^{i\varphi},$$

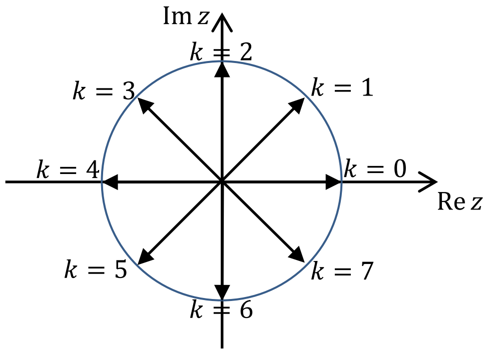
wobei gilt

$$8 \cdot \varphi = k \cdot 2\pi.$$

Das heißt

$$\varphi_k = k \cdot \frac{2\pi}{8} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

**Einheitskreis**




Hierbei ergeben sich für $k = 0, \dots, 7$ alle relevanten Werte.
Allgemein:

$$z^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow z = e^{i\varphi_k} \text{ mit } \varphi_k = k \cdot \frac{2\pi}{n}, k = 0, \dots, n-1$$

→ $n$-te **Einheitswurzeln**.

## 4. Konvergenzen von Folgen

### 4.1. Definition

Eine mit natürlichen Zahlen indizierte Familie reeller Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Folge**.

Zum Beispiel:

$$(n^2)_{n\in\mathbb{N}}: 1,4,9,16, \dots \text{ Quadratzahlen}$$
$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}: \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

### 4.2. Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen einen **Grenzwert** oder **Limes** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Wir schreiben dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

oder

$$a_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a.$$

Eine gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergente Folge heißt **divergent**.

### 4.3. Bemerkungen

(i) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so ist die Limes $a$ eindeutig bestimmt.
(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt:
Es gibt ein $M > 0$ mit $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

### 4.4. Beispiele

(i) $a_n = \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Denn:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es nach 3.14(i) ein $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.
Und dann gilt für $n \geq n_0$:

$$|a_n - n_0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$$

(ii) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$. Also Folge $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{18}, \ldots$

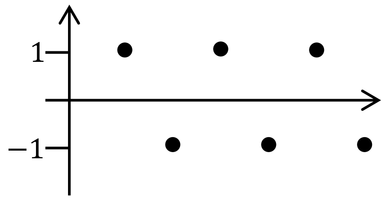
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Denn:
Zu $\varepsilon > 0$ mit $n_0$ wie in (i) $\forall n \geq n_0$

$$\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} - n_0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$$

(iii) $a_n = n^2 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, da nicht beschränkt ($a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$).

(iv) $a_n = (-1)^n$




Man sieht:
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent. Denn es gilt $\forall a \in \mathbb{R}$

$$|a_n - a| \geq 1$$

für beliebig große $n$.
Also gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq n_0$.

### 4.5. Definition

Gibt es für jedes (noch so große) $M > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq M$ für $n \geq n_0$, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bestimmt divergent** oder **uneigentlich konvergent** gegen $\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty. \text{ Analog: } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

**Beispiel**

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n^2$$

existiert nicht im Sinne von 4.5.

**4.6. Satz**

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden **Grenzwertsätze**:

(i) $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergente Folgen mit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) &= \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \\
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n
\end{aligned}$$

Ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0,$$

so ist $b_n \neq 0$ für hinreichend große $n$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(ii) Gilt $a_n < b_n$:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Vorsicht:

$$a_n < b_n \not\Rightarrow \lim_{(n\to\infty)} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

(iii)

$$|c_n| \leq b_n \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

(iv)

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = 0$$

(v)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \wedge c_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \infty$$

## 4.7. Beispiele

(i)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

Ebenso:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^k=0^k=0,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(5-\frac{1}{n^2}\right)\right]&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n^2}\right)\\&=\left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}5-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)\\&=(1+0)\cdot(5-0)=5\end{aligned}$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=1-0=1$$

(iv)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n+7}{2n^3+n^2+1}&\overset{\substack{\text{durch die größte}\\\text{Potenz im Nen-}\\\text{ner geteilt.}}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\\&=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}\\&=\frac{1+2\cdot 0+7\cdot 0}{2+0+0}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+1}{n^7+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^7}}{1+\frac{1}{n^7}}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

(v)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

Denn

$$n=\left(\sqrt[n]{n}\right)^n=((\sqrt[n]{n}-1)^n\overset{2.9}{=}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}\cdot\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^k}_{\geq 0}\geq\binom{n}{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n-1}\right)^2$$

Und

$$\begin{aligned}&\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2\\&\Rightarrow\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\leq\frac{2}{n-1},\ \forall n\geq 2\\&\Rightarrow\left|\sqrt[n]{n}-1\right|\leq\sqrt[n]{\frac{2}{n-1}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\\&\Rightarrow\sqrt[n]{n}-1\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\Rightarrow\sqrt[n]{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

(vi)

$$q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, \text{ wenn } |q| < 1, \\ 1, \text{ wenn } q = 1, \\ \text{sonst divergent für } |q| > 1,\, q = -1. \end{cases}$$

Denn für $|q| > 1$ mit $\alpha := |q| - 1 > 0$:

$$\left|\frac{1}{q^n}\right| = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\cdot\alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \overset{4.6(\mathrm{v})}{\Longrightarrow} q^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(vii) Sei $|x| > 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0$$

Denn mit

$$\alpha := |x| - 1 > 0 \text{ für } p \in \mathbb{N},\, p > k \text{ und } n > 2p$$

gilt:

$$|x|^n = (1+\alpha)^n = \sum_{l=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{l}\cdot\alpha^l}_{\geq 0} \geq \binom{n}{p}\cdot\alpha^p$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\cdot\alpha^p > \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^p}{p!}\cdot\alpha^p$$

Daher ist nun

$$n - p + 1 > n - \frac{n}{2} + 1 > \frac{n}{2}$$

und daher

$$\left|\frac{n^k}{x^n}\right| < \frac{n^k\cdot p!}{\left(\frac{n}{2}\right)^p\cdot\alpha^p} = \frac{2^p\cdot p!}{\alpha^p}\cdot\frac{1}{n^{p-l}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

**4.8. Satz**

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton wachsend** (oder **fallend**), das heißt

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ (bzw. } a_{n+1} \leq a_n\text{)},$$

konvergiert sie genau dann, wenn sie beschränkt ist.

**Beweisidee**

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt $\overset{4.3(\mathrm{ii})}{\Longrightarrow}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monotn wachsend, dann gibt es

$$a := \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \sup_{n\to\infty} a_n$$

und es folgt nach Definition des Supremums:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

(wichtig ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)

### 4.9. Beispiele

(i) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, (nach unten) beschränkt.
$\Rightarrow$ konvergent, denn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

(ii) (Aufgabe 22)

$$a_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e \text{ existiert.}$$

Wegen

$$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$$

folgt $2\le e\le 3$

$$e\approx 2{,}7182818\ldots$$

heißt **Eulersche Zahl**.

### 4.10. Definition

(i) Ist $n_1<n_2<n_3<\cdots$ aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt

$$\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}=a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},\ldots$$

eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $a\in\mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$a_{n_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}a.$$

**Beispiel**
$a_n=(-1)^n\Rightarrow(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent, aber $+1$ und $-1$ sind Häufungspunkte.

Es gilt: Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

### 4.11. Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

**Beweisidee**
Es gibt dann also $M\ge 0$ mit $-M\le a_n\le M,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Halbiere Intervall $I_0=[-M,M]$ in Teilintervalle $[-M,0]$ und $[0,M]$. Dann liegen in

mindestens einem Teilintervall unendlich viele Folgenglieder $a_n$.
Wähle ein solches, genannt $I_1$.
Weiter rekursiv: Halbiere $I_1$ und wähle Teilintervall $I_2$, das unendliche viele $a_n$ enthält.

Dann ist $I_1, I_2, I_3, \dots$ Intervallschachtelung

$$\overset{3.15}{\Longrightarrow} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{a\}$$

(wieder wichtig: $\mathbb{R}$ ist vollständig)

Wähle nun aus jedem $I_k$ ein Folgenglied $a_{n_k}$. Das gibt Teilfolge $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Konvergenz gegen $a$.

### 4.12. Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

### 4.13. Cauchy-Kriterium

Eine Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

**Beweis**
„⇒“: Sei

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $n \geq n_0$.

⇒ für $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

„⇐“: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Denn mit $\varepsilon = 1$ folgt: Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$|a_m - a_n| < 1 \text{ für } m, n \geq n_0.$$

$$\Rightarrow |a_m| = \left|a_m - a_{n_0} + a_{n_0}\right| \leq \left|a_m - a_{n_0}\right| + \left|a_{n_0}\right| < 1 + \left|a_{n_0}\right|$$
$$\Rightarrow |a_n| \leq \max\left(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n-1}|, 1 + \left|a_{n_0}\right|\right), \forall n \in \mathbb{N}$$

Somit besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen **Häufungspunkt**. Dann bleibt zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt höchstens einen Häufungspunkt.

Seien $a, a'$ zwei Häufungspunkte:
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann (hinreichend große) Indizes $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$|a_m - a'| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a_m + a_m - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a'|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Da $\varepsilon$ beliebig $\Rightarrow a = a'$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon,$$

falls $n, m \geq n_0$. Somit: **Cauchy-Folge**.

### 4.14. Bemerkung

Man kann zeigen: Für einen angeordneten Körper $K$ sind äquivalent:

(i) Vollständigkeitsaxiom
(ii) $K$ ist archimedisch angeordnet + Intervallschachtelungseigenschaft (3.15)
(iii) $K$ ist archimedisch angeordnet + jede Cauchy-Folge ist konvergent

## 5. Unendliche Reihen

### 5.1. Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und

$$s_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,.$$

Dann heißt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige **Partialsummenfolge** oder **Reihe**.
Konvergiert die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so heißt die Reihe **konvergent** und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n$$

**5.2. Beispiel**

(i) **Geometrische Reihe** für $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

**1. Fall** $q = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty \text{ divergent}$$

**2. Fall** $q \neq 1$. Dann folgt für Partialsummen nach 2.1(ii)

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$

Somit ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $|q| < 1$ und zwar gegen $\frac{1}{1-q}$.

**Also**
Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

ist konvergent $\Leftrightarrow$ $|q| < 1$.
Der Wert der Reihe beträgt dann

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

(ii) **Die harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist nicht konvergent (bestimmt divergent, mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$), denn

$$\begin{aligned} s_n &= q + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Für hinreichend große $n$ kann man beliebig Summanden $\frac{1}{2}$ addieren $\Rightarrow$ unbeschränkt.

Also:

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

**Bemerkung**
Die harmonische Reihe wächst sehr langsam.
Für

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 100$$

sind $n \geq e^{100} - 1 \approx 2{,}68 \cdot 10^{43}$ Summanden nötig.

### 5.3. Konvergenzkriterien für Reihen

(i) Notwendig dafür, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

konvergent ist, ist dass

$$\lim_{n\to\infty} a_k = 0$$

(aber nicht hinreichend, vergleiche mit der harmonischen Reihe).

(ii) **Leibniz-Kriterium** für alternierende Reihen (das heißt Reihen mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern)

Für eine Reihe der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

mit $a_k \geq 0$ gilt:

Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend mit $a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergent.

(iii) **Majorantenkriterium**
Ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

eine konvergente Reihe und

$$|b_k| \leq a_k,$$

so ist auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergent mit

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

**Beispiel**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} =: a_k \text{ für } k \geq 2.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left((1-12)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ konvergent.}\end{aligned}$$

So ist auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergent.

Somit auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergent für $n \geq 2$ (da $\left|\frac{1}{k^n}\right| \leq \frac{1}{k^2}$).

Anmerkung: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(Analog gibt es auch das Minorantenkriterium für $|b_k| \geq a_k$).

Durch Vergleich mit konvergenter geometrischer Reihe folgt aus Majorantenkriterium:

(iv) **Quotienten-Kriterium**

Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Reihe mit Gliedern $a_k \neq 0$.

Dann gibt es eine Zahl $q$ mit $0 \leq q < 1$, so dass die Reihe bei

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q, \forall \text{großen } k \in \mathbb{N}$$

konvergiert.

**Beispiel**
Betrachte für $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

das heißt bei

$$a_k = \frac{x^k}{k}$$

sei ohne Einschränkung $x \neq 0$.

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^k+1}{k+1}}{\frac{x^k}{k}}\right| = |x| \cdot \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\leq 1} \leq |x|$$

Das heißt mit der Wahl $q = |x|$ folgt für alle $x$ mit $|x| < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

ist konvergent.

**Ergänzung**
Findet man umgekehrt ein $q > 1$, so dass

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq q, \forall \text{großen } k \in \mathbb{N},$$

divergent.

Im Beispiel: Für $|x| > 1$ ist

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \cdot |x| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |x| > 1$$

also

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq \underbrace{\frac{1+|x|}{2}}_{=:q} > 1$$

für $k$ hinreichend groß.

Somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ divergent für $|x| > 1$.

**Schließlich**

Für $x = 1$: Harmonische Reihe, divergent.

Für $x = -1$: Alternierende Reihe, konvergent.

Es gibt $x \in [-1,1[$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Aus Beispiel folgt:

**5.4. Korollar**

Sei $a_k \neq 0$. Es gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \begin{cases} < 1, \text{ so gilt } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent,} \\ > 1, \text{ so gilt } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent.} \end{cases}$$

Falls

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1,$$

so ist keine Aussage möglich.

**5.5. Beispiele**

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

Quotienten-Kriterium:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{1}{2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$$

Also konvergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}: \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

(ii)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}$$

Quotienten-Kriterium:

$$\frac{\frac{4 \cdot 2^{k+2}}{3^{k+1}}}{\frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{konvergent}$$

Hier gilt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k} = 8 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+2}$$
$$= 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$= 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 8 \cdot \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{32}{3}$$

## 6. Stetige Funktionen

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und damit

$$f: M \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

reelle Funktion.
Diese Funktion $f$ heißt **stetig**, wenn die Werte $f(x)$ beliebig wenig variieren, wenn $x$ hinreichend wenig variiert.
Präzise:

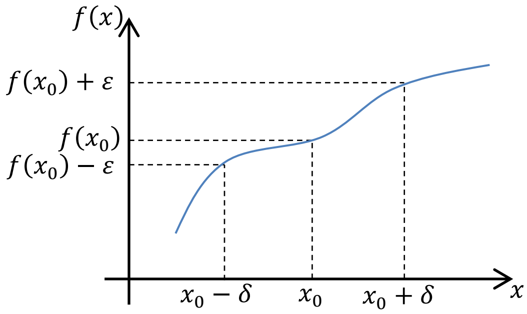
### 6.1. Definition

$f: M \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** im Punkt $x_0 \in M$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$.

**Bemerkung**
$\delta$ hängt natürlich von $\varepsilon$ ab. Je kleiner $\varepsilon$, desto kleiner muss man im Allgemeinen $\delta$ wählen.




$\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$, beliebig klein vorgegeben.
Zu diesem $\varepsilon > 0$ muss es $\delta > 0$ geben, so dass

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap M$$

durch $f$ in

$$]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$$

abgebildet wird.

## 6.2. Beispiele

(i) Konstante Funktionen

$$f(x) = c$$

sind stetig. Hier gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

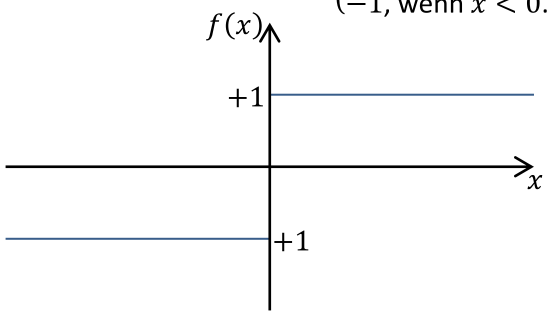
für jedes $\varepsilon > 0$, egal wie $\delta$ gewählt.

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ ist stetig (das heißt stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$).
Denn sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$.
Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$.

$$|f(x) - f(x_0)| = c \cdot x - c \cdot x\_0| = |c| \cdot |x - x_0| < |c| \cdot \delta = |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

(iii) Die Vorzeichenfunktion (sgn: signum = lat. Vorzeichen).

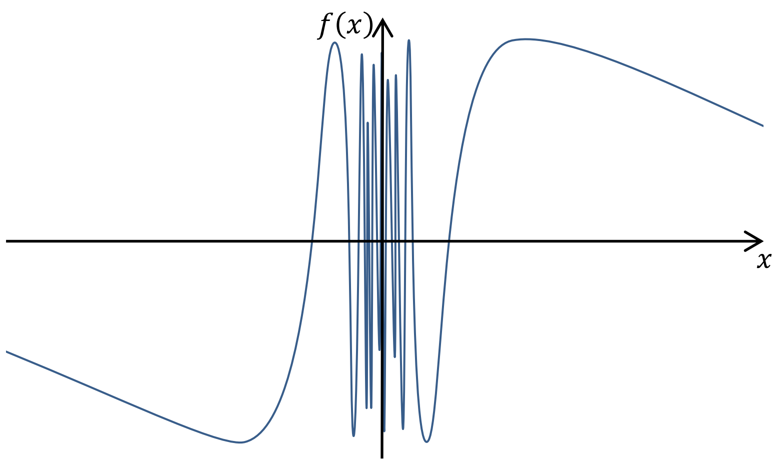
$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}&: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, \text{ wenn } x > 0, \\ 0, \text{ wenn } x = 0, \\ -1, \text{ wenn } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$




sgn ist unstetig in $x_0 = 0$ (aber stetig für $x_0 \neq 0$).

(iv) Unstetigkeit muss kein Sprung sein:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, \text{ wenn } x \neq 0, \\ 0, \text{ wenn } x = 0. \end{cases}$$



**6.3. Beispiel**

Die **Exponentialfunktion**.

Es sei exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die Exponentialreihe

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x|}{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ konvergiert } \forall x \in \mathbb{R}$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y}$$

**Beweisidee**

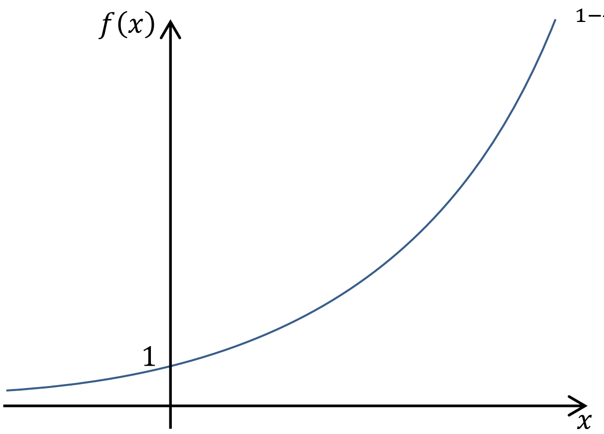
$$\begin{aligned}
\exp x \cdot \exp y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n \right) = \exp(x+y)
\end{aligned}$$

**Lemma**

$$|\exp x - 1 - x| < x^2 \text{ für } |x| < 1, x \neq 0$$

Denn

$$|\exp x - 1 - x| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{x^2}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k} \overset{\text{absch.}}{\leq} \frac{x^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k}_{\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}} = \frac{3}{4} x^2 < x^2$$



**Behauptung**
exp ist stetig.

**1. Schritt**
In $x_0 = 0$ für $|x| < 1, x \neq 0$.

$$\begin{aligned} |\exp x - \exp 0| &= |\exp x - 1| = |\exp x - 1 - x + x| \\ &\leq |\exp x - 1 - x| + |x| \\ &< \underbrace{x^2}_{<|x|} + |x| < 2 \cdot |x| \end{aligned}$$

Setze daher für $\varepsilon > 0$: $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right)$.

**2. Schritt**
$x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig.
Zu $\varepsilon > 0$ nach 1. Schritt $\delta > 0$ mit

$$\begin{aligned} &|\exp x - 1| < \varepsilon \text{ für } |y| < \delta \\ \Rightarrow\ &|\exp(x - x_0) - 1| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta \end{aligned}$$

Wegen

$$|\exp x - \exp x_0| = \underbrace{|\exp x_0|}_{\text{Konstante}} \cdot \underbrace{|\exp(x - x_0) - 1|}_{<\varepsilon} \text{ für } |x - x_0| < \delta \Rightarrow \text{Behauptung}$$

## 6.4. Eigenschaften der Exponentialfunktion

(i)

$$\begin{aligned} &\exp 0 = 1 \\ &\exp 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \left( = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) \end{aligned}$$

(ii) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$

(iii) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \Rightarrow \exp x > 0$

Man schreibt daher auch

$$\boxed{\exp x = e^x}$$

## 6.5. Satz

Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, ist genau dann stetig in $x_0 \in M$, wenn folgendes gilt:

Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ gilt:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \text{ (Folgenstetigkeit)}$$

### 6.6. Bemerkung

Für stetiges $f$ kann man also „lim und $f$“ vertauschen:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Zum Beispiel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+3}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3}\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{\sqrt[n]{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = e^1 = e$$

### 6.7. Satz

Sind $f, g: M \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in M$ stetige Funktionen.
Dann sind auch

$$f+g, f-g, f\cdot g \text{ und falls } g(x_0) \neq 0 \text{ auch } \frac{f}{g}$$

stetig.

Sind $f: M \to N$ stetig in $x_0 \in M$ und $g: N \to \mathbb{R}$ stetig in $y_0 = f(x_0) \in N$, so ist auch $g \circ f: M \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0$.

### 6.8. Beispiele

(i) $x \mapsto x^n$ stetig (Produkt stetiger, konstanter Funktionen).

(ii) Jedes Polynom ist stetig:

$$p(x) = \underbrace{a_n}_{\text{stetig}}\underbrace{x^n}_{\text{stetig}} + \underbrace{a_{n-1}}_{\text{stetig}}\underbrace{x^{n-1}}_{\text{stetig}} + \cdots + \underbrace{a_0}_{\text{stetig}}$$

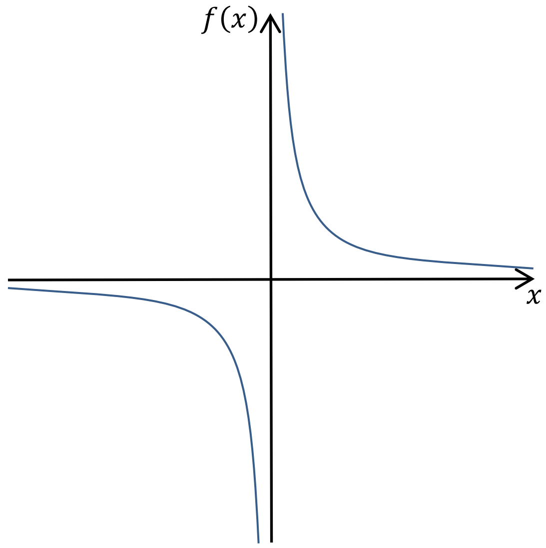
Da $x_i$ konstant $\Rightarrow$ stetig.

(iii) Jede **gebrochen rationale** Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p, q$ Polynome ist auf

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

stetig. Zum Beispiel:

$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$



(iv) $x \mapsto \underbrace{\exp}_{\text{stetig}} \underbrace{(x^2 - 2x)}_{\text{stetig}} \Rightarrow$ stetig (auf ganz $\mathbb{R}$).

(v) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ für } x \neq 1, \\ 2, \text{ für } x = 1. \end{cases}$$

ist stetig.

Denn

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1.$$

Somit

$$f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Wiederholung**

$f: M \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in M$.

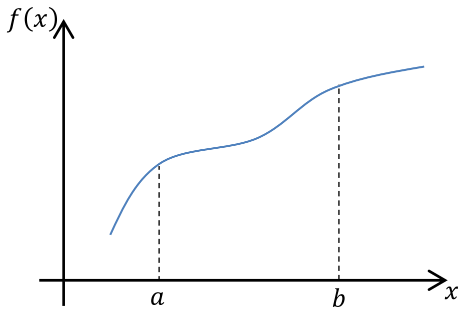
$$\exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta, \forall \varepsilon > 0$$
$$\Leftrightarrow \text{für jede Folge } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0: f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

**Stetigkeit von Umkehrfunktionen**

Ist $f: [a, b] \to [f(a), f(b)]$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion, das heißt $f(x) < f(y)$ für $x < y$, dann ist $f$ umkehrbar und die Umkehrfunktion

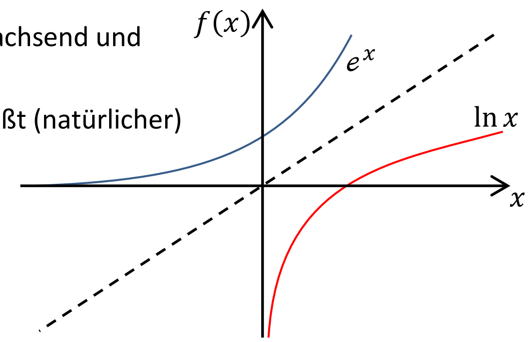
$$f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend (Gilt analog für monoton fallende Funktionen).




### 6.9. Beispiele

(i) exp: $\mathbb{R} \to ]0, \infty[$ ist streng monoton wachsend und stetig.
Die Umkehrfunktion $\ln: ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$ heißt (natürlicher) **Logarithmus** und ist streng monoton wachsend und stetig.



Es gilt:

$$\begin{aligned}\ln 1 &= 0\\ \ln e &= 1\\ \ln(x\cdot y) &= \ln x + \ln y\,,\, x,y>0\\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln x - \ln y\\ \ln(x^n) &= n\cdot \ln x\end{aligned}$$

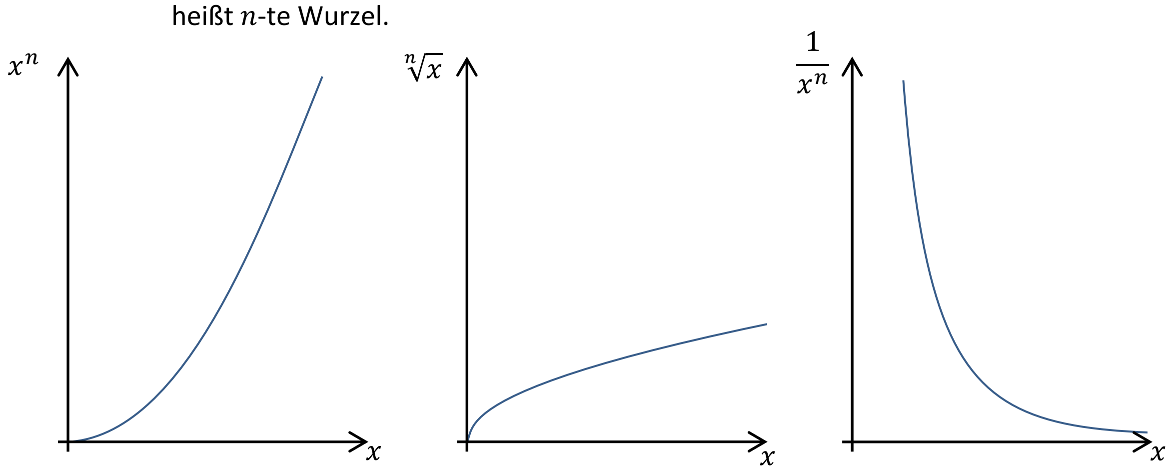
(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenzfunktion

$$\begin{aligned}[0,\infty[ &\to [0,\infty[\\ x &\mapsto x^n\end{aligned}$$

stetig und streng monoton wachsend.
Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\cdot}: [0,\infty[ &\to [0,\infty[\\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

heißt $n$-te Wurzel.




Für $x>0$ ist auch die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ erklärt:

$$\begin{aligned}]0,\infty[ &\to ]0,\infty[\\ x &\mapsto x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\end{aligned}$$

Diese ist streng monoton fallend und stetig.

(iii) Sei $q = \frac{n}{m}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow x^q = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n \text{ für } \begin{cases} x \geq 0, \text{ falls } q>0,\\ x<0, \text{ falls } q<0.\end{cases}$$

Es gilt

$$\ln(x^q) = q\cdot \ln x\,,$$

also auch

$$x^q = e^{q\cdot \ln x}.$$

Man erklärt daher $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha := e^{\alpha\cdot\ln x},\, x>0.$$

Denn $]0,\infty[\ \to\ ]0,\infty[$ ist stetig.
Aber auch für $a > 0$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to\ ]0,\infty[ \\ &x \mapsto a^x = e^{x\cdot\ln a} \end{aligned}$$

stetig.

**Grenzwerte für Funktionen**

**6.10. Definition**

Sei $M \subset \mathbb{R}$:

(i) Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $M$, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ gibt mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.

Die Menge der Häufungspunkte von $M$ heißt der **Abschluss** $\overline{M}$.
Zum Beispiel: $\overline{]a,b[} = [a,b]$, $\overline{[a,b]} = [a,b]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

(ii) Sei $f: M \to \mathbb{R}$ reelle Funktion und $x_0 \in \overline{M}$. Dan heißt $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ **Grenzwert** oder **Limes** von $f$ für $x \longrightarrow x_0$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ gilt:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Wir schreiben dann:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

(iii) Ebenso definiert man

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Analog:

$$\lim_{x>\infty} f(x)$$

(iv) Manchmal schreibt man die Definitionsmenge von $f: M \to \mathbb{R}$ bei Limesbildung auf die Teilmenge $D \subset M$ ein:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D}} f(x) = a \Leftrightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>in $D$</u> mit $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.

Insbesondere **einseitige Limiten**:

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \text{ linksseitiger Limes}$$
$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) := \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \text{ rechtsseitiger Limes}$$

## 6.11. Folgerungen

Sei $f: M \to \mathbb{R}$ Funktion. Dann gilt

(i)

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \in M \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existiert (dann gilt } \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x)).$$

(ii) Ist $x_0$ innerer Punkt von $M$ (das heißt $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[ \subset M$ für ein $\varepsilon > 0$).

$f$ ist stetig in $x_0$, genau dann, wenn

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(x)$$

(iii) Es gelten die **Grenzwertsätze**:
Wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

und auch

$$\lim_{x\to x_0} g(x)$$

existieren, dann auch

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)\,,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(a\cdot f(x)\big) = a\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)\,,$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

Falls

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0,$$

dann auch

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

(iv)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ und } f(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$$

(v)

$$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to x_0} f(x) = 0\\ |g(x)| \leq M \text{ beschränkt}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = 0$$

**6.12. Beispiele**

(i)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x^2}+1}{2x^2+2}$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} e^{x^2}+1 &= e^{1^2}+1 = e+1\\ \lim_{x\to x_0} 5x^2+2 &= 5\cdot 1^2+2 = 7\neq 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{e^{c^2}+1}{5x^2+2}=\frac{e+1}{7}$$

(ii)

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\uparrow x_0}\operatorname{sgn} x &= -1\\ \lim_{x\downarrow x_0}\operatorname{sgn} x &= -1\\ \operatorname{sgn} 0 &= 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{sgn ist nicht stetig in } 0.$$

(iii)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}} x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

Wegen

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}} x = 0$$

und

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq 0}} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

(iv)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

(v)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^7+2x^3+4x}{5x^7+8x} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^6}}{5+\frac{8}{x^6}}\\ &=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)}{\lim_{x\to\pm\infty}\left(5+\frac{8}{x^6}\right)}=\frac{1+0+0}{5+0}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

(vi)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x},\ n\in\mathbb{N}, \text{ hier } \lim_{x\to x_0} x^n=\infty,\ \lim_{x\to\infty} e^x=\infty,$$

aber dafür $x>0$:

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{e^x}\leq (n+1)!\cdot\frac{x^n}{x^{n+1}}=\frac{(n+1)!}{x}\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Also

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0}$$

(vii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

hier

$$\lim_{x\to 0}(e^x-1)=e^0-1=0$$
$$\lim_{x\to 0}x=0$$

Aber für $|x|<1$ nach Lemma in 6.3:

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|=\left|\frac{e^x-1-x}{x}\right|=\frac{|e^x-1-x|}{|x|}\leq\frac{x^2}{|x|}=|x|\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

also

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

**Wiederholung: Limiten von Funktionen**

$$\lim_{x\to x_0}f(x)$$
$$x_n\to x_0\colon f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}?$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

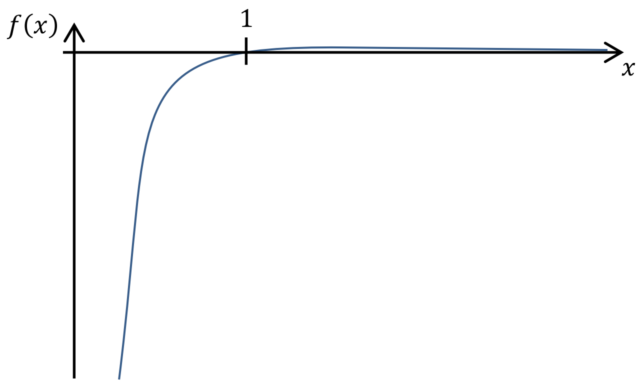
Im letzten Beispiel gehen Nenner und Zähler gleich schnell gegen 0.

(viii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}2\frac{e^{2x}-1}{x}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Da } x\mapsto y=2x\\ \text{stetig.}}}{=}2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}$$

(ix)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}\ \left(=\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}\right)$$
$$\overset{x=e^y}{=}\lim_{y\to\infty}\frac{y}{(e^y)^n}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{ny}}$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\lim_{y\to\infty}\frac{ny}{e^{ny}}=\frac{1}{n}\cdot\lim_{z\to\infty}\frac{z}{e^z}=0$$

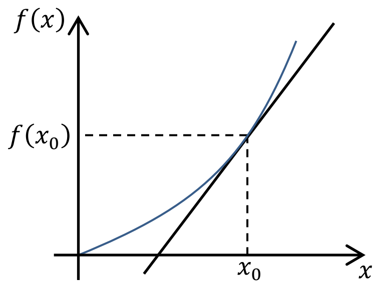



(x)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\Big(\underbrace{(x^n)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln x}_{\to-\infty}\Big)\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{y}\cdot\ln\frac{1}{y}\right)=-\lim_{y\to\infty}\frac{\ln y}{y^n}\overset{\text{(ix)}}{=}0$$

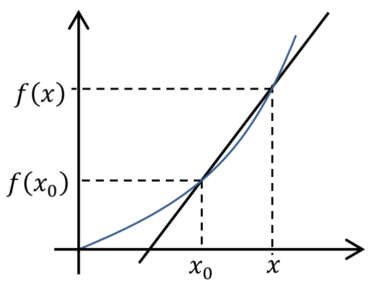
# 7. Differenzialrechnung

**Problem**
Bestimme Steigung der Tangente am Graphen einer Funktion:




Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ Funktion und $x_0 \in I$.

**Idee**
Bestimme die Steigung der Tangente als Grenzwert der Steigung einer Sekante:




Steigung der Sekante ist gegeben durch Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} I \setminus \{x_0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

## 7.1. Definition

Die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** (diff'bar), wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_0$ existiert. Wirschreiben

$$f'(x_0) \coloneqq \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und nennen $f'(x_0)$ die **Ableitung** von $f$ an der Stelle $x_0$.
Weiter Schreibweisen:

$$f'(x_0) =: \underbrace{\frac{df}{dx_0}}_{df \text{ nach } dx_0}(x_0) =: \frac{d}{dx_0} f(x_0) =: \dot{f}(x_0) =: Df(x_0)$$

### 7.2. Beispiele

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$:

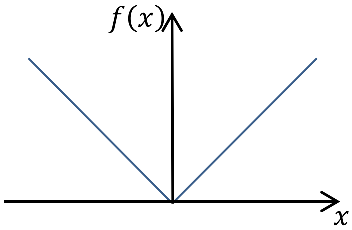
Differenzenquotient bei $x_0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = x + x_0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

$\Rightarrow f(x) = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit Ableitung $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x$.

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$:




Differenzenquotient bei $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|-|0|}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x > 0, \\ -1, \text{ wenn } x < 0. \end{cases}$$

Also

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= -1 \\ \lim_{x\downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \phantom{-}1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existiert nicht.}$$

$\Rightarrow f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

(iii) Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\exp x - \exp x_0}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left(\exp x_0 \cdot \frac{\exp(x-x_0)-1}{x-x_0}\right) \\ &= \exp x_0 \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\exp y - 1}{y}}_{=1} = \exp x_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) = e^x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = e^x = f(x)$.

### 7.3. Bemerkung

Ist $f$ in $x_0$ differenzierbar, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0}} \text{ existiert} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

Also

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dies zeigt

$$\boxed{f \text{ differenzierbar in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0}$$

### 7.4. Ableitungen wichtiger Funktionen

Folgende Funktionen $f$ sind auf ihrem Definitionsbereich $I$ differenzierbar mit Ableitung $f'$:

| $\boldsymbol{f(x)}$ | $\boldsymbol{I}$ | $\boldsymbol{f'(x)}$ |
|---|---|---|
| $x^n, n \in \mathbb{N}$ | $\mathbb{R}$ | $n \cdot x^{n-1}$ |
| $x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $n \cdot x^{n-1}$ |
| $x^\alpha$ | $]0, \infty[$ | $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$ |
| $\sqrt{x}$ | $]0, \infty[$ | $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$ |
| $\exp x$ | $\mathbb{R}$ | $\exp x$ |
| $\ln x$ | $]0, \infty[$ | $\frac{1}{x}$ |

### 7.5. Differentiationsregel

Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind auch die folgenden Funktionen differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot f)' &= \lambda \cdot f' && \lambda \in \mathbb{R} \\ (f \pm g)' &= f' \pm g' && \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' && \text{Produktregel} \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} && \text{falls } g(x) \neq 0 \text{ (Quotientenregel)} \end{aligned}$$

Weiter ist für differenzierbare $f: I \to J$ und $g: J \to \mathbb{R}$ auch $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \text{ (Kettenregel).}$$

„Äußere Ableitung mal innere Ableitung (Nachdifferenzieren).“

## 7.6. Anwendungsbeispiele dieser Regeln

(i) $f(x) = 2x^3 \cdot (x^2 + \ln x),\, x > 0$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow f'(x) &= 2 \cdot 3x^2 \cdot (x^2 + \ln x) + 2x^3 \cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right)\\ &= 6x^4 + 6x^2 \cdot \ln x + 4x^4 + 2x^2\\ &= 10x^4 + x^2 \cdot (2 + 2 \cdot \ln x)\end{aligned}$$

(ii) $f(x) = a^x,\, a > 0,\, x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\Rightarrow f(x) = \exp(\ln a^x) = \exp(x \cdot \ln a)\\ &\Rightarrow f'(x) = \underbrace{\exp(x \cdot \ln a)}_{a^x} \cdot \underbrace{[x \cdot \ln a]'}_{\ln a} = \ln a \cdot a^x\end{aligned}$$

(iii) Ableitung von $\ln x$:

Es gilt $\exp(\ln x) = x$.
Beide Seiten differenzieren:

$$\exp(\ln x) \cdot [\ln x]' = 1$$

also

$$[\ln x]'(x) = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

**Die Regeln von l'Hospital**
Grenzwertbestimmung für unbestimmte Ausdrücke vom Typ „"

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{0}{0}“$$

das heißt mit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

## 7.7. Satz

Sei $I$ offenes Intervall und $x_0$ ein innerer oder Randpunkt von $I$ (auch $+\infty$ bzw. $-\infty$ bei unbeschränkten $I$ erlaubt), sowie $f, g\colon I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

und existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so existiert auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

> Diese Regel gilt insbesondere für einseitige Limiten.
>
> Sie darf **nur** angewendet werden, wenn die Funktion **wirklich** gegen „$\frac{0}{0}$" geht. Die Quotientenregel hat außerdem nichts mit

### 7.8. Beispiele

(i)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1},\ m,n\in\mathbb{N} \text{ ist vom Typ „}\frac{0}{0}\text{“}$$

Es ist

$$[x^m-1]'=m\cdot x^{m-1},\ [x^n-1]'=n\cdot x^{n-1}$$

und

$$\lim_{x\to 1}\frac{m\cdot x^m-1}{n\cdot x^n-1}=\frac{m}{n}$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=1$$

### 7.9. Weitere l'Hospitalsche Regeln

(i) Unter den gleichen Voraussetzungen wie in 7.7 gilt die l'Hospitalsche Regel auch für unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“, das heißt wenn

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$$

(ii) Typ „$0\cdot\infty$“:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,\ \lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$\to$ Typ „$\frac{0}{0}$“ $\to$ l'Hospital.

(iii) Typ „$\infty-\infty$“:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

$\to$ Typ „$\frac{0}{0}$“ $\to$ l'Hospital.

**Trigonometrische Funktionen**

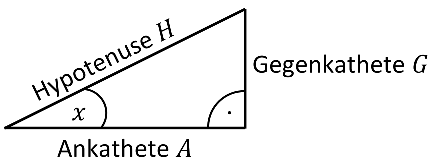
Rechtwinkliges Dreieck mit Winkel $x$ in Bogenmaß.

Es gelten folgende Verhältnisse:

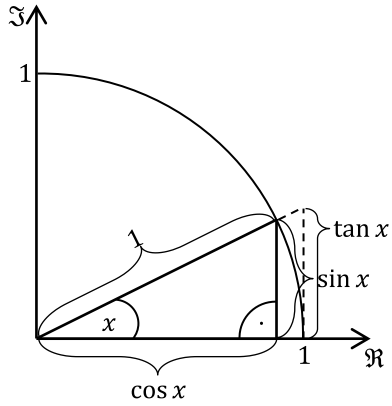
$$\sin x := \frac{G}{H}$$

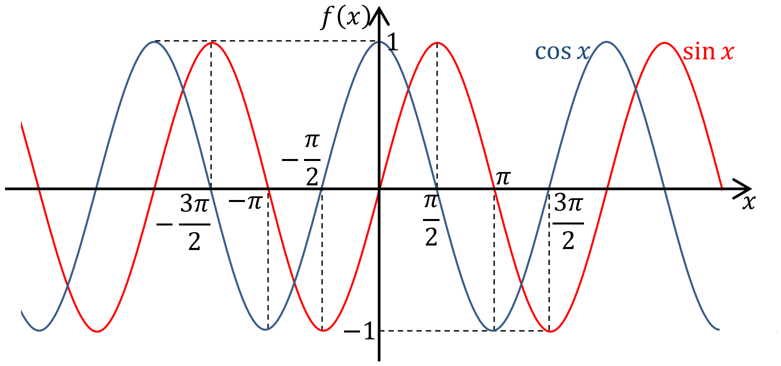
$$\cos x := \frac{A}{H}$$

$$\tan x := \frac{G}{A}=\frac{\sin x}{\cos x}$$



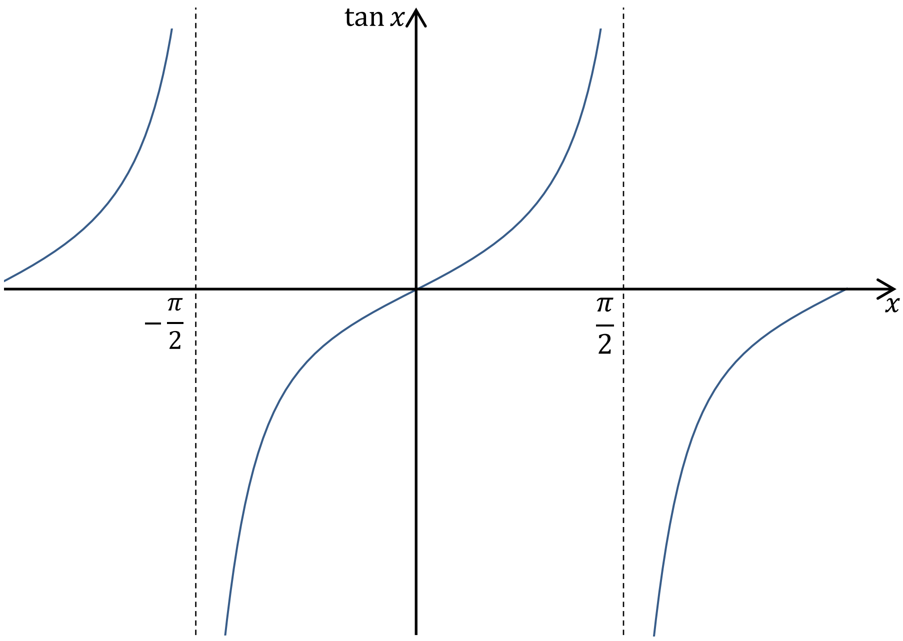
Im Einheitskreis:




$$\sin,\cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$



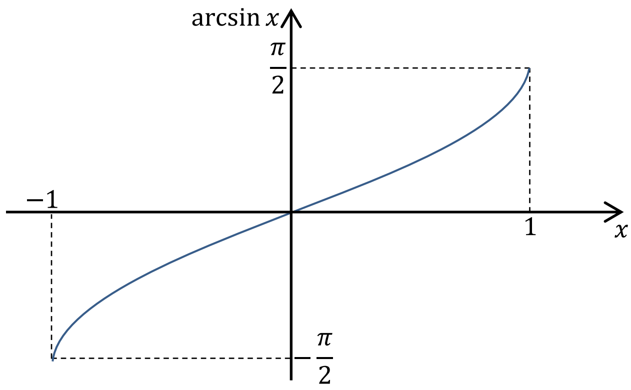

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

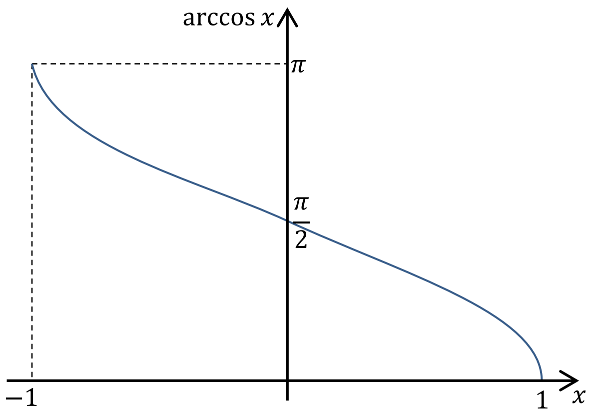
**Periodizität**

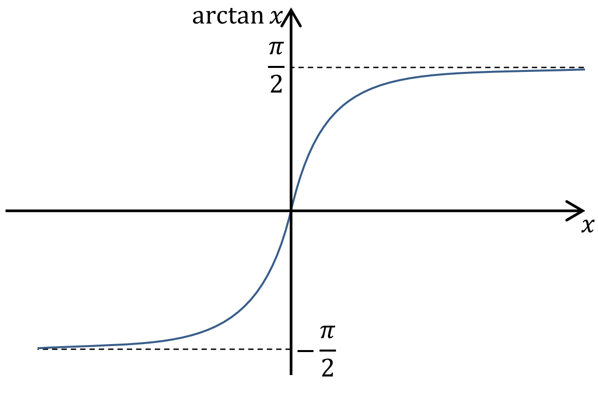
$$\sin(x+2\pi) = \sin x\,,\ \cos(x+2\pi) = \cos x\,,\ \tan(x+\pi) = \tan x$$

Umkehrfunktionen**: Arcus**- oder **zyklometrische** Funktionen

$$\arcsin\colon [-1{,}2] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\arccos\colon [-1{,}1] \to [0, \pi]$$
$$\arctan\colon \mathbb{R} \quad \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



**Ableitungen**

| $f(x)$ | $I$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2k+1}{2}\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ |
| $\arcsin x$ | $]-1,1[$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $]-1,1[$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |

**7.10. Beispiele**

(i)

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

(ii)

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}}_{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

(iii)

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}}_{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$$

(iv)

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{\text{Typ „}\frac{\infty}{\infty}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}_{\text{Typ „}\frac{\infty}{\infty}\text{“}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

(v)

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}}_{\text{Typ „}\frac{\infty}{\infty}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}}_{\text{Typ „}\frac{\infty}{\infty}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

(vi)

$$\lim_{x\to\infty}(\underbrace{x}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\to\sin 0=0}) = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

(vii)

$$\underbrace{\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)}_{\text{Typ „}\infty-\infty\text{“}} = \underbrace{\lim_{x\downarrow 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}}_{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“}}$$

$$\overset{\text{l'H.}}{=} \underbrace{\lim_{x\downarrow 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cdot\cos x}}_{\text{Typ „}\frac{0}{0}\text{“}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\cdot\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

**Kurvendiskussion, Monotonie**

**7.11. Satz**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig im Inneren von $I$ differenzierbar. Dann gilt

(i) $f'(x) \geq 0$ für alle $x$ im Inneren von $I \Leftrightarrow f$ **monoton** wachsend.
$f'(x) \leq 0$ für alle $x$ im Inneren von $I \Leftrightarrow f$ **monoton** fallend.

(ii) $f'(x) > 0$ für alle $x$ im Inneren von $I \Leftrightarrow f$ **streng monoton** wachsend.
$f'(x) < 0$ für alle $x$ im Inneren von $I \Leftrightarrow f$ **streng monoton** fallend.

**7.12. Beispiele**

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan x$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow \text{arctan ist streng monoton wachsend.}$$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$:

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend.}$$

$f$ ist sogar **streng** monoton wachsend, obwohl $f' \ngtr 0$ ($f'(0) = 0$). Das heißt, „$\Rightarrow$“ ist nicht umkehrbar.

**Bestimmung von Extremalstellen**

**7.13. Definition**

Sei $f: M \to \mathbb{R}$ reelle Funktion.

(i) $x_0 \in M$ heißt **Maximalstelle** von $f$, wenn $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in M$.

Der Wert $f(x_0)$ heißt **Maximum** von $f$.

(ii) $x_0 \in M$ heißt **lokale Maximalstelle** von $f$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x),\ \forall x \in M \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Der Wert $f(x_0)$ heißt **lokales Maximum** von $f$.

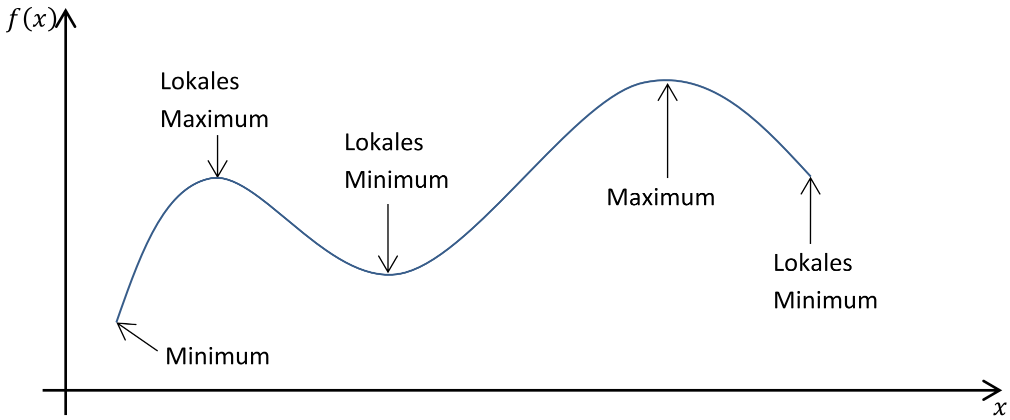
(iii) Gilt sogar

$$f(x_0) > f(x),\ \forall x \in M \setminus \{x_0\} \text{ (mit } |x - x_0| < \varepsilon),$$

so heißt $x_0$ **isolierte (lokale) Maximalstelle**.

Analog werden (isolierte) (lokale) **Minima** definiert.
Dabei:

**Extremalstelle**: Maximal- oder Minimalstelle
**Extremum**: Maximum oder Minimum




Es gilt nun:

**7.14. Satz von Fermat**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ und $x_0$ **innerer** Punkt von $I$ (liegt nicht am Rand des Definitionsintervalls).
Ist $f$ in $x_0$ differenzierbar und nimmt $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum an, so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

**7.15. Beispiele**

(i) $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$: Klar: Minimum bei $x = 0$.

$$\Rightarrow f'(x) = 2x$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(ii) $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

**Aber**: $x = 0$ ist **keine** Extremalstelle.
$\Rightarrow f'(x) = 0$ ist nur notwendig, **nicht hinreichend** für Extremum.

(iii) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$:

$f$ ist differenzierbar für $x \neq 0$ mit $f'(x) = \operatorname{sgn} x$.
$\Rightarrow$ Ableitung ist nirgendwo Null, aber Minimum bei $x = 0$, wo $f$ nicht differenzierbar ist. Maximum bei $x = \pm 1$, das heißt am Rand des Definitionsintervalls.

**Hinreichende Kriterien für Extrema**

Höhere Ableitungen: Ist Ableitung $f'$ einer Funktion $f$ selbst wieder differenzierbar, so heißt die Ableitung von $f'$

$$f'' := (f')'$$

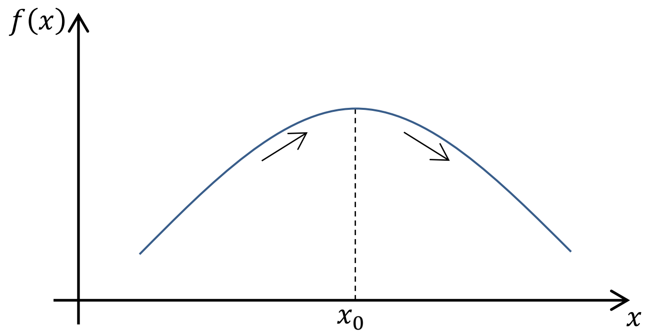
die zweite Ableitung von $f$.

Kann $f$ allgemein $n$ mal differenziert werden, so heißt $f$ $n$ mal differenzierbar mit der $n$-ten Ableitung

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Sei nun $f$ differenzierbar:
Hinreichend für isoliertes, lokales Maximum bei $x_0$ ist:

$f$ links von $x_0$ streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f' > 0$
$f$ rechts von $x_0$ streng monoton fallend $\Leftrightarrow f' < 0$




Dies ist insbesondere erfüllt, wenn für eine Stelle $x_0$ mit $f'(x_0) = 0$ gilt

$$f''(x_0) < 0.$$

Somit

**7.16. Satz**

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0$ innerer Punkt von $I$ mit $f'(x_0) = 0$.

(i) Ist $f$ sogar zweimal differenzierbar in $x_0$, so gilt:

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist isolierte, lokale Maximalstelle.
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist isolierte, lokale Minimalstelle.

(ii) Wechselt das Vorzeichen von $f'$ in $x_0$

∘ Von $+$ nach $-\Rightarrow$ $x_0$ ist isolierte, lokale Maximalstelle.
∘ Von $-$ nach $+\Rightarrow$ $x_0$ ist isolierte, lokale Minimalstelle.

(iii) Ist $f'(x)$ sowohl links als auch rechts von $x_0$ strikt positiv oder strikt negativ, so besitzt $f$ bei $x_0$ **keine** Extremalstelle.

**7.17. Beispiele**

(i) $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$.
Ist auf $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar:

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin x$$
$$\Rightarrow f''(x) = -\cos x$$

Mögliche Extrema für $f'(x) = -\sin x = 0$, das heißt $x \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Es ist nun

$$f''(k\cdot\pi) = -\cos(k\cdot\pi) = \begin{cases} -1, \text{ wenn } k \text{ gerade,} \\ +1, \text{ wenn } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 2\cdot\pi\cdot k, k \in \mathbb{Z}$ ist isolierte, lokale Maximalstelle.
$\Rightarrow x = (2k+1)\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$ ist isolierte, lokale Minimalstelle.

(ii) $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Aber $f''(0) = 0 \rightarrow$ Keine Aussage möglich.
Jedoch ist $f'(x) = 3x^2 > 0$ für $x < 0$ und auch $x > 0$. Also ist nach 7.16(iii) kein Extremum bei $x = 0$.

(iii) $f(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Wieder $f'(0) = 0 \rightarrow$ Keine Aussage möglich.
Aber

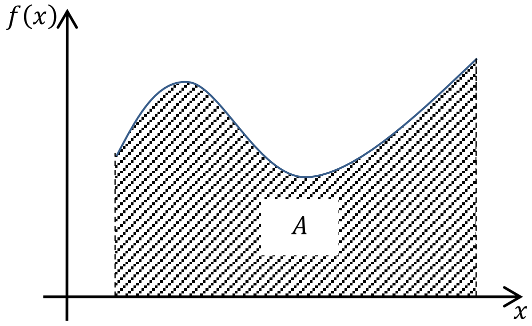
$$f'(x) = 4x^3 \begin{cases} < 0, \text{ für } x < 0, \\ > 0, \text{ für } x > 0. \end{cases}$$

Vorzeichenwechsel von „$-$“ nach „$+$“ $\Rightarrow$ Minimum bei $x = 0$.

# 8. Integralrechnung

## 8.1. Das Riemann-Integral

Sei $[a,b]$ beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkte Funktion (hier $f\geq 0$).




**Problem**
Bestimme Flächeninhalt $A$ zwischen Funktionsgraphen von $f$ und $x$-Achse.

Betrachte dazu **Zerlegung** $Z$ des Intervalls $[a,b]$ in Teilintervalle, das heißt wähle Punkte

$$a = x_0 < a_1 < \cdots < x_k = b,$$

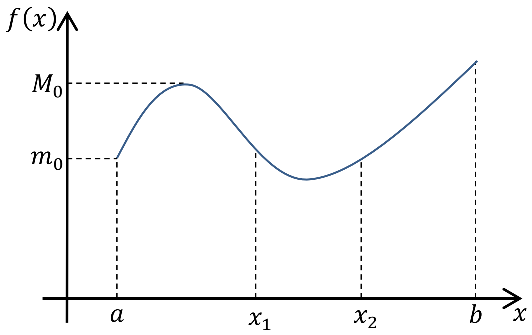
und bestimme in jedem Teilintervall $[x_{i-1},x_i]_{i=1\ldots k}$ kleinste obere Schranke der Funktionswerte

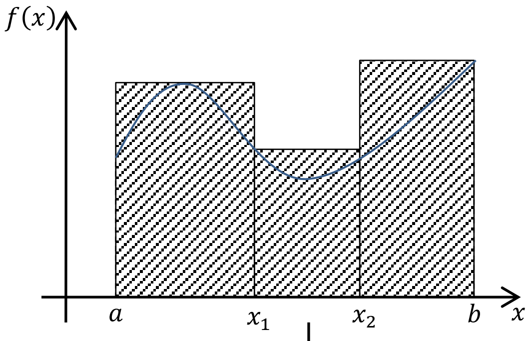
$$M_i \coloneqq \sup_{x\in[x_1,\ldots,x_i]} f(x)\,,$$

bzw. größte untere Schranke der Funktionswerte

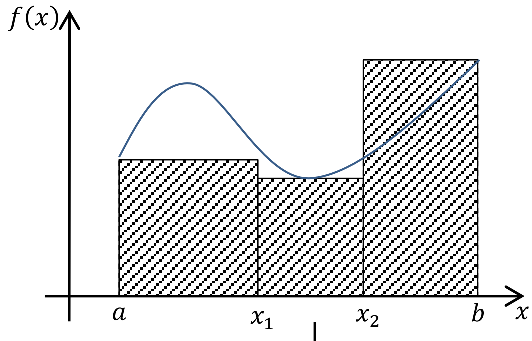
$$m_i \coloneqq \inf_{x\in[a_1,\ldots,a_i]} f(x)\,.$$

Nähere Flächeninhalt $A$ durch Flächen von Rechtecken oben und unten an:






$$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1})$$




$$U_Z(f) := \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$O_Z(f)$ heißt **Obersumme** von $f$ bei gegebener Zerlegung $Z$.
$U_Z(f)$ heißt **Untersumme** von $f$ bei gegebener Zerlegung $Z$.

Klarerweise gilt

$$U_Z(f) \leq A \leq O_Z(f).$$

Man wählt nun Folge von Zerlegungen $Z_n$, die immer feiner werden, das heißt für die gilt

$$\underbrace{\delta(Z_n)}_{\text{Feinheit der Zerlegung } Z_n} := \max(x_i - x_{i-1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und erwartet, dass

$$O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und damit

$$O_{Z_n}(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A, U_{Z_n}(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A.$$

## 8.2. Definition

Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)**integrierbar**, wenn für jede Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen $[a, b]$ mit $\delta(Z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt:

$$O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Der gemeinsame Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} O_{Z_n}(f) = \lim_{n\to\infty} U_{Z_n}(f)$$

heißt das (Riemann-)**Integral**

$$\int_a^b f(x)dx \text{ von } f \text{ im Intervall } [a, b].$$

### 8.3. Satz

Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.

**Beweisidee**
Betrachte

$$O_Z(f) - U_Z(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

Nun gilt: Stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Intervallen sind „gleichmäßig" stetig.

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \text{ für } |x - x'| < \varepsilon$$

Das heißt bei gegebenem $\varepsilon$ kann für alle $x$ dasselbe $\delta$ gewählt werden. → „gleichmäßige Stetigkeit".

**Feinheit der Zerlegung**
Länge des maximalen Teilintervalls.

Ist die Zerlegung $Z$ hinreichend fein, nämlich

$$\delta(Z) < \delta, \text{ so folgt } M_i - m_i \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow O_Z(f) - U_Z(f) \leq \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon \cdot (b - a),$$

denn die Summe aller Teilintervalllängen ist gleich der Länge des Definitionsintervalls.

□

### 8.4. Beispiele

(i) $f(x) = \alpha$ konstant.

Für jede Zerlegung $Z$ gilt $M_i = m_i = \alpha$.

$$\Rightarrow O_Z(f) = U_Z(f) = \sum_{i=1}^{k} \alpha(x_i - x_{i-1}) = \alpha \cdot (b - a)$$
$$\Rightarrow \int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a)$$

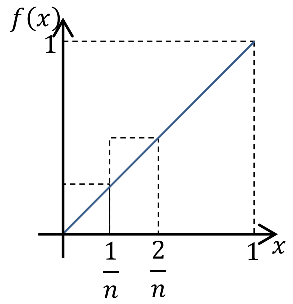
(ii) Bestimme

$$\int_0^1 x dx \,.$$

Da $f(x) = x$ stetig, ist $f$ integrierbar.
Wähle Folge von Zerlegungen $Z_n$ von $[0,1]$ mit Zerlegungspunkten

$$x_i = \frac{i}{n}, \text{ mit } i = 0, \ldots, n.$$

$\Rightarrow$ Feinheit der Zerlegung $\delta(Z_n) = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$




Bestimme zum Beispiel Obersumme $M_i = \frac{1}{n}$:

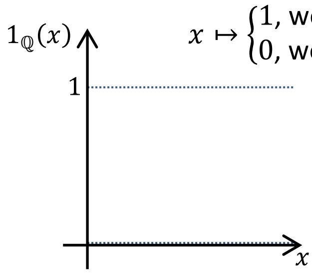
$$\Rightarrow O_{Z_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Somit

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

(iii) Dirichletsche Sprungfunktion

$$1_{\mathbb{Q}}(x) \colon \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ wenn } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$




Hier gilt für jede Zerlegung $Z$ von $[0,1]$ $M_i = 1$ und $m_i = 0$:

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} O_Z(f) &= \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1 \\ U_Z(f) &= \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1_{\mathbb{Q}} \text{ ist nicht Riemann-integrierbar.}$$

## 8.5. Eigenschaften

Seien $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Es gilt:

(i) Linearität:

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

(ii) Monotonie:

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(iii) Ist $c \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(iv) Man setzt

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^a f(x)dx = 0.$$

**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**

## 8.6. Definition

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Eine differenzierbare Funktion $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von $f$, wenn $F' = f$.

## 8.7. Bemerkung

Stammfunktion $F$ von $f$ ist nur bis auf additive Konstante eindeutig bestimmt, das heißt Stammfunktionen von $f$ sind alle Funktionen der Gestalt

$$F + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

Sei nun $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert nach 8.2 für $x \in [a, b]$ das Integral

$$\int_a^x f(x)dx =: F(x).$$

Untersuche Differenzenquotienten von $F$ an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ (Ohne Einschränkung sei $x > x_0$, analog $x < x_0$).

$$\begin{aligned}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx\right)\\ &= \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^{x_0} f(x)dx + \int_a^x f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx\right) - \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x f(x)dx\end{aligned}$$

$$\frac{\int_{x_0}^{x} f(x)dx}{x - x_0} \begin{cases} \leq \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x} \max_{t\in[x_0,x]} f(t)\,dx = \max_{t\in[x_0,x]} f(t) \\ \geq \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x} \max_{t\in[x_0,x]} f(t)\,dx = \min_{t\in[x_0,x]} f(t) \end{cases} \xrightarrow[x\to x_0]{f \text{ stetig in } x_0} f(x_0)$$

Also ist $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar mit Ableitung $F'(x_0) = f(x_0)$. Das heißt $F$ ist Stammfunktion von $f$.

Wir erhalten

**8.8. Hauptsatz**

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(i) Dann ist $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

eine Stammfunktion von $f$ mit $F(a) = 0$.

(ii) Ist $F$ Stammfunktion von $f$, so gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Zu (ii): Richtig für spezielle Stammfunktion aus (i), da

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0}.$$

$\Rightarrow$ richtig für beliebige Stammfunktionen, da Konstante $C$ bei Differenzbildung $F(b) - F(a)$ wegfällt.

**8.9. Berechnung von Integralen**

Nach dem Hauptsatz muss man zur Berechnung von

$$\int_a^b f(x)dx$$

eine Stammfunktion $F$ von $f$ finden.

Man führt daher für die (bis auf Konstante eindeutige) Stammfunktion die Bezeichnung **unbestimmtes Integral** ein:

$$F = \int f(x)dx + C$$

Im Gegensatz dazu das **bestimmte Integral**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Wir finden Stammfunktion durch Umkehren der Tabelle für Ableitungen:

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + C$ |
| $\cos x$ | $\sin x + C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x + C$ |

Weiter gilt

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \cdot \int f(x)dx\,, \alpha \in \mathbb{R}$$

**8.10. Beispiel**

$$\int_1^2 (x^3 + 3x^2)dx$$

Unbestimmtes Integral = Stammfunktion bestimmen:

$$\int (x^3 + 3x^2)dx = \int x^3 dx + 3 \cdot \int x^2 dx = \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^4}{4} + x^3 + C = F(x)$$

$$\int_1^2 (x^3 + 3x^2)dx = F(2) - F(1) = \frac{x^4}{4} + x^3\bigg|_1^2 = \frac{16}{4} + 8 - \left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{43}{4}$$

**Fortsetzung der Integralrechnung**

## 8.11. Integration mit Substitution

Sei $g: [a, b] \to [c, d]$ differenzierbar und $f: [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig (also integrierbar).
Dann ist

$$\boxed{\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy}$$

auf für unbestimmte Integrale

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = \int f(y)\, dy\Big|_{y=g(x)}}$$

**Merkregel**: Mit $y = g(x)$ ist $\frac{dy}{dx} = g'(x) \Rightarrow$ „$dy = g'(x)\, dx$"

## 8.12. Beispiele

(i) Bestimme Stammfunktion von $\sin(2x)$

Naheliegende Substitution:

$$y = g(x) = 2x \Rightarrow g'(x) = 2$$

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)\, dx &= \frac{1}{2} \cdot \int \sin(\underbrace{2x}_{g(x)}) \cdot \underbrace{\underbrace{2}_{g'(x)}\ dx}_{\text{„}dy\text{“}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int \sin y\, dy = -\frac{1}{2} \cdot \cos y + C \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + C\end{aligned}$$

(ii)

$$\int \sin x \cdot \underbrace{\cos x}_{[\sin x]'}\ dx$$

$\Rightarrow$ Substitution $y = g(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}&\int \underbrace{\sin x}_{y} \cdot \underbrace{\cos x\, dx}_{dy} = \int y\, dy \\ &= \frac{1}{2} y^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C\end{aligned}$$

Genauso:

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x \, dx \overset{y=\sin x}{=} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y + C = \arctan \sin x + C$$

(iii)

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \cdot \int (-2x) \cdot e^{-x^2} dx \\ &\overset{y=-x^2}{=} -\frac{1}{2} \int e^y \, dy \\ &= -\frac{1}{2} \cdot e^y + C \\ &= -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

## 8.13. Partielle Integration

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

Für unbestimmte Integrale:

$$\boxed{\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx}$$

## 8.14. Beispiel

$$\int x \cdot \cos x \, dx$$

Wähle

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \Rightarrow f'(x) = 1 \\ g'(x) &= \cos x && \Rightarrow g(x) = \sin x \ (+C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x \cdot \cos x \, dx &= x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx \\ &= x \cdot \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \cdot \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

## 8.15. Integration gebrochen rationaler Funktionen

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ gebrochen rationale Funktion mit $p, q$ Polynome.

Polynomdivision mit Rest liefert

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{\text{Polynom}}_{\text{Stammfunktion klar}} + \frac{r(x)}{q(x)}$$

mit Rest $r(x)$, wobei $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} q$.

$\rightarrow \frac{r(x)}{q(x)}$: **echt** gebrochen rationale Funktion

**Erinnerung**: Linearfaktorzerlegung
Polynom

$$\begin{aligned} q(x) &= a_n x^n + \cdots + a_0 \\ &= a_n (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \end{aligned}$$

mit $x_n \in \mathbb{C}$ Nullstellen von $q$.

Zwei konjugiert komplexe Nullstellen:
Produkt:

$$\begin{gathered} \big(x - (a + bi)\big)\big(x - (a - bi)\big) \\ = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \end{gathered}$$

**Reelle Produktdarstellung** reeller Polynome

$$q(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

lässt sich schreiben als Produkt von der Konstante $a_n$, von Linearfaktoren $(x - x_i)^k$ und quadratischen Faktoren $\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^l$.
Dabei sind $x_i$ reelle Nullstellen von $q(x)$ der Vielfachheit $k$ und die Nullstellen von Termen $x^2 + p_j x + q_j$ ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar von $q(x)$ der Vielfachheit $l$.

## 8.16. Partialbruchzerlegung

Jede echt gebrochen rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ lässt sich als Summe von Partialbrüchen schreiben. Diese sind gebrochen rationale Funktionen der folgenden Form:

(i) $\frac{C_1}{x-x_i}, \frac{C_2}{(x-x_i)^2}, \dots, \frac{C_k}{(x-x_i)^k}$

(ii) $\frac{a_1x+b_1}{x^2+p_jx+q_j}, \dots, \frac{a_lx+b_l}{\left(x^2+p_jx+q_j\right)^l}$

- Folgender Ansatz führt zum Ziel:

  für jede reelle Nullstelle $x_i$, das Nennerpolynoms $q$ setze man die $k$ Summanden vom Typ (i) an.
- für jedes konjugiert komplexe Nullstellenpolynom der Vielfachheit $l$, das die Nullstellen von $x^2 + p_jx + q_j$ bildet, setze man $l$ Summanden vom Typ (ii) an.

also: reelle Produktzerlegung

Linearfaktoren | quadratische Faktoren

$(x - x_i)^k$ | $\left(x^2 + p_jx + q_j\right)^l$

**Ansatz**:

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

lässt sich schreiben als Summe von

$$\frac{c_1}{x - x_i}, \frac{c_2}{(x - x_i)^2}, \frac{c_3}{(x - x_i)^3}, \dots, \frac{c_k}{(x - x_i)^k}$$

$$\frac{a_1x + b_1}{x^2 + p_jx + q_j}, \dots, \frac{a_lx + b_l}{\left(x^2 + p_jx + q_j\right)^l}$$

**Beispiele**:

$$\frac{p(x)}{x(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{(x+2)^2} + \frac{F}{(x+e)^3}$$

$$\frac{p(x)}{(x^2+x+1)(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

**Bestimmung der Koeffizienten $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, …**

1. **Methode**: Koeffizientenvergleich

rechte Seite auf Hauptnenner bringen, dieser ist gerade $q(x)$.
Dann mit $q(x)$ multiplizieren.
Man erhält:
auf der linken Seite: $p(x)$
auf der rechten Seite: ein Polynom mit Koeffizienten, die von $A, B$, … abhängen.
Durch Gleichsetzen der Koeffizienten gleicher Ordnung erhält man ein Gleichungssystem für $A, B$, ….

**Beispiel**:

$$\frac{2x+3}{x^2-2}$$

$q(x) = x^2 - 1$ besitzt zwei einfache Nullstellen 1 und $-1$: $q(x) = (x-1)(x+1)$

**Ansatz**:

$$\frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\overset{\substack{\text{Auf Hauptnenner} \\ \text{bringen} \\ \downarrow}}{=} \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1}$$

mit $q(x) = x^2 - 1$ multiplizieren

$$2x + 3 = (A+B)x + A - B$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ A - B &= 3 \end{aligned}$$

Gleichungssystem für $A$ und $B$: Durch Addieren lösen:

$$2A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$B = A - 3 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{\frac{5}{2}}{x-1} - \frac{\frac{5}{2}}{x+1}$$

**2. Methode**: Einsetzmethode

Setze für $x$ so viele (rechnerisch bequeme) Werte ein, wie unbekannte Koeffizienten $A, B, \dots$ zu bestimmen sind.

Dies gibt ein Gleichungssystem, das nach $A, B, \dots$ aufgelöst wird.

**Beispiel**:

$$\frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\left.\begin{aligned} x = 0: &\quad \frac{3}{-1} = \frac{A}{-1} + \frac{B}{1} \quad \Rightarrow A - B = 3 \\ x = -2: &\quad \frac{-1}{3} = \frac{A}{-3} + \frac{B}{-1} \Rightarrow A + 3B = 1 \end{aligned}\right\} \text{abziehen}$$

$$\Rightarrow -4B = 2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = B + 3 = \frac{5}{2}$$

**3. Methode**: Zuhaltemethode (Funktioniert nicht bei Polynomen mit komplexen Nullstellen!)

Liefert nur Koeffizienten, die bei Linearfaktoren maximaler Ordnung stehen.

Sei $x_i$ reelle Nullstelle der Vielfachheit $k$.

Im Ansatz mit $(x - x_i)^k$ durchmultiplizieren.

Dann: $x = x_i$ einsetzen, d.h.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_i)^k \cdot \tilde{q}(x)} = \frac{A_1}{(x-x_i)^1} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_i)^k} + \underbrace{r(x)}_{\substack{\text{Terme, deren} \\ \text{Nenner}\neq 0 \\ \text{für } x=x_i}}$$

$$\begin{aligned} &\to \frac{p(x)}{\tilde{q}(x)} = A_1 \cdot (x-x_i)^{k-1} + \dots + A_k + r(x) \cdot (x-x_i)^k \\ &\to \frac{p(x_i)}{\tilde{q}(x_i)} = A_k \\ &\Rightarrow A_k = \frac{p(x_i)}{\tilde{q}(x_i)} \end{aligned}$$

erhält man, indem man im Ansatz auf der linken Seite

$$\frac{p(x)}{(x-x_i)^k \cdot \tilde{q}(x)}$$

den Term $(x-x_i)^k$ „zuhält“ und $x = x_i$ setzt.

**Beispiel**:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + B(x+1)$$

$$x-1 \text{ zuhalten } A = \left.\frac{2x+3}{x+1}\right|_{x=1} = \frac{5}{2}$$
$$x+1 \text{ zuhalten } B = \left.\frac{2x+3}{x-1}\right|_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

## 8.17. Stammfunktionen der Partialbrüche

Auffinden einer Stammfunktion für gebrochen rationale Funktion gelingt, wenn man die Stammfunktionen der Partialbrüche kennt.

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{1}{x-x_0}\,dx &= \ln|x-x_0| + C \\ \int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx &= \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{n-1}} + C \\ & \qquad\qquad n \neq 1 \end{aligned}}$$

Für $x^2 + px + q$ sei $\Delta := 4q - p^2 > 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \cdot \arctan\frac{2x+p}{\sqrt{\Delta}} + C \\ \int \frac{x}{x^2+px+q}\,dx &= \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+px+q) - \frac{p}{2} \cdot \int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx \\ \int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,dx &= \frac{2x+p}{(n-1)\cdot\Delta\cdot(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2}{\Delta} \cdot \int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\,dx \\ \int \frac{x}{(x^2+px+q)^n}\,dx &= -\frac{px+2q}{(n-1)\cdot\Delta\cdot(x^2+px+q)^{n-1}} - \frac{p(2n-3)}{(n-1)\cdot\Delta} \cdot \int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\,dx \\ & \qquad\qquad n \neq 1 \end{aligned}}$$

**8.18. Beispiel**

Berechne

$$\int_4^9 \frac{x^4-3x}{x^2-4x+3}\,dx$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^4-3x\,) \div (x^2-4x+3) = x^2+4x+13 \\
\underline{-(x^4-4x^3+3x^2)} \\
\qquad 4x^3-3x^2-3x \qquad \text{Rest: } 37x-39 \\
\quad \underline{-(4x^3-16x^2+12x)} \\
\qquad\quad 13x^2-15x \\
\qquad \underline{-(13x^2-52x+39)} \\
\qquad\qquad 37x-39
\end{array}$$

Partialbruchzerlegung von

$$\frac{37x-39}{x^2-4x+3}$$

Bestimme Nullstellen von $x^2-4x+3$:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=2\pm 1 \Rightarrow x_1=1; x_2=3$$

Zwei reelle Nullstellen vom Nennerpolynom der Vielfachheit 1.

⇒ **Ansatz**:

$$\frac{37x-39}{x^2-4x+3}=\frac{37x-39}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

Mit Zuhaltemethode erhält man

$$A=\left.\frac{37x-39}{x-3}\right|_{x=1}=\frac{-2}{-1}=\ 1$$

$$B=\left.\frac{37x-39}{x-1}\right|_{x=3}=\frac{72}{2}=36$$

und damit

$$\int \frac{x^4-3x}{x^2-4x+3}\,dx=\int (x^2+4x+13)\,dx+\int\frac{1}{x-1}\,dx+36\cdot\int\frac{1}{x-3}\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+2x^2+13x+\ln|x-1|+36\cdot\ln|x-3|+C$$

und

$$\int_4^9 \frac{x14 - 3x}{x^2 - 4x + 3}\,dx = F(9) - F(4)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 729 + 2 \cdot 81 + 13 \cdot 9 + \overbrace{\ln 8}^{=3\cdot\ln 2} + 36 \cdot \ln 6$$

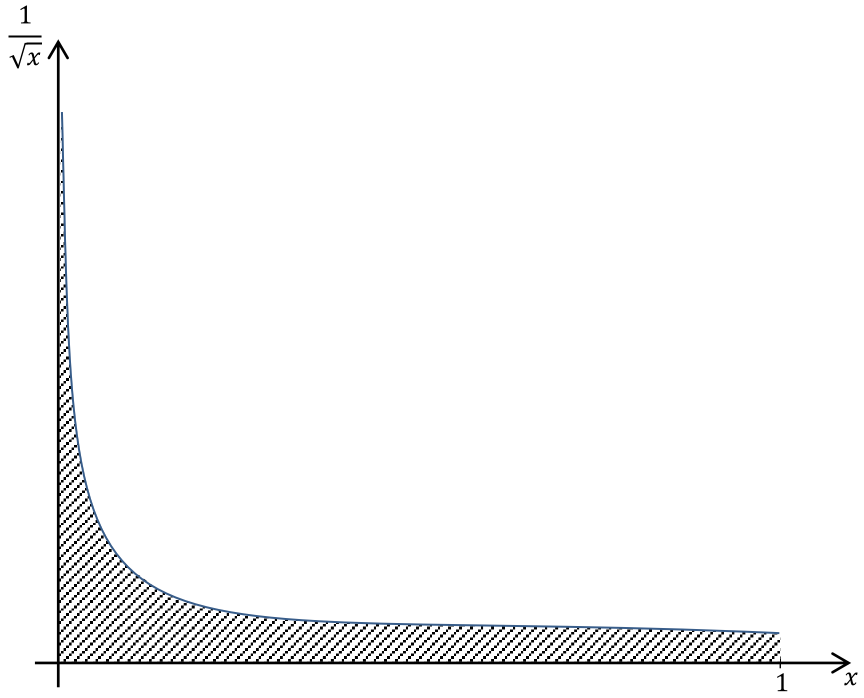
$$-\left(\frac{1}{3} \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 13 \cdot 4 + \ln 3 + \underbrace{36 \cdot \ln 1}_{=0}\right)$$

$$= \frac{1250}{3} + 39 \cdot \ln 2 + 35 \cdot \ln 3$$

**Uneigentliche Integrale**

Betrachte

$$f: ]0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$$



**Aber**: $f(0)$ ist nicht definiert, $f$ auch nicht stetig fortsetzbar.

Das Riemann-Integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

kann nicht existieren, da Obersumme $O_Z(f) = +\infty$ für jede Zerlegung.

Es gibt aber Stammfunktion $F(x) = 2\sqrt{x}$ von $f$ und somit findet man für $h > 0$

$$\int_h^1 f(x)\,dx = F(1) - F(h) = 2\big(1 - \sqrt{h}\big)$$

Für $h \to 0$ gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_h^1 f(x)\,dx = 2\left(1 - \lim_{h \downarrow 0} \sqrt{h}\right) = 2$$

Wir definieren daher

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

und nennen dieses Integral ein **uneigentliches Integral**.

**8.19. Definition**

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b > a$ oder $b = +\infty$ sowie $f\colon [a, b[ \to \mathbb{R}$ derart, dass $f$ auf $[a, R]$ für jedes $R \in [a, b[$ integrierbar ist. Falls

$$\lim_{R \uparrow b} \int_a^R f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

gilt, so heißt das **uneigentliche Integral**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

**konvergent** und andernfalls **divergent**.

2. Analog für $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ oder $a = -\infty$ und $f: ]a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{R \downarrow a} \int_R^b f(x)\, dx$$

(falls konvergent)

3. Sind schließlich beide Grenzen kritisch, so dass $a < b$, auch $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ erlaubt und $f: ]a, b[ \to \mathbb{R}$ so ist

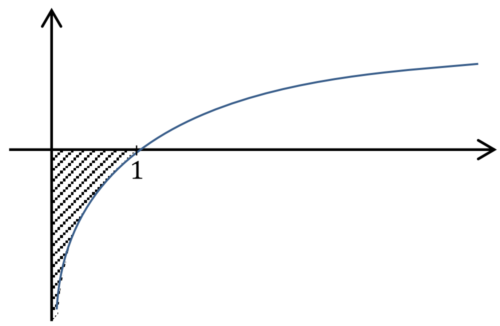
$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\substack{c \downarrow a \\ d \uparrow b}} \int_c^d f(x)\, dx := \lim_{c \downarrow a} \int_c^{x_0} f(x)\, dx + \lim_{d \uparrow b} \int_{x_0}^d f(x)\, dx$$

(falls beide Limiten existieren), wobei $x_0 \in ]a, b[$ beliebig wählbar ist.

## 8.20. Beispiele

(i) Berechne

$$\int_0^1 \ln x\, dx$$




Stammfunktion von $\ln x$ bestimmen.
Partielle Integration:

$$\int \ln x\, dx = \int 1 \cdot \ln x\, dx$$

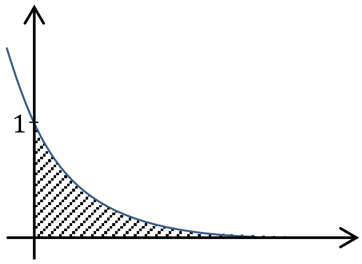
$$x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{R \downarrow 0} \int_R^1 \ln x\, dx$$

$$= \lim_{R \downarrow 0} (x \cdot \ln x - x)\Big|_R^1$$
$$= \underbrace{1 \cdot \ln 1 - 1}_{=-1} - \lim_{R \downarrow 0} (R \cdot \ln R - R)$$
$$= -1 - \lim_{R \downarrow 0} \frac{\ln R}{\frac{1}{R}} \overset{\text{l'H}}{=} -1 - \lim_{R \downarrow 0} \frac{\frac{1}{R}}{-\frac{1}{R^2}}$$
$$= -1 + \lim_{R \downarrow 0} R = -1$$

(ii)

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$




$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{R\to\infty} [-e^{-x}]_0^R = \underbrace{\lim_{R\to\infty} (-e^{-R})}_{=0} + \underbrace{e^{-0}}_{=1} = 1$$

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k+x^2}\,dx\,, \quad k>0$$

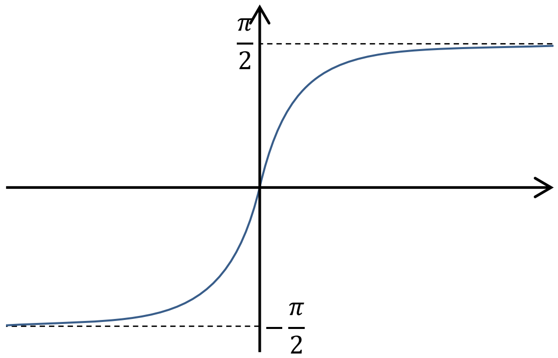
Bestimme Stammfunktion

$$\int \frac{1}{k+x^2}\,dx = \frac{1}{k}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{k}\cdot\sqrt{k}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\,dx$$

$$\overset{y=\frac{x}{\sqrt{k}}}{=} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\int\frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\arctan y + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\arctan\frac{x}{\sqrt{k}} + C$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k+x^2}\,dx = \lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1}{k+x^2}\,dx + \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1}{k+x^2}\,dx$$




$$= \lim_{d\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\arctan\frac{d}{\sqrt{k}}\right) + \lim_{c\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\arctan\frac{c}{\sqrt{k}}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

(iv) Für welche $\alpha > 0$ ist

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

konvergent?

$\alpha \neq 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\downarrow 0}\int_R^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\downarrow 0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_R^1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} - \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{R\downarrow 0} R^{1-\alpha}}_{=\begin{cases}0 & 1-\alpha>0\Leftrightarrow\alpha<1\\ \infty & 1-\alpha<0\Leftrightarrow\alpha>1\end{cases}}$$

Fall $\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\downarrow 0}\int_R^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \ln 1 - \underbrace{\lim_{R\downarrow 0}\ln R}_{=-\infty} = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ konvergent } \Leftrightarrow \alpha < 1}$$

dann gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$$

(v) Für welche $\alpha > 0$ ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

konvergent?

$\alpha \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^R$$

$$= \underbrace{\lim_{R\to\infty}\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha}}_{\begin{matrix}\infty & 1-\alpha>0\Leftrightarrow\alpha<1\\ 0 & 1-\alpha<0\Leftrightarrow\alpha>1\end{matrix}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$\alpha = 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\ln x|_1^R = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\ln R}_{=+\infty} - \ln 1 = +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \text{ konvergent } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

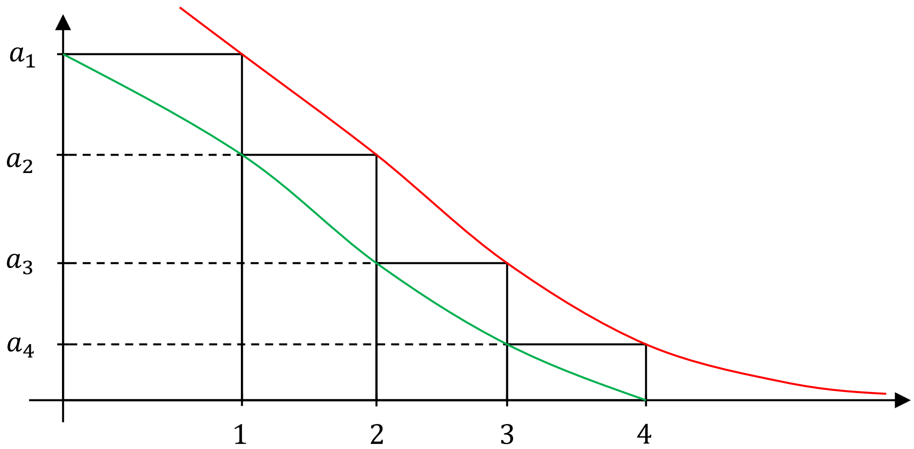
dann gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

**Anwendung**: Integralvergleichskriterium für Reihen

Idee:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n$$




Interpretiere Glieder $a_n$ einer Reihe als Fläche von Rechtecken und suche Funktionen, die die so gewonnene Treppenfunktion majorisieren bzw. minorisieren und betrachte die Integrale dieser Funktionen.

**8.21. Satz**

Sei $f\colon [1,\infty[ \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

genau dann konvergent, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

konvergiert.

**Beweis**:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \underbrace{\sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)dx}_{=\int_1^N f(x)dx} \leq \sum_{n=2}^{N} f(n-1) = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

für $N \to \infty \Rightarrow$ Behauptung, da $f$ monoton.

## 8.22. Beispiel

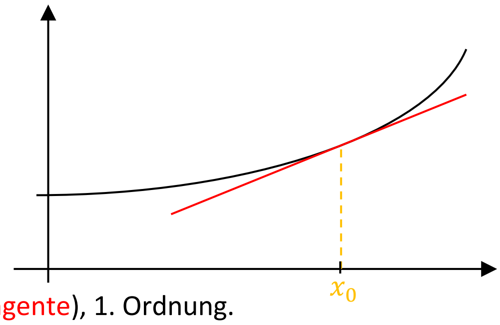
Sei $\alpha > 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergent } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

denn: setze $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

Nach 8.20(v)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \Leftrightarrow \alpha > 1$$




**Exkurs**: Approximation durch Polynome

Für $f$ differenzierbar

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Approximation durch Geradengleichung (Tangente), 1. Ordnung.

Approximation in höherer Ordnung durch Polynom.

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

Plausible Werte für $a_0, a_1, \dots, a_n$: Falls Gleichheit gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n
\end{aligned}$$

Für $x = x_0$ folgt:

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot f''(x_0), a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot f'''(x_0), \dots, a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

### 8.23. Definition

Falls $f$ $n$-mal differenzierbar ist, so heißt

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

das **$n$-te Taylorpolynom** von $f$ an der Entwicklungsstelle $x_0$.

Es gilt nun

### 8.24. Taylorsche Formel

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

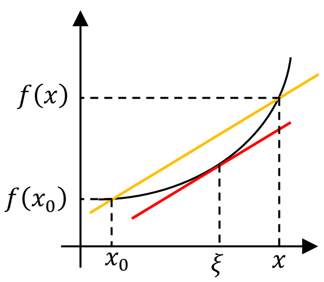
$$f(x) = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right) + R_{n+1}(x)$$

mit Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

für geeignet gewählte $\xi$ zwischen $x_0$ und $x$.

Speziell: $n = 0$




$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0)$$

**Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Lässt man formal $n \to \infty$, so erhält man die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

**8.25. Definition**

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in I$.
Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

die **Taylorreihe** von $f$ mit Entwicklungsstelle $x_0$.

**8.26. Bemerkung**

Die Taylorreihe von $f$ muss für $x \neq x_0$ nicht konvergieren. Und wenn sie konvergiert, muss der Limes nicht $f(x)$ sein.

Ist aber

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

so ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

**8.27. Beispiele**

(i)

$$f(x) = e^x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall_k \in \mathbb{N}$$

Für $x_0 = 0$ folgt:

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

$\Rightarrow$ Taylorreihe ist Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

(ii) **Trigonometrische Funktionen**

$$f(x) = \sin x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x\,, f''(x) = -\sin x\,, f'''(x) = -\cos x\,, f^{(4)}(x) = \sin x$$
$$\Rightarrow f^{(5)} = \cos x\,, \ldots$$

Also für $x_0 = 0$ Taylorreihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Restglied:

$$R_{n+1}(x) = \frac{[\sin]^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Also:

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + - \cdots}_{x\in\mathbb{R}}$$

Ebenso sieht man:

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + - \cdots}_{x\in\mathbb{R}}$$

(iii) Man kann zeigen, dass die Reihen für $e^x$, $\sin x$ und $\cos x$ nicht nur für $x \in \mathbb{R}$, sondern sogar für alle $x \in \mathbb{C}$ konvergieren.

$$\Rightarrow e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\overset{i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= \cos x + i \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x} \quad \text{Eulersche Formel}$$

Taylorreihen sind von der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

**8.28. Definition**

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt **Potenzreihe**.

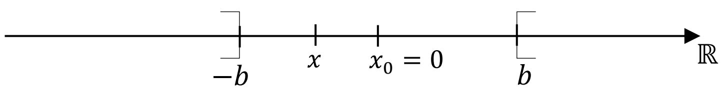
**8.29. Beobachtung**

Sei ohne Einschränkung $x_0 = 0$ und die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

für $x = b$ konvergent.
Dann folgt für $x$ mit $|x| < |b|$

$$|a_k x^k| = \underbrace{|a_k b^k|}_{\substack{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \\ \Rightarrow \text{beschränkt}}} \cdot \left|\frac{x}{b}\right|^k \leq C \cdot |q|^k \;\text{ mit }\; |q| = \left|\frac{x}{b}\right| < 1$$




$$\xRightarrow{\text{Majorantenkrit. 5.3(iii)}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;\text{ konvergent}$$

Es gibt daher einen kritischen Abstand $R$ von der Entwicklungsstelle $x_0$, sodass
für $|x - x_0| < R$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergent.
für $|x - x_0| > R$ gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ divergent.

Hierbei ist auch

$$R = 0 \text{ (nur für } x = x_0 \text{ konvergent)}$$
$$R = \infty \text{ (für alle } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent)}$$

möglich.

**8.30. Definition**

Die oben gefundene Zahl $R \in [0, \infty]$ heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

Die Potenzreihe konvergiert daher in einem Intervall mit Mittelpunkt $x_0$, dem **Konvergenz-intervall**.

(Am Rand des Konvergenzintervalls gibt es keine allgemeine Aussage zum Konvergenz-verhalten.
Man weiß aber:

**Abelscher Grenzwertsatz**:
Konvergiert die Potenzreihe am Rand ihres Konvergenzintervalls, so stellt sie dort die stetige Fortsetzung ihrer Werte im Inneren dar.)

Es gilt nun:

**8.31. Satz**

(i) Eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

stellt im Inneren ihres Konvergenzintervalls eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f$ dar.

(ii) Die Ableitungen können dabei durch gliedweises Differenzieren unter dem $\Sigma$-Zeichen gewonnen werden, z.B.

$$f' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}$$

Die Potenzreihen der Ableitungen besitzen denselben Konvergenzradius wie die ur-sprüngliche Reihe.

(iii) Lässt sich eine Funktion $f$ in einer Umgebung eines Punktes $x_0$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k ,$$

so ist die Potenzreihe durch die Taylorreihe $f$ gegeben.

**8.32. Beispiele**

(i)

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

Quotientenregel:

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{k+1}}{\frac{x^k}{k}} \right| = \frac{k}{k+1} \cdot |x| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |x|$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \text{konvergent für } |x| < 1 \\ \text{divergent für } |x| > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Konvergenzradius } R = 1$$

$\Rightarrow f\colon ]-1,1[ \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Da auch für $g(x) = -\ln(1-x)$ gilt $g'(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow f(x) = -\ln(1-x) + C$$

wobei für $x = 0$ folgt:

$$0 = f(0) = -\ln(1-0) + C = C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)} \text{ für } |x| < 1$$

für $x \to -1$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \ln 2}$$

(ii) Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$$

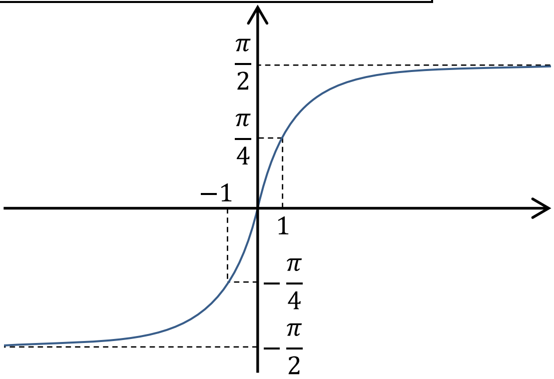
Quotientenkriterium $\rightarrow R = 1$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k \overset{\substack{\text{geom. Reihe} \\ \text{mit } q=-x^2}}{=} \frac{1}{1+x^2}$$

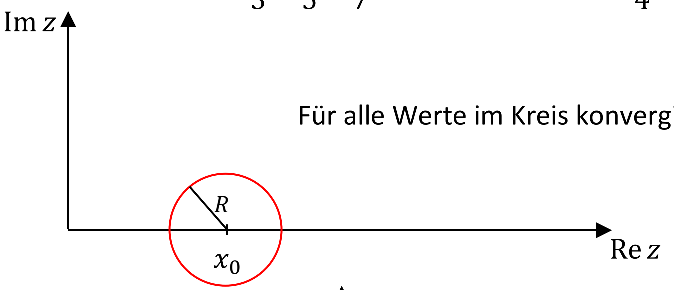
**Somit**: $f(x) = \arctan x + C$ mit $C = f(0) - \arctan 0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots}$$

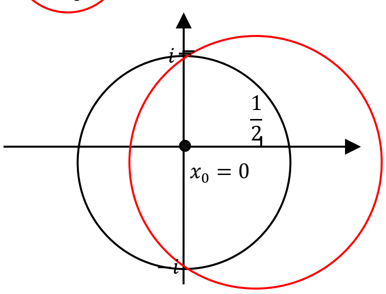



Für $x \to -1$ erhält man die Leibnizsche Formel

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$




Für alle Werte im Kreis konvergiert die Reihe.



$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x-i)(x+i)}$$

$$\lim_{z \to z_0} \left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) = f'(z_0)$$

# 9. Metrische Räume

## 9.1. Definition

Sei $X$ eine Menge. Eine **Metrik** $d$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} d: X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(ii) $d(x,y) = d(y,x)\ x, y \in X$
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\ x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)

$X$, genauer $(X,d)$ heißt dann **metrischer Raum**.

## 9.2. Beispiele

(i) $X = \mathbb{R}$ und $d(x,y) = |x-y|$ ist metrischer Raum.
(ii) $X$ Menge ist **diskrete Metrik**

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \quad x, y \in X$$

9.1(i), (ii) sind klar.

Dreiecksungleichung 9.1(iii): $x, y, z \in X$

1. Fall: $x = y$

$$d(x,y) = 0 \leq \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0} + \underbrace{d(z,y)}_{\geq 0}$$

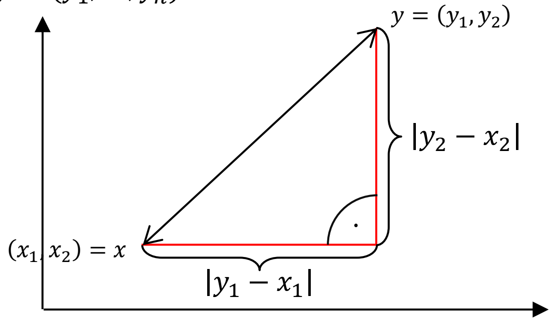
2. Fall: $x \neq y$

$$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y)$$

mindestens ein Term $= 1$,
da $x \neq y \Rightarrow z \neq x$
oder $z \neq y$

(iii) $X = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ mit **euklidischer Metrik**

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$




$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

9.1(i)(ii) klar, zu zeigen: Dreiecksungleichung
Hierzu:

### 9.3. Lemma

Für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

**Anmerkung**: Kann man auch schreiben als

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

**Beweis**: Quadrieren und rechte Seite minus linke Seite bilden.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_i \cdot x_j y_j &= \sum_{i\neq j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i\neq j} x_i y_i \cdot x_j y_j \\ &= \sum_{i<j} x_i^2 y_j^2 + \sum_{i>j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i<j} x_i y_i \cdot x_j y_j - \sum_{i>j} x_i y_i \cdot x_j y_j \\ &= \sum_{i<j} x_i^2 y_j^2 + \sum_{i<j} x_j^2 y_i^2 - 2\sum_{i<j} x_i y_i \cdot x_j y_j \\ &= \sum_{i<j} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 \geq 0 \ \blacksquare\end{aligned}$$

Zu 9.2(iii) Dreiecksgleichung für euklidische Metrik

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &:= x - z \\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) &:= z - y\end{aligned} \Rightarrow \alpha + \beta = x - y$$

z.z.

$$\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^2}}_{=d(x,y)} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}}_{=d(x,z)} + \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}}_{=d(z,y)}$$

Aber

$$\begin{aligned}\sum (\alpha_i + \beta_i)^2 &= \sum \alpha_i^2 + 2\sum \alpha_i \beta_i + \sum \beta_i^2 \\ &\overset{9.1}{\leq} \sum \alpha_i^2 + 2\sqrt{\sum \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum \beta_i^2} + \sum \beta_i^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum \alpha_i^2} + \sqrt{\sum \beta_i^2}\right)^2 \ \blacksquare\end{aligned}$$

## 9.4. Beispiele

(i) $A \neq \emptyset$ Menge

Menge der beschränkten Funktionen auf $A$

$$B(A) := \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$$

Für $f, g \in B(A)$ setze

$$d(f, g) := \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

$d$ ist Metrik auf $B(A)$. Dreiecksungleichung: $f, g, h \in B(A)$

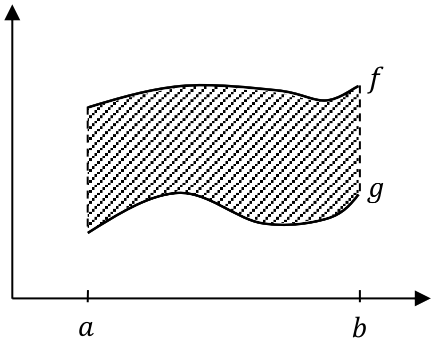
$$(*) \quad |f(x) - g(x)| \underset{\text{in } \mathbb{R}}{\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq}} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

Supremum bilden über alle $x \in A$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| &\leq \sup_{x \in A} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in A} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in A} |h(x) - g(x)| \end{aligned}$$

$d$ heißt **Metrik der gleichmäßigen Konvergenz**.

(ii) Sei $X = C([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f \text{ stetig}\}$




und

$$d(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \quad f, g \in C([a, b])$$

Dreiecksungleichung: Es folgt durch Integration von $(*)$.

## 9.5. Definition

Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

heißt **Norm**, wenn

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}$
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\Delta$-Ungleichung

$V$, genauer $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann **normierter Raum**.

### 9.6. Satz

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.
Dann ist durch

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik auf $V$ definiert.
Diese ist translationsinvariant:

$$d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

**Beweis**:

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = \mathcal{O} \Leftrightarrow x = y$
(ii) $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1| \cdot \|y-x\| = d(y,x)$
(iii) $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$

Translationsinvarianz:

$$d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y) \; \blacksquare$$

### 9.7. Beispiele

Bis auf diskrete Metrik leiten sich alle obigen Beispiele von Normen ab:

Zu 9.2:
(i) $X = \mathbb{R}$: $\|x\| = |x|$
(iii) $X = \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ **euklidische Norm**

Zu 9.4:
(i) $X = B(A)$: $\|f\| := \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$ **Supremumsnorm**
(ii) $X = C([a,b])$: $\|f\| := \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \, dx$

### 9.8. Bemerkung

Bezeichnet man für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Standardskalarprodukt,

so lässt sich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung schreiben als

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$$

**Andere Normen im $\mathbb{R}^n$**

**9.9. Definition**

Sei $p \geq 1$. Dann heißt für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

die ***p*-Norm** von $x$.
Für $p = \infty$ setzt man

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

**9.10. Satz**

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

**9.11. Bemerkung**

Für $p = 2$ erhält man

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \textbf{euklidische Norm}$$

Die Norm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

heißt **Maximums-/Supremumsnorm**.

Wir benötigen:

### 9.12. Lemma

Seien $p, q > 1$ derart, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

**Höldersche Ungleichung** (für $p = q = 2 \to$ Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

**Beweis**: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}$$

$$\Rightarrow f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) \text{ für } \xi \in \,]a, b[$$

(vgl. Taylorsche Formel).

Speziell für

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{p}} - 1, x \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{p}(1+x)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$\underset{b\geq 0}{\overset{a=0}{\Longrightarrow}} (1+b)^{\frac{1}{p}} - 1 = \frac{1}{p}\underbrace{(1+\xi)^{\frac{1}{p}-1}}_{\leq 1} \cdot b \leq \frac{b}{p}$$

also für $r := 1 + b > 1$:

$$r^{\frac{1}{p}} \leq \frac{r-1}{p} + 1 = \frac{r}{p} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{r}{p} + \frac{1}{q}$$

Somit für $\alpha \geq \beta > 0$:

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \geq 1 \Rightarrow \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{\beta^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{\alpha}{\beta p} + \frac{1}{q} \quad |\cdot \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$$

Vertauschen von $\alpha$ und $\beta$, wie auch $p$ und $q$:

$$\alpha^{\frac{1}{p}} \cdot \beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} \text{ für alle } \alpha, \beta \geq 0$$

Seien nun ohne Einschränkung $x, y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} = \frac{|\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i|}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} &\leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{|x_i|}{\|x\|_p}}_{=:\alpha^{\frac{1}{p}}} \cdot \underbrace{\frac{|y_i|}{\|y\|_q}}_{=:\beta^{\frac{1}{q}}} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|^p}{\|y\|_q^q}\right) \\
&= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|x\|_p^p} \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\|y\|_q^q} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^q \\
&= \frac{1}{p} \cdot \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Beweis** von 9.10: Nur Δ-Ungleichung kritisch.

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p = \sum_{i=0}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} \cdot (|x_i| + |y_i|) \\
&= \sum_{i=0}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=0}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\overset{9.12}{\leq} \sqrt[p]{\sum_{i=0}^n |x_i|^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{i=0}^n |x_i + y_i|^{(p-1)\cdot q}} + \sqrt[p]{\sum_{i=0}^n |y_i|^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{i=0}^n |x_i + y_i|^{(p-1)\cdot q}} \\
&= \left(\|x\|_p + \|y\|_q\right) \cdot \|x + y\|_p^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

wegen $(p-1) \cdot q = pq - q = pq\left(1 - \frac{1}{p}\right) = pq\frac{1}{q} = p$

Also

$$\|x + y\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Aber

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{p} = 1 \quad \blacksquare$$

### 9.13. Definition

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann heißt

(i) $B_r(x) := \{y \in X | d(x, y) < r\}$ **offene Kugel** um $x$ mit Radius $r$.
$S_r(x) := \{y \in X | d(x, y) = r\}$ **Sphäre** um $x$ mit Radius $r$.

(ii) Eine Menge $V \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, mit

$$B_\varepsilon(x) \subset V$$


Umgebung keine Umgebung

(iii) Eine Menge $U \subset X$ heißt **offen**, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, mit

$$B_\varepsilon(x) \subset U$$

(iv) Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn

$$A^{\complement} := X \setminus A$$

offen ist.
Ebenso:
a) $\emptyset$ und $X$ sind abgeschlossen

$$\bigcap_{i \in I} U_i^{\complement} = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)^{\complement} \quad \bigcup_{i \in I} U_i^{\complement} = \left(\bigcap_{i \in I} U_i\right)^{\complement}$$

(DeMorgan-Regeln)
b) Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
c) Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

### 9.14. Definition

Sei $(X, d)$ metrischer Raum.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in X$ heißt **konvergent** gegen $x \in X$, in Zeichen

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\ \lim_{x\to\infty} x_n = x$$

wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

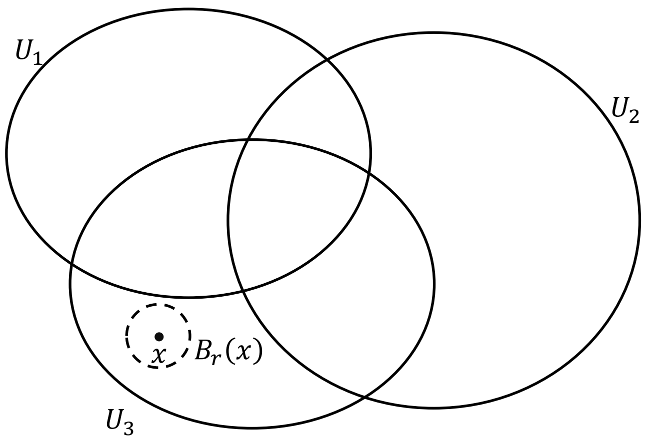
$$d(x_n, x) < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0$$

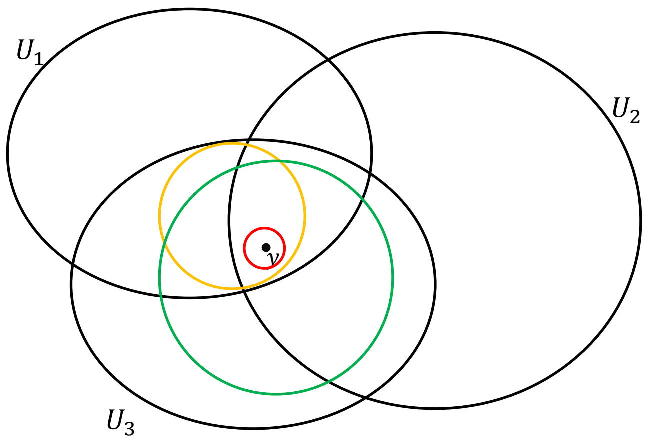
(d.h. $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

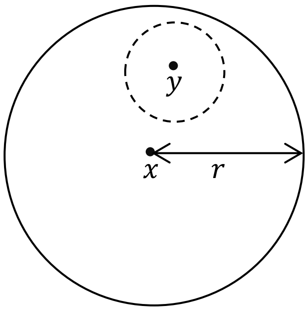
### 9.15. Bemerkungen

(i) In $(X, d)$ gilt stets

a) $\emptyset$ und $X$ sind offene Mengen
b) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.
c) Beliebige Durchschnitte offener Mengen sind offen.






(ii) Eine „offene" Kugel $B_r(x)$ ist offen.
Denn für $y \in B_r(x)$ und $\varepsilon := r - d(x,y) > 0$ gilt

$B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$

denn:

$$z \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + \underbrace{d(y,z)}_{<\varepsilon} < d(x,y) - \big(r - d(x,y)\big) = r$$

$$\Rightarrow z \in B_r(x)$$

(iii) In $\mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x-y|$ gilt

$$B_\varepsilon(x) = ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \quad \varepsilon\text{-Umgebung}$$

Es folgt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$]a,b[ \text{ offen}$$

aber auch

$$]a,\infty[ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ]a,n[\,, ]-\infty,b[, ]-\infty,\infty[ = \mathbb{R} \text{ offen ((i)(i)b))}$$

Andererseits

$$[a,b] = \mathbb{R} \setminus \underbrace{(]-\infty,a[ \cup ]b,\infty[)}_{\text{offen}}$$

abgeschlossen (da Komplement von offener Menge).
Aber auch

$$[a,\infty[ = \mathbb{R} \setminus \underbrace{]-\infty,a[}_{\text{offen}}$$
$$]-\infty,b] = \mathbb{R} \setminus ]b,\infty[$$

abgeschlossen (da Komplement von offener Menge).

**9.16. Bemerkung** (Wiederholung zur Konvergenz: $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \Leftrightarrow d(x_n,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

Für $X = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x-y|$ ist die Konvergenz in $(\mathbb{R}, d)$ die Konvergenz reeller Folgen.

### 9.17. Satz

Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit euklidischer Norm $\|\cdot\|$.

Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_k = \left(x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n\right) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann gegen $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$x_k^i \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

**Beweis**:
„⇒“

$$\left|x_k^i - x^i\right| = \sqrt{\left(x_k^i - x^i\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_k^j - x^j\right)^2} = \|x_k - x\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

„⇐“

$$\|x_k - x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left|x_k^i - x^i\right|^2}_{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

### 9.18. Satz

$(X, d)$ metrischer Raum.

$A \subset X$ abgeschlossen ⇔ für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $A$ mit $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$ gilt: $x \in A$.

**Beweis**:

„⇒“ Annahme: $x \notin A \Rightarrow x \in X \setminus A$ offen.

⇒ es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset X \setminus A$, d.h. $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$

Da aber $d(x_k, x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$: Es gibt $x_k \in B_\varepsilon(x)$.
Widerspruch zu $x_k \in A$.

„⇐“ Annahme: $A$ nicht abgeschlossen ⇔ $X \setminus A = A^\complement$ nicht offen.

⇒ es gibt $x \in A^\complement$ mit $B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subset A^\complement$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Updownarrow$$

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Wähle daher für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$.

Dann gilt

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \underset{\text{Vorraus.}}{\overset{x_n \in A}{\Longrightarrow}} x \in A$$

Widerspruch zu $x \in A^C$ ■

## 9.19. Definition

Sei $X \subset B(A)$ eine Menge von beschränkten Funktionen $f: A \to \mathbb{R}$ versehen mit der Metrik

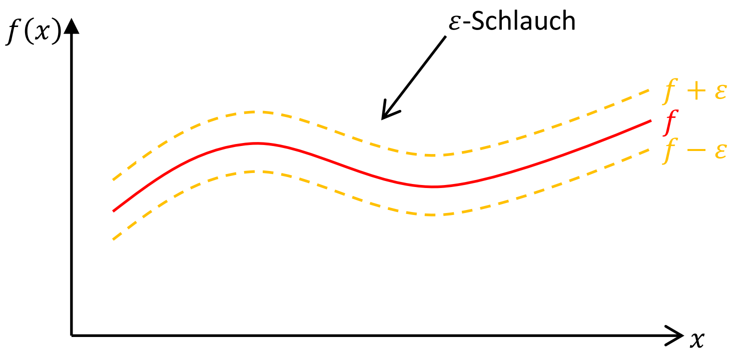
$$d(f, g) \coloneqq \|f - g\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|$$

Dann heißt die Konvergenz einer Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich dieser Metrik **gleichmäßige Konvergenz**.

Im Gegensatz dazu; $f_n \longrightarrow f$ punktweise, wenn für alle $x \in A$ gilt

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

wenn $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig.




$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

bedeutet: Graph von $f_n$ ist im $\varepsilon$-Schlauch.

## 9.20. Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f_n, f: I \to \mathbb{R}$, $f_n$ stetig und $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig.

Dann ist auch $f$ stetig.

**Beweis**: Sei $x_0 \in I$, $\varepsilon > 0$
Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit

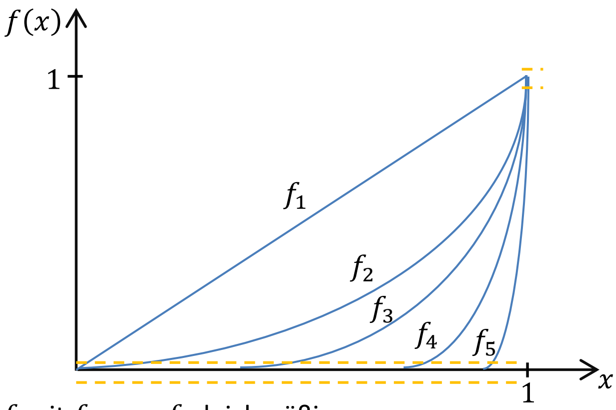
$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } |x - x_0| < \delta \ (f_{n_0} \text{ stetig})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| &\leq \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta \ \blacksquare\end{aligned}$$

### 9.21. Beispiel

Sei $I = [0; 1]$, $f_n(x) = x^n$

Behauptung: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergent.




Denn: Gäbe es $f$ mit $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0; 1]$

$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ nicht stetig (gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz)

daher $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig nicht möglich.

### 9.22. Bemerkung

Sei $A \subset X$ eine Menge.
Es gibt eine

- größte offene Menge, die in $A$ enthalten ist.
  (nämlich $\bigcup\limits_{\substack{G\subset A \\ G \text{ offen}}} G$ )
  Sie heißt das **Innere** $\mathring{A}$ von $A$ (Menge aller inneren Punkte von $A$).

- kleinste abgeschlossene Obermenge von $A$
  (nämlich $\bigcap\limits_{\substack{F \supset A \\ F \text{ abgeschl.}}} F$ )

  Sie heißt der **Abschluss** $\bar{A}$ von $A$ (Menge aller Grenzwerte von Folgen in $A$).

- Die Menge $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ heißt der **Rand** von $A$.

Es gilt dann

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \text{es gibt Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in A \text{ und } x_n \longrightarrow x$$
$$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow x \text{ ist innerer Punkt von } A$$

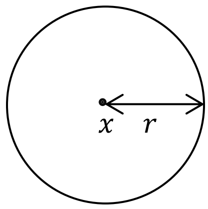
d.h. zu $x$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A$.

### 9.23. Beispiel

Wir wissen:
Kugel $B_r(x)$ ist offen.
Kugel $B'_r(x)$ ist abgeschlossen.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kleinste} \\ \text{abgeschlossene} \\ \text{Obermenge}}}{\overline{B_r(x)}} \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eine} \\ \text{abgeschlossene} \\ \text{Obermenge}}}{B'_r(x)}$$

In $\mathbb{R}^n$ gilt: $\overline{B_r(x)} = B'_r(x)$




Jeder Punkt auf dem Rand kann ein Grenzwert sein

für beliebige metrische Räume ist dies falsch.
z.B. diskrete Metrik:

$$B_\varepsilon(x) = \{x\} \text{ für } \varepsilon > 0$$
$\Rightarrow$ jede Teilmenge ist offen
$\Rightarrow$ jede Teilmenge ist abgeschlossen (da Komplement)

$\Rightarrow B_1(x)$ ist auch abgeschlossen
$\Rightarrow \overline{B_1(x)} = B_1(x) = \{x\} \neq X = B'_1(x)$

# 10. Stetige Abbildungen

## 10.1. Definition

Seien $(X, d)$ und $(X', d')$ metrische Räume. Eine Abbildung

$$f: X \to X'$$

heißt **stetig**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$.

$f$ heißt **stetig**, wenn $f$ stetig in allen Punkten $x_0 \in X$ ist.

## 10.2. Bemerkung

Sei $X = X' = \mathbb{R}$ mit üblicher Metrik ⇒ alte Definition der Stetigkeit.

## 10.3. Satz

Seien $(X, d)$ und $(X', d')$ metrische Räume.

$$f: X \to X'$$

ist genau dann stetig in $x_0$, wenn $f$ **folgenstetig** in $x_0$ ist.
D.h. wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X$ mit $x_n \longrightarrow x_0$ gilt:

$$f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

**Beweis**:

„⇒" $x_n \longrightarrow x_0$, d.h. es gilt $d(x_n, x_0) < \delta$ für $n$ hinreichend groß.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ wie in 10.1.
Zu diesem $\delta$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_0) < \delta$ für $n \geq n_0$.

$$\Rightarrow d'(f(x_n), f(x_0) < \varepsilon$$

für $n \geq n_0$.
D.h. $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$
Umkehrung: Siehe Übung.

### 10.4. Bemerkung

Man definiert daher wieder Grenzwert für Funktionen

$$f\colon (X,d) \to (X',d')$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) := y :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$$

für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow x_0$.

### 10.5. Korollar

Sei

$$f\colon (X,d) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$$

eine $\mathbb{R}^n$-wertige Abbildung, d.h. $f = (f_1, \dots, f_n)$ mit Komponenten $f_i\colon X \to \mathbb{R}$.

Dann ist $f$ genau dann stetig (in $x_0$), wenn jede Komponente $f_i$ mit $i = 1 \dots n$ stetig (in $x_0$) ist.

**Beweis**:
$f$ stetig $\Leftrightarrow$ $f$ folgenstetig $\Leftrightarrow$ $f_i$ folgenstetig $\Leftrightarrow$ $f_i$ stetig ■

### 10.6. Korollar

Kompositionen stetiger Abbildungen sind stetig. Seien

$$f\colon (X,d) \to (X',d')$$

und

$$g\colon (X',d') \to (X'',d'')$$

stetig.

$$\Rightarrow g \circ f := (X,d) \to (X'',d'') \text{ stetig}$$

**Beweis**: Klar für Folgenstetigkeit ■

### 10.7. Beispiele

(i) $\text{add}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig
$(x,y) \mapsto x + y$

denn $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{cases} \Rightarrow \underbrace{x_n + y_n}_{=\text{add}(x_n,y_n)} \longrightarrow \underbrace{x+y}_{=\text{add}(x,y)}$

ebenso

$$\text{sub}: (x,y) \mapsto x-y$$

und

$$\text{mult}: (x,y) \mapsto x \cdot y$$

stetig. Und auch

$$\begin{aligned} \text{div}: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) &\to \mathbb{R} \ \text{ stetig} \\ (x,y) &\mapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

(ii) Folgende Projektionen sind stetig:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\right) \text{ mit } i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

(iii) Somit erkennt man viele mehrdimensionale Abbildungen als stetig, z.B.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto \left(\frac{\sin \arctan y}{1+x^2+z^2}, e^{x \cdot y \cdot z}\right) \end{aligned}$$

ist stetig, denn
z.z.: Jede Komponente ist stetig.

**Zu erster Komponente**:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \xmapsto{\text{stetig}} & y & \xmapsto{\text{stetig}} & \sin \arctan y \ \text{ stetig} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \xmapsto{\text{stetig}} & (x,z) & \xmapsto{\text{stetig}} & (x^2, z^2) & \xmapsto[\text{add}]{\text{stetig}} & x^2+z^2 & \xmapsto[\text{add}]{\text{stetig}} & 1+x^2+z^2 \ \text{ stetig} \end{array}$$

$$\text{denn } (x,z) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} x \mapsto x^2 \\ \\ z \mapsto z^2 \end{array} \quad \text{stetig}$$

also auch

$$\frac{\sin \arctan y}{1+x^2+z^2}$$

stetig als Quotient zweier stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$.

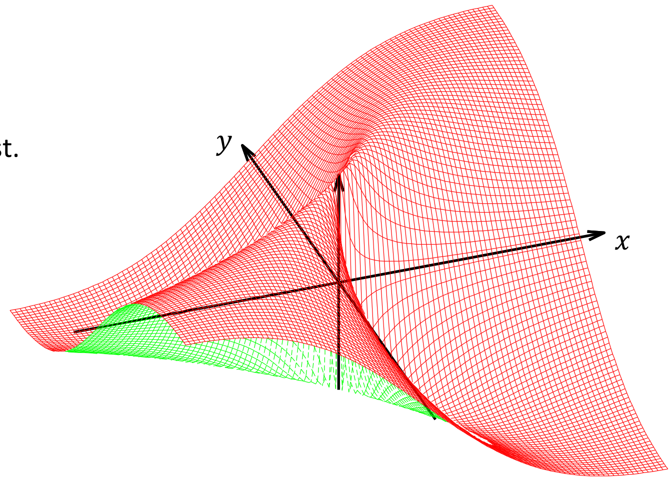
**Zu zweiter Komponente**:

$$(x,y,z) \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} (x,y) \xmapsto{\text{mult}} \\ z \xmapsto{\text{id}} \end{array} \begin{pmatrix} x \cdot y \\ \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{\text{mult}} x \cdot y \cdot z \xmapsto{\exp} e^{x \cdot y \cdot z} \ \text{stetig}$$

(iv) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

ist stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0{,}0)\}$, da Summe, Produkt, Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $\neq 0$.




Stetigkeit in $(0{,}0)$:
Halte jeweils eine Koordinate fest.

z.B. $y = 0, x \neq 0$

$$f(x,0) = \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

ebenso $x = 0, y \neq 0$

$$f(0,y) = \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0 \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ stetig als Funktion von $x$ oder als Funktion von $y$ (separat stetig).

Dies impliziert aber **nicht**, dass $f$ stetig ist.

Vielmehr gilt in diesem Beispiel: $f$ ist nicht stetig.

Denn wähle z.B. Folge $(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0{,}0)\}$

$\Rightarrow (x_n, y_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} (0{,}0)$, aber

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0{,}0)$$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in $(0{,}0)$ und kann durch Abändern von $f(0{,}0)$ nicht stetig gemacht werden.

(v) Sei $C([a;b])$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ und

$$I: C([a;b]) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

Dann ist $I$ stetig. Denn sei

$f_0 \in C([a;b])$ und $\varepsilon > 0$

mit $\delta := \frac{\varepsilon}{b-a}$ ist für $\|f - f_0\|_\infty < \delta$

$$\begin{aligned}
|I(f) - I(f_0)| &= \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_0(x)\,dx \right| \\
&= \left| \int_a^b \big(f(x) - f_0(x)\big)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x) - f_0(x)|\,dx \\
&\le \int_a^b \|f - f_0\|_\infty\,dx = (b-a)\cdot\|f - f_0\|_\infty < (b-a)\cdot\delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

Die (Folgen-)Stetigkeit dieser Abbildung $I$ besagt gerade

### 10.8. Satz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C([a;b])$, die gleichmäßig konvergiert. Dann:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,dx$$

**Eigenschaften stetiger Funktionen**

### 10.9. Satz

$(X,d), (X',d')$ metrische Räume, $f: X \to X'$.
Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist stetig
(ii) Urbilder offener Mengen sind offen
(iii) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen

**Beweis**:

(i)⇒(ii):
Sei $U' \subset X'$ offen und $x_0 \in f^{-1}(U')$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \text{Es gibt } \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset U' \\ f \text{ stetig} \Rightarrow \text{Es gibt } \delta > 0 \text{ mit } d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon \text{ für } d(x,x_0) < \delta \end{array}\right\} (*)$$

$$\begin{aligned}
(*) &\Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \subset U' \text{ für } d(x,x_0) < \delta \\
&\Rightarrow B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U') \Rightarrow f^{-1}(U') \text{ offen}
\end{aligned}$$

(ii)⇒(i):
Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0 \Rightarrow U' := B_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$ offen im Bildraum $X'$.

$\Rightarrow U := f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x_0)\big)\Big)$ offen in $X$ und $x_0 \in U$

also gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \subset U$

Mit dieser Wahl von $\delta$ gilt für $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$:

$$x \in B_\delta(x_0) \subset U = f^{-1}(U') \Rightarrow f(x) \in U' = B_\varepsilon\big(f(x_0)\big) \Rightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

$\Rightarrow f$ stetig in $x_0$

(ii)⇔(iii):
Folgt aus $f^{-1}\big(A^{\mathrm{C}}\big) := \big(f^{-1}(A)\big)^{\mathrm{C}}$ ■

**10.10. Beispiele**

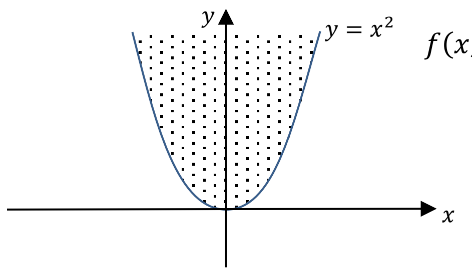
Seien $f, g: X \to \mathbb{R}$ stetig, $c \in \mathbb{R}$

(i) $\{f = c\} := \{x \in X | f(x) = c\}$ abgeschlossen

denn $\{f = c\} = f^{-1}(\{c\})$ mit $\{c\}$ abgeschlossen

ebenso $\{f \geq c\}, \{f \leq c\}$ abgeschlossen
$\{f < c\}, \{f > c\}$ offen

da Urbilder abgeschlossener bzw. offener durch Intervalle.




$f(x, y) = y - x^2 \Rightarrow$ „$\cup$“ $= \{f = 0\}$

(ii) $\{f = g\} := \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen

denn $\{f = g\} = \{f - g = 0\}$

ebenso $\{f \leq g\}, \{f \geq g\}$ abgeschlossen
$\{f < g\}, \{f > g\}$ offen

*Vorsicht*: **Bilder** offener bzw. abgeschlossener Mengen unter stetischen Abbildungen sind im allgemeinen *nicht* offen bzw. abgeschlossen.

zum Beispiel:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ konstant}$$
$$x \mapsto c$$

$$f(\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{offen}}) = \{c\} \text{ nicht offen}$$

**10.11. Definition**

Eine Teilmenge $K$ eines metrischen Raums heißt **kompakt**, wenn **jede** offene Überdeckung von $K$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. zu jeder Wahl einer Familie offener Mengen $U_i$, $i \in I$ mit

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

gibt es endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{i_k}$$

**10.12. Eigenschaften**

Jede kompakte Menge $K$ ist beschränkt und abgeschlossen.
Denn z.B. Beschränktheit:

Sei $x_0 \in X \Rightarrow \big(B_k(x_0)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung von $K$.

$\Rightarrow$ für geeignete $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$

$$K \subset B_{n_1}(x_0) \cup \dots \cup B_{n_k}(x_0) = B_{\max\limits_{i=1\dots k} n_i}(x_0)$$

$\Rightarrow K$ beschränkt

In $\mathbb{R}^n$ gilt hierzu auch die Umkehrung.

## 10.13. Satz von Heine-Borel

Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Zum Beispiel Intervall $I \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow I = [a; b]$, $a, b \in \mathbb{R}$

In allgemeinen metrischen Räumen ist dieser Satz **falsch**.

Wichtig ist (vgl. 4.11)

## 10.14. Satz von Bolzano-Weierstraß

Sei $K \subset X$ kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $K$.

Dann besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (in $K$) konvergente Teilfolge.

**Beweis**:
Annahme: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge, d.h. es gibt keinen Häufungspunkt.

Zu jedem $x \in X$ gibt es Kugel $B_{\varepsilon(x)}(x)$ in der nur endlich viele Folgenglieder liegen.

Da aber $K \subset \bigcup_{x\in X} B_{\varepsilon(x)}(x) \Rightarrow$ es gibt endlich viele dieser Kugeln

$$B_{\varepsilon(x_1)}(x_1), \ldots, B_{\varepsilon(x_k)}(x_k),$$

die $K$ überdecken.

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht nur aus endlich vielen Gliedern.

Widerspruch ■

## 10.15. Bemerkung

Es gilt sogar: $K \subset X$ ist kompakt $\Leftrightarrow$ jede Folge in $K$ besitzt in $K$ konvergente Teilfolge (Folgenkompaktheit).

## 10.16. Beispiel

Im metrischen Raum $C([0; 1])$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ist die Einheitskugel $B_1'(0) = \overline{B_1(0)}$ beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt (d.h. Analogon zu Heine-Borel gilt nicht).

Denn mit $f_n(x) = x^n$ folgt wie in 9.22:
Einzige Möglichkeit von Limes einer Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ unstetig.

⇒ keine gleichmäßige Konvergenz möglich
⇒ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge

Bemerkung:
Man kann zeigen:

In normiertem Raum $V$ gilt Heine-Borel ⇔ $\dim V < \infty$

Zentral ist nun:

**10.17. Satz**

Für eine stetige Abbildung $f$ ist das Bild $f(K)$ einer kompakten Menge $K$ kompakt.

**Beweis**:
Sei $(U_i')_{i\in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$.

⇒ mit $U_i = f^{-1}(U_i')$ ist $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von $K$

⇒ Es gibt endliche Überdeckung $U_{i_1}, \dots, U_{1_k}$ von $K$
⇒ $U_{i_1}', \dots, U_{i_k}'$ endliche Überdeckung von $f(K)$ ∎

**10.18. Korollar**

Sei $f$ reellwertige, stetige Abbildung auf einer kompakten Menge $K$.

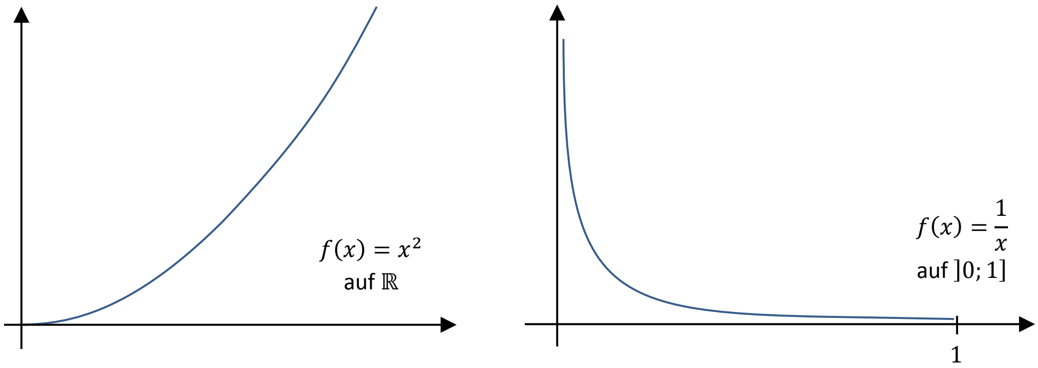
Dann ist $f$ beschränkt und nimmt Maximum und Minimum als Funktionswert an.

**Beweis**:
$K$ kompakt ⇒ $f(K)$ kompakt ⇒ $\begin{cases} f(K) & \text{beschränkt, d.h. } f \text{ beschränkt} \\ f(K) & \text{abgeschlossen} \end{cases}$

Wähle Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(K)$ mit $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_{x\in K} f(x)$:

$$\Rightarrow \sup_{x\in K} f(x) \in \underbrace{f(K)}_{\text{abgeschl.}} \Rightarrow f \text{ nimmt Maximum an.}$$

Für abgeschlossene Menge/Minimum analog.




**10.19. Definition**

Zwei Normen $N_1$ und $N_2$ auf einem Vektorraum $V$ heißen äquivalent, wenn es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt mit

$$c_1 \cdot N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2 \cdot N_1(x) \quad x \in V$$

**10.20. Bemerkung**

$N_1$ und $N_2$ äquivalent bedeutet

$$N_1(x_n - x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow N_2(x_n - x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ Die normierten Räume $(V, N_1)$ und $(V, N_2)$ besitzen

- dieselben konvergenten Folgen
- dieselben abgeschlossenen Mengen
- dieselben offenen Mengen
- dieselben kompakten Mengen
- dieselben stetigen Funktionen

Man sagt, $(V, N_1)$ und $(V, N_2)$ besitzen dieselbe **Topologie**.

**10.21. Beispiel**

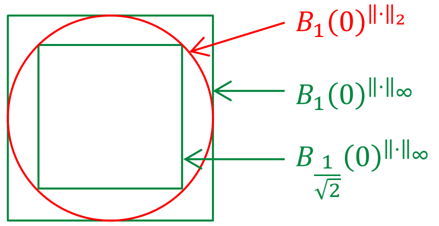
In $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent

$\|\cdot\|_2$ euklidische Norm
$\|\cdot\|_\infty$ Maximumsnorm
$\|\cdot\|_1$ Summennorm

Es gilt:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\cdot\|x\|_2 \leq \overbrace{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}^{=n}\cdot\|x\|_\infty$$

→ „Kugeln" bzgl. $\|\cdot\|_2$ bzw. $\|\cdot\|_\infty$ im $\mathbb{R}^2$ sind ineinander geschachtelt.




Es gilt noch mehr:

**10.22. Satz**

Je zwei Normen im $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

**Beweis**:

Zeige: Jede Norm $N$ ist äquivalent zu euklidischer Norm $\|\cdot\|$

$$c_1\cdot\|x\| \leq N(x) \leq c_2\cdot\|x\| \quad x\in\mathbb{R}^n \quad c_1,c_2>0$$

oder äquivalent

$$c_1 \leq N(x) \leq c_2 \text{ für } x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1$$

Nun gilt:

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i\cdot e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\cdot N(e_i)$$

$$\leq \max_{i=1\dots n} N(e_i)\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|}_{\substack{=\|x\|_1 \\ \leq\sqrt{n}\cdot\|x\|_2}} \leq \underbrace{\sqrt{n}\cdot\max_{i=1\dots n} N(e_i)}_{=:c_2}\cdot\|x\|$$

Mit Δ-Ungleichung nach unten

$$|N(x)-N(x_0)| \leq N(x-x_0) \leq c_2\cdot\|x-x_0\| \underset{\text{bzgl. }\|\cdot\|}{\xrightarrow[x\to x_0]{}} 0$$

also ist $N:(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)\to\mathbb{R}$ stetig.

Nun ist $S_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ abgeschlossen und beschränkt.

$\underset{\text{Borel}}{\overset{\text{Heine}}{\Longrightarrow}} S_1(0)$ kompakt.
$\Rightarrow N$ nimmt Minimum in Punkt $x_0 \in S_1(0)$ an.

$$N(x) \geq N\underbrace{(x_0)}_{\substack{\|x_0\|=1 \\ \Rightarrow x_0 \neq 0}} = c_1 > 0 \quad \|x\| = 1$$

## 11. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Eine Funktion von zwei Variablen

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

heißt in $(x_0, y_0)$ partiell differenzierbar nach $x$, wenn die Funktion

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

differenzierbar ist ($y$ wird als Konstante betrachtet).
Die Ableitung heißt dann partielle Ableitung nach $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Allgemein:
### 11.1. Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$f$ heißt in $x^0 \in U$ **partiell differenzierbar** nach $x_i$, wenn die Ableitung

$$D_i f(x^0) := \lim_{\substack{x_i \to x_i^0 \\ x_i \neq x_i^0}} \frac{f\left(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0\right)}{x_i - x_i^0}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + h \cdot e_i) - f(x^0)}{h}$$

existiert.

$$D_i f(x^0) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_0)$$

partiell differenzierbar : $\Leftrightarrow$ partiell differenzierbar nach allen $x_i$.

Allgemeiner:

$f\colon \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^n$ ist partiell differenzierbar, wenn jede Komponente von $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ partiell differenzierbar ist.

### 11.2. Beispiel

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + \sin(xy) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \cdot \cos(xy) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \cos(xy)$$

### 11.3. Definition

Für eine Funktion $f\colon \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar heißt

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nabla}}}{\nabla} f(x) = \operatorname{grad} f(x) \coloneqq \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

der **Gradient** von $f$.

### 11.4. Bemerkung

Rechenregeln der eindimensionalen Differentialrechnung übertragen sich:

(i) $\frac{\partial}{\partial x_i}(f + g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$ $\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda f) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$

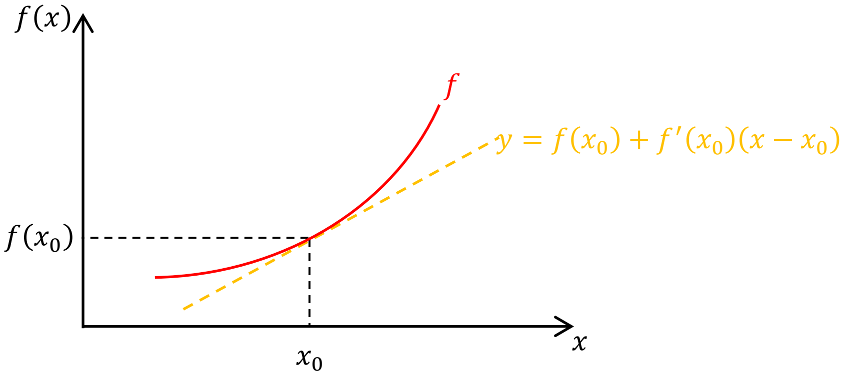
oder

$\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$

Was bedeutet differenzierbar?

$\boxed{\text{„differenzierbar = linear approximierbar“}}$

Eindimensional: Es gibt eine eindeutig bestimmte Tangente am Funktionsgraphen

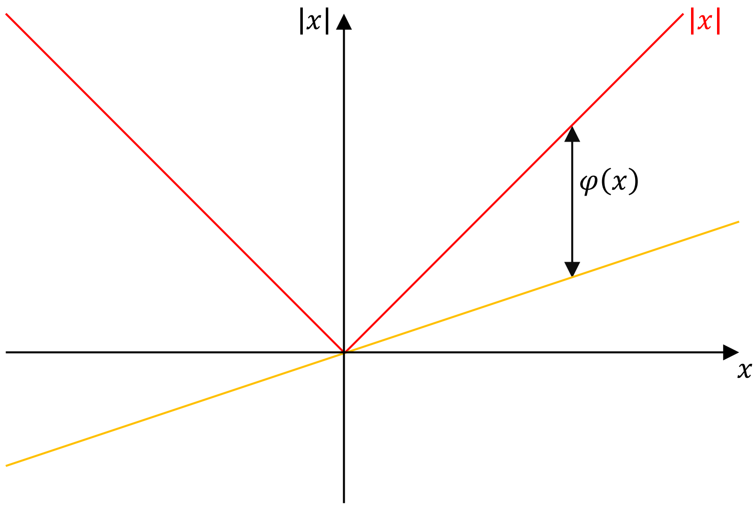



$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{lineare Approximierung}} + \varphi(x)$$

wobei der Fehler $\varphi(x)$ „schneller als linear“ gegen Null geht.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x - x_i} = 0$$

Für $f(x) = |x|$ gilt dies im kritischen Punkt $x_0 = 0$ nicht:



### 11.5. Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$.

$f$ heißt in $x_0 \in U$ (**total**) **differenzierbar**, wenn es eine lineare Abbildung

$$l: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \varphi(x)$$

und

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

### 11.6. Bemerkungen

(i) Insbesondere gilt dann

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

also

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} l(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f(x_0)$$

Also:

$$\boxed{f \text{ differenzierbar} \Leftrightarrow f \text{ stetig}}$$

(ii) Es gilt für $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$:

$f$ differenzierbar $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_m$ differenzierbar

(iii) Die lineare Abbildung $l: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in 11.5 ist eindeutig bestimmt und heißt die **totale Ableitung** oder das **Differential** von $f$ in $x_0$.

Darstellende Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ bzgl. kanonischer Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$:

Wähle $x = x_0 + h \cdot e_j \quad j = 1, \dots, n$

$$\frac{f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)}{h} = \underbrace{\frac{l(h \cdot e_j)}{h}}_{=l(e_j)} + \underbrace{\frac{\varphi(x_0 + h \cdot e_j)}{h}}_{\xrightarrow[n\to 0]{} 0} \xrightarrow[n\to 0]{} l(e_j)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

### 11.7. Definition

Die die totale Ableitung darstellende Matrix heißt **Jacobi-Matrix** $Df$ von $f$.

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

### 11.8. Bemerkungen

(i) Speziell $f\colon \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}$, d.h. $m = 1$

$$\Rightarrow Df = \operatorname{grad} f \text{ (Zeilenvektor)}$$

(ii) Die Einträge der Jacobi-Matrix sind die partiellen Ableitungen und es gilt

$$\boxed{f \text{ (total) differenzierbar} \Rightarrow f \text{ partiell differenzierbar}}$$

Die Umkehrung ist falsch! Beispiel (vgl. 10.7(iv)):

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wegen $f(0,y) = f(x,0) = 0 \Rightarrow f$ partiell differenzierbar in $(0,0)$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = 0$$

Aber: $f$ ist nicht total differenzierbar, da $f$ nicht stetig in $(0{,}0)$ ist.

Hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit:

**11.9. Satz**

Sei $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen von $f$ in $x \in U$ stetig ($f$ heißt dann **stetig differenzierbar**):

Dann ist $f$ in $x$ total differenzierbar.

$$\boxed{\text{stetig differenzierbar} \Rightarrow \text{differenzierbar} \Rightarrow \text{partiell differenzierbar}}$$

**Höhere Ableitungen**

Ist $f$ in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

so kann man versuchen, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nochmals zu differenzieren, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i, j = 1, \dots, n$$

zu bilden.

**11.10. Definition**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $k \in \mathbb{N}$.

$f$ heißt ***k*-mal partiell differenzierbar**, wenn die iterierten partiellen Ableitungen $k$-ter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$$

existieren. Sind diese Ableitungen stetig, so heißt $f$ ***k*-mal stetig differenzierbar**.

**Schreibweise**: Wir schreiben

$$D_{i_k i_{k-1} \dots i_1} f := \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f$$

**11.11. Beispiel**

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \sin(xy) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \cos(xy) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x,y)}_{=y\cdot\cos(xy)} - y^2 \cdot \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \cdot \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \cos(xy)) = \cos(xy) + x \cdot (-y \cdot \sin(xy)) = \cos(xy) - xy \cdot \sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \cos(xy)) = \cos(xy) - xy \cdot \sin(xy)$$

**Bemerkung**: Ableitungen der Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

heißen **reine Ableitungen**, Ableitungen der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

heißen **gemischte Ableitungen**.

Man erkennt im Beispiel, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

gilt, das heißt die gemischten Ableitungen hängen *nicht* von der Reihenfolge der Differentiation ab.

**11.12. Satz**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ $k$-mal **stetig** diff'bar.
Dann ist bei der Bildung der partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $k$ die Reihenfolge der Differentiation unerheblich. Das heißt für jede Permutation $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(k)$ von $1, \dots, k$ gilt

$$D_{i_k i_{k-1} \dots i_1} f = D_{i_{\pi(k)}, \dots, i_{\pi(1)}} f$$

**11.13. Bemerkungen**

(i) Satz 11.12 wird falsch, wenn man die Stetigkeit der partiellen Ableitungen weglässt.

(ii) Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$\operatorname{Hess} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1\dots n} \in M_n(\mathbb{R})$$

heißt **Hesse-Matrix von $f$** (an der Stelle $x$).

Daraus folgt sofort:

**11.14. Korollar**

Ist $f$ zweimal stetig differenzierbar, so ist die Hesse-Matrix von $f$ symmetrisch.

**11.15. Andere Schreibweise für höhere Ableitungen**

Ein **Multiindex** ist ein Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ (d.h. $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$)

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

heißt **Ordnung von $\alpha$**.
Man setzt

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f := \partial^\alpha f := D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

für eine partielle Ableitung der Ordnung $|\alpha|$. Diese Notation ist nach Satz 11.12 sinnvoll, wenn $f$ $|\alpha|$-mal stetig differenzierbar ist.

**Lokale Extrema**

**11.16. Definition**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$.

$x_0 \in U$ heißt **lokales Minimum**, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ in einer Umgebung von $x_0$.
$x_0 \in U$ heißt **lokales Maximum**, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ in einer Umgebung von $x_0$.

Gilt in diesen Ungleichungen die Gleichheit nur für $x = x_0$, so spricht man von einem **isolierten** lokalen Minimum bzw. Maximum.

Lokale **Extrema** sind lokale Minima oder Maxima.

Ist nun $f: U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $x_0$ ein lokales Extremum, dann besitzt die Abbildung

$$\gamma_i := h \mapsto f(x_0 + h \cdot e_i) \quad (\text{mit } e_i = i\text{-ter Einheitsvektor})$$

für jedes $i = 1, \dots, n$ ein lokales Extremum in $h = 0$.

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \gamma_i'(0) = 0$$

Somit:

**11.17. Notwendiges Kriterium für lokale Extrema**

Besitzt $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, in $x_0$ ein lokales Extremum, und ist $f$ in $x_0$ partiell differenzierbar, so gilt:

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mathcal{O}$$

Man kann mögliche Stellen für Extrema ermitteln, indem man vorstehende (nicht-lineare) Gleichungssysteme mit $n$ Gleichungen und $n$ Unbekannten löst.

Wie im 1-Dimensionalen findet man ein hinreichendes Kriterium, indem man zweite Ableitungen verwendet.

**11.18. Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in U$ ein Punkt mit

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mathcal{O}.$$

Es gilt:

$\operatorname{Hess} f(x_0)$ positiv definit $\Rightarrow x_0$ ist isoliertes lokales Minimum
negativ definit $\Rightarrow x_0$ ist isoliertes lokales Maximum
indefinit $\Rightarrow x_0$ ist kein lokales Extremum

$\operatorname{Hess} f(x_0)$ positiv semidefinit **in einer Umgebung von $x_0$** $\Rightarrow$ $x_0$ ist ein lokales Minimum
negativ semidefinit **in einer Umgebung von $x_0$** $\Rightarrow$ $x_0$ ist ein lokales Maximum

**Anmerkung**:

(negativ)
$A$ positiv definit $\Leftrightarrow$ Für alle $x \neq 0$ gilt $x^t \cdot A \cdot x \overset{(<)}{>} 0$
$(x, y) \mapsto x^t \cdot A \cdot y$ ist Bilinearform, $A$ symmetrisch

### 11.19. Bemerkung

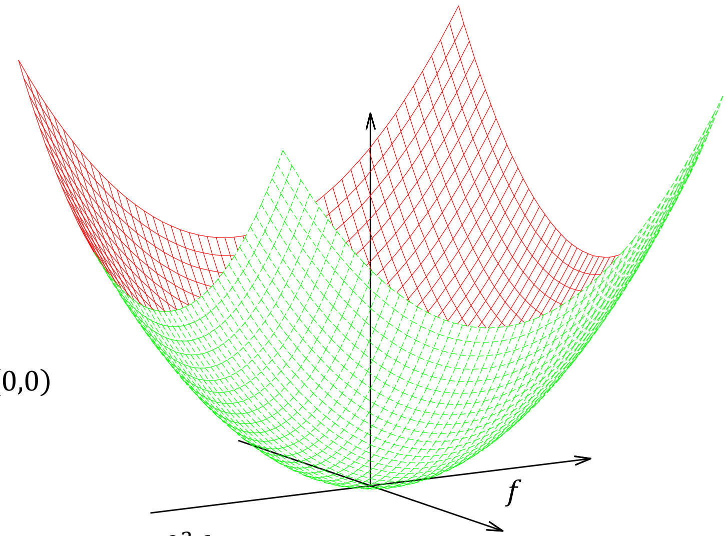
In der linearen Algebra wird folgendes Kriterium für Definitheit gezeigt:

Für $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch gilt:

$A$ positiv definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$
$A$ negativ definit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte $\lambda_i < 0$
$A$ positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$
$A$ negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte $\lambda_i \leq 0$
$A$ indefinit $\Leftrightarrow$ Es gibt Eigenwerte $\lambda_i$ und $\lambda_j$ mit $\lambda_i < 0$ und $\lambda_j > 0$

### 11.20. Beispiele

(i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2$




$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x, y) = (2x, 2y) \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Mögliche Extremstelle bei $(x, y) = (0,0)$

Bestimme Hesse-Matrix:

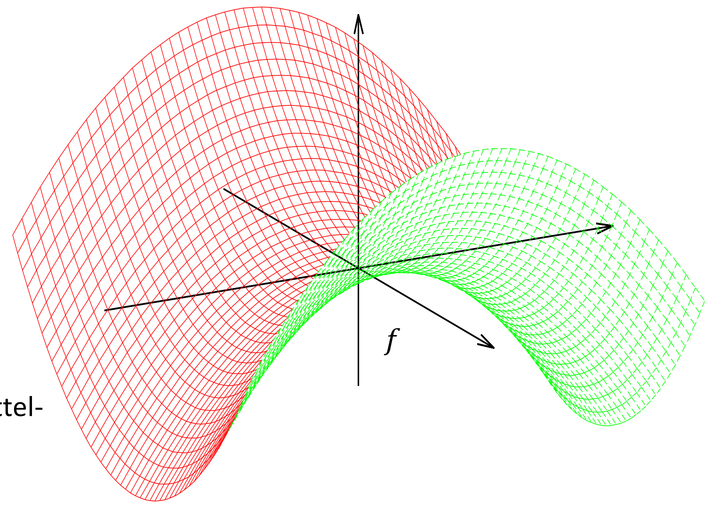
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \underset{\uparrow}{=} 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich positiv definit, also ist $(0,0)$ ein Minimum.

(ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - y^2$



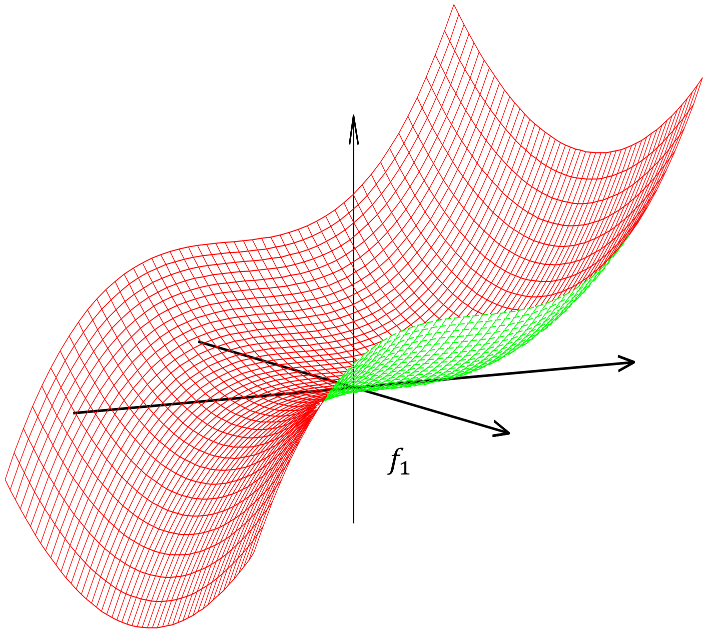

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y) \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

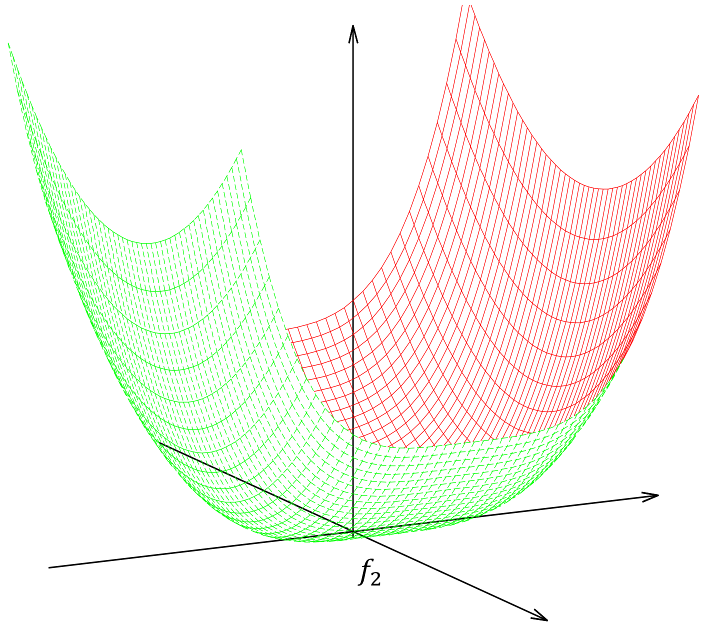
$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist indefinit (auch für $(x,y) = (0,0)$).

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist kein Extremum (sondern Sattelpunkt)

(iii) $f_{1,2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = x^2 + y^3, f_2(x,y) = x^3 + y^4$




$$\operatorname{grad} f_1(x,y) = (2x, 3y^2) \quad \operatorname{grad} f_2(x,y) = (2x, 4y^3)$$

Somit:

$$\operatorname{grad} f_{1,2}(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$\operatorname{Hess} f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \quad \operatorname{Hess} f_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\operatorname{Hess} f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Hess} f_2(0,0) \text{ sind positiv semidefinit}$$

Für eine Aussage mit dem hinreichenden Kriterium müssen wir also die Umgebung von $(0,0)$ anschauen.

Für Hess $f_2$ gilt:
Hess $f_2(x,y)$ ist in einer Umgebung von $(0,0)$ positiv semidefinit ($12y^2 > 0 \quad \forall y \neq 0$).

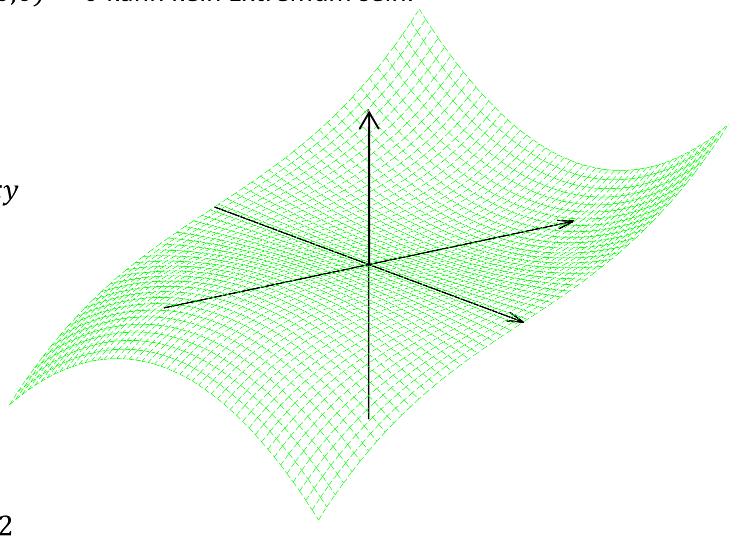
$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist lokales Minimum von $f_2$.

Genauere Betrachtung von $f_1$ liefert:

$$f_1(0,y) = y^3 \begin{cases} > 0 & \text{falls } y > 0 \\ < 0 & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ In jeder Umgebung von $(0,0)$ gibt es Stellen $(x,y)$ mit positiven und negativen Funktionswerten, d.h. $(0,0)$ mit $f(0,0) = 0$ kann kein Extremum sein.

(iv) $f(x,y) = \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{4}xy^2$



$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2 - 1 + \frac{1}{4}y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor y = 0$$

Eingesetzt in $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = 0: -1 + \frac{1}{4}y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 2 \\ y = 0: \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{matrix}$$

$\rightarrow$ Vier kritische Punkte: $P_1 = (0,2), P_2 = (0,-2), P_3 = \left(\sqrt{2},0\right), P_4 = \left(-\sqrt{2},0\right)$

Hesse-Matrix:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2}y$$

$$\Rightarrow \text{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} x & \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Hess $f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 1$ $\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 1$

$\Rightarrow$ Hess $f(P_1)$ indefinit, $P_1$ kein Extremum (sondern Sattelpunkt)

$\operatorname{Hess} f(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 1$ ⇒ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 1$

⇒ $\operatorname{Hess} f(P_2)$ indefinit, $P_2$ kein Extremum (sondern Sattelpunkt)

$\operatorname{Hess} f(P_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ⇒ Eigenwerte $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

⇒ $\operatorname{Hess} f(P_3)$ positiv definit, $P_3$ lokales Minimum

$\operatorname{Hess} f(P_4) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ⇒ Eigenwerte $\lambda_1 = -\sqrt{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

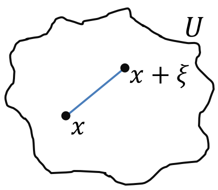
⇒ $\operatorname{Hess} f(P_4)$ negativ definit, $P_4$ lokales Maximum

**11.21. Bemerkung**

Ist $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ → Tangential(hyper)ebene liegt horizontal → lineare Approximation durch Konstante.

Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder ein Minumum vorliegt, muss man Terme höherer Ordnung betrachten.
Dies gelingt wie im 1-dimensionalen durch

**11.22. Satz** (Taylorsche Formel)




Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + t \cdot \xi \in U$ für alle $0 \leq t \leq 1$.
Weier sei $f: U \to \mathbb{R}$ $k$-mal stetig differenzierbar.
Dann gibt es ein $\vartheta \in [0; 1]$ mit

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x+\vartheta\xi)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha$$

Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ Multindex, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ die Ordnung,$\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \alpha_n!$ und $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \dots \xi_n^{\alpha_n}$.

**11.23. Folgerung**

Ist $f: U \to \mathbb{R}$ $k$-mal stetig differenzierbar, so gilt

$$f(x+\xi) = \underbrace{\sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha}_{\substack{\text{Approximation durch} \\ \text{Polynom vom Grad } k \\ \text{in } n \text{ Variablen}}} + \underbrace{\varphi(\xi)}_{\text{Fehler}}$$

mit

$$\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k} \underset{\xi\to 0}{\longrightarrow} 0$$

denn mit Taylorformel sieht man

$$\varphi(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x+\vartheta\xi) - D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^k}\right| \le \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \cdot \underbrace{|D^\alpha f(x+\vartheta\xi) - D^\alpha f(x)|}_{\underset{\xi\to 0}{\longrightarrow} 0} \cdot \underbrace{\left|\frac{\xi^\alpha}{\|\xi\|^k}\right|}_{\text{beschränkt}} \text{ da } f \text{ stetig}$$

**11.24. Bemerkung**

Terme bis Ordnung 2 in Taylor-Entwicklung:

Term der Ordnung $k$:

$$P_k(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot \xi^\alpha$$

$k = 0$: $\alpha = (0, \dots, 0)$

$$\Rightarrow P_0(\xi) = f(x) \text{ Konstante}$$

$k = 1$:

$$\Rightarrow P_1(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot \xi_j = \langle \operatorname{grad} f(x), \xi \rangle$$

lineare Approximation, wobei grad $f(x) = Df(x)$ Jacobi-Matrix von $f$.

$k = 2$: $|\alpha| = 2 \Rightarrow$ Für $1 \leq i \leq j \leq n$

$$\alpha = e_i + e_j = \begin{cases} (0, \dots, 2, \dots, 0) & i = j \\ (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te}}}{1}, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te}}}{1}, \dots, 0) & i \neq j \end{cases}$$

Position

$$\Rightarrow \alpha! = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_2(\xi) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \cdot \xi_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \xi_i^1 \cdot \xi_j^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \xi_i \cdot \xi_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \xi_i \cdot \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \cdot \xi^t \cdot (\operatorname{Hess} f(x)) \cdot \xi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \langle \xi, \operatorname{Hess} f(x) \cdot \xi \rangle \end{aligned}$$

$P_2$ quadratische Form mit darstellender Matrix $\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Hess} f(x)$.

**Beweis** von 11.18:
Sei $\operatorname{grad} f(x_0) = 0 \rightarrow$ Taylorformel

$$f(x_0 + \xi) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(x_0), \xi \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \cdot \langle \xi, \operatorname{Hess} f(x_0 + \vartheta \xi) \cdot \xi \rangle$$

$\operatorname{Hess} f$ in einer Umgebung von $x_0$ negativ semidefinit $\Rightarrow f(x_0 + \xi) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow$ lokales Maximum
$\operatorname{Hess} f$ in einer Umgebung von $x_0$ positiv semidefinit $\Rightarrow f(x_0 + \xi) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

Weiter gilt nach 11.23: Falls $\operatorname{Hess} f(x_0)$ positiv definit

$$f(x_0 + \xi) - f(x_0) = \underbrace{\langle \operatorname{grad} f(x_0), \xi \rangle}_{=0} + \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \langle \xi, \operatorname{Hess} f(x_0) \cdot \xi \rangle}_{>0}}_{\text{von zweiter Ordnung}}}_{\substack{\Rightarrow \text{ bestimmt Vorzeichen} \\ \text{für kleine } \xi}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} \xrightarrow[\xi \to 0]{} 0}}{\varphi(\xi)}$$

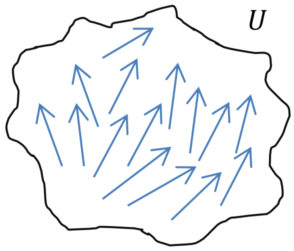
dann heißt $x_0$ isoliertes lokales Minimum (für negativ definit und indefinit analog). ∎

**Grundbegriffe der Vektoranalysis**

## 11.25. Definitionen und Beispiele

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Sei $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar (so etwas heißt auch **Vektorfeld**).




Dann heißt

$$\operatorname{div} f := \langle \nabla, f \rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

die **Divergenz** vom Vektorfeld $f$.

(ii) Für $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

$\Delta$ heißt **Laplace-Operator**.

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} f &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = \Delta f \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f}$$

(iv) Für $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $v: U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar heißt

$$\operatorname{rot} v := \nabla \times v := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

die **Rotation** von $f$.

Ist $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0}$$

denn zum Beispiel 1. Komponente

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

(v) Für Raumdimension $n \geq 3$ sei

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^{n-2}} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$f$ heißt **Newton-Potential**.

Dann gilt

$$\Delta f = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

das heißt $f$ ist Lösung der „Laplace-Gleichung“, denn

$$f(x) = \|x\|^{2-n} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{2-n}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2-n}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot 2x_i = \frac{2-n}{\|x\|^n} \cdot x_i$$

das heißt

$$\operatorname{grad} f = \frac{2-n}{\|x\|^n} \cdot x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = (2-n) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \cdot \|x\|^{-n}) = (2-n)\left( \|x\|^{-n} + x_i \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\|x\|^{-n})}_{=-n \cdot \frac{x_i}{\|x\|^{n+2}}} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{2-n}{\|x\|^n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (1-n) \cdot \frac{x_i^2}{\|x\|^2}$$
$$= \frac{2-n}{\|x\|^n} \cdot \left( n - n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\|x\|^2} \right) = 0$$

**11.26. Satz** (Kettenregel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und

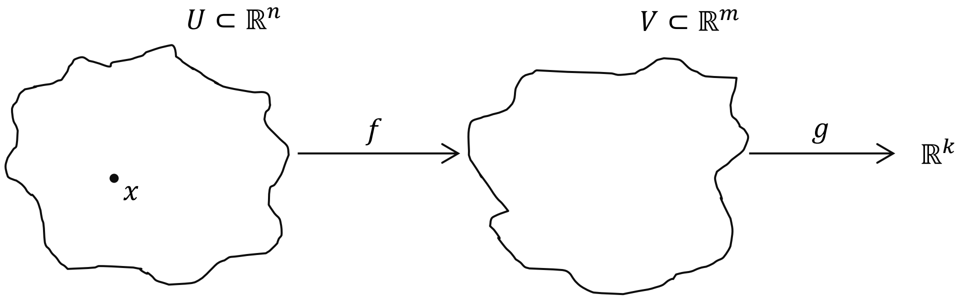
$$f: U \to V, \qquad g: V \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbar. Dann ist

$$g \circ f: U \to \mathbb{R}^k$$

differenzierbar und es gilt für die Jacobi-Matrizen

$$\boxed{D(g \circ f)(x) = (Dg)\big(f(x)\big) \cdot Df(x)}$$




$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

zum Beispiel:

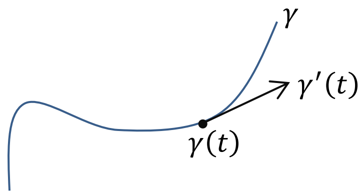
$$\begin{array}{ccccc} t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} & \mapsto & f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \\ \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) &= D\big[f\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)\big] \\ &= (Df)\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \cdot D \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \\ &= (\operatorname{grad} f)\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \cdot x_n'(t) \end{aligned}$$

**11.27. Beispiel**

Sei

$$\begin{aligned} \gamma: ]-1;1[ &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$




differenzierbar.

$\gamma$ beschreibt differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$.

$$Dg(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$$

ist Geschwindigkeitsvektor.

*Richtung*: Tangential zu $\gamma$ an der Stelle $\gamma(t)$.
*Länge*: Geschwindigkeit, mit der die Kurve $\gamma$ durchlaufen wird.

$\Rightarrow$ $\gamma$ durchläuft bei $t = 0$ den Punkt $p := \gamma(0)$ mit Tangentialvektor $v := \gamma'(0)$.

Sei nun

$$f: \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}$$

differenzierbar mit $p = \gamma(0) \in U$

$\Rightarrow t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$ Auswertung von $f$ längs der Kurve $\gamma$
$\Rightarrow \frac{d}{dt}\big(f \circ \gamma(t)\big)\Big|_{t=0}$ Änderungsrate von $f$ in $p = \gamma(0)$ längs der Kurve $\gamma$, d.h. in Richtung $v = \gamma'(0)$

**Definition**:

$$D_v f(p) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0}$$

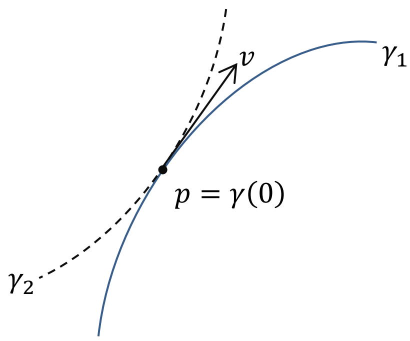
heißt **Richtungsableitung** von $f$ in $p = \gamma(0)$ in Richtung $v = \gamma'(0)$.
Nach Kettenregel:

$$\underset{\subset \mathbb{R}}{]-1;1[} \xrightarrow{\gamma} \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_v f(p) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(p) \cdot \underbrace{\gamma'(0)}_{=v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

$$\boxed{D_v f = \langle \operatorname{grad} f, v \rangle}$$

$D_v f$ ist Linearkombination der partiellen Ableitungen.
$D_v f(p)$ ist nicht von der speziellen Wahl der Kurve $\gamma$ abhängig, sondern nur von $v = \gamma'(0)$.



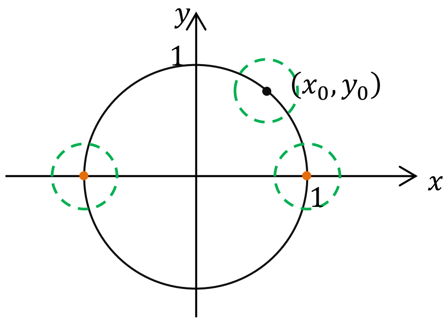

Speziell für $v = e_i \Rightarrow D_{e_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$$D_v f \text{ wird maximal} \Leftrightarrow v \text{ hat gleiche Richtung wie } \operatorname{grad} f$$

$\Rightarrow$ Gradient zeigt in Richtung des maximalen Anstiegs von $f$.

## 12. Satz von der impliziten Funktion

Beispiel: $x^2 + y^2 = 1$ in $\mathbb{R}^2$.




Kann man dies nach $y$ auflösen?

Sei $(x_0, y_0)$ gegeben mit $x_0^2 + y_0^2 = 1$ und $-1 < x < 1, y \geq 0$

$$\rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

In den Punkten $(-1,0)$ und $(1,0)$ ist Auflösen in einer Umgebung nicht möglich.

Sei $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f(x, y) = f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

$y_1, \dots, y_n$ Unbekannte, $x_1, \dots, x_m$ Parameter für Gleichungssystem $f(x,y) = 0$

d.h.

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{gathered}$$

Nach Wahl der Parameter $x_1, \dots, x_m$: $n$ Gleichungen für $n$ Unbekannte $y_1, \dots, y_n$

Gesucht: Abhängigkeit der Lösung $y_1, \dots, y_n$ von den Parametern $x_1, \dots, x_m$

d.h. Funktion

$$g: V \to \mathbb{R}^m \quad V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen}$$

mit

$$f\big(x, g(x)\big) = 0 \quad \forall x \in V$$

Sei nun $(x_0, y_0) \in U$ ein Paar mit $f(x_0, y_0) = 0$.

Idee: Lineare Approximation

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + Df(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Zerlege Jacobi-Matrix $Df$ in Ableitungen nach $x$ und $y$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R}) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Dann ist

$$f(x,y) \approx \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] \cdot (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] \cdot (y - y_0) \approx 0$$

$$\Rightarrow y \approx y_0 - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] \cdot (x - x_0)$$

Plausibel: Geht in Ordnung, wenn $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ invertierbar, also wenn $\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$.

### 12.1. Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit

$$f(x_0, y_0) = 0$$

für ein $(x_0, y_0) \in U$.
Ist dann

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

so gibt es eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von $x_0$ und eine stetig differenzierbare Funktion

$$g: V \to \mathbb{R}^n$$

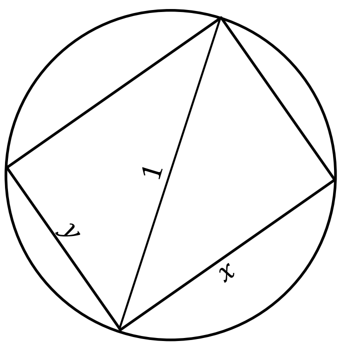
mit

$$f\big(x, g(x)\big) = 0 \quad \forall x \in V$$

**Anwendung: Extrema mit Nebenbedingung**

### 12.2. Beispiel

Schneide aus kreisförmigem Blech vom Durchmesser 1 ein möglichst großes Rechteck aus.




Gesucht: Maximum von

$$f(x, y) = x \cdot y$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Für solche Probleme gilt allgemein:

**12.3. Satz**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Es sei $a \in U$ ein Punkt, der die Nebenbedingung $g(a) = 0$ und $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$ erfüllt.

Ist $a$ ein lokales Extremum von $f(x)$ unter der Nebenbedingung $x \in \{g = 0\}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{grad} f(a) + \lambda \cdot \operatorname{grad} g(a) = 0$$

**12.4. Bemerkungen**

(i) $\lambda$ heißt **Lagrange-Multiplikator**.

(ii) Die Bestimmungsgleichungen

$$g(a) = 0$$

$$\operatorname{grad} f(a) + \lambda \cdot \operatorname{grad} g(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \lambda \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(a) = 0 \end{cases}$$

bilden ein System von $n + 1$ Gleichungen für die $n + 1$ Unbekannten $a_1, \dots, a_n, \lambda$.

**Beweis** von 12.3:

Wegen $\operatorname{grad} g(a) \neq 0$, ist

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \neq 0$$

für mindestens ein $i$, ohne Einschränkung

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \neq 0$$

Nach dem Satz von der impliziten Funktion gibt es für die Nebenbedingung

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0$$

in der Nähe von $a$ eine stetig differenzierbare Funktion $h(x_1, \dots, x_{n-1})$

mit

$$g\big(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})\big) = 0$$

Ableiten nach $x_i$ liefert mit Kettenregel für $i = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} g\big(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{\delta_{ij}} + \frac{\partial g}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \qquad (*) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \end{aligned}$$

$f$ besitzt lokales Extremum in $a = (a_1, \dots, a_n)$ unter der Nebenbedingung $\{g = 0\}$ bedeutet

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) \coloneqq f\big(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})\big)$$

besitzt lokales Extremum in $(a_1, \dots, a_{n-1})$

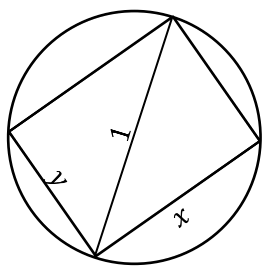
$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n-1$$

Also wie oben

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{n-1}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \underbrace{\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)}}_{=:-\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_n}(a) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{n-1})}_{\overset{(*)}{=} -\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \end{aligned}$$

→ Behauptung ■

### 12.5. Beispiel




Sei wie am Anfang des Kapitels

$f(x, y) = x \cdot y$ mit $x, y > 0$

Nebenbedingung: $x^2 + y^2 = 1$
d.h. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) &= (y,x)\\ \operatorname{grad} g(x,y) &= (2x,2y)\end{aligned}$$

⇒ Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix}\operatorname{grad} f(x,y)+\lambda\cdot\operatorname{grad} g(x,y)=0\\ g=0\end{bmatrix}$$

das heißt

$$\begin{bmatrix} y+\lambda\cdot 2x=0\\ x+\lambda\cdot 2y=0\\ x^2+y^2-1=0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0=x-4\lambda^2x=x(1-4\lambda^2)\\ x^2+y^2-1=0\end{bmatrix}$$

1. Fall: $x=0\to y=0\Rightarrow x^2+y^2=0\neq 1$

2. Fall: $1-4\lambda^2=0\Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow y=\pm x \underset{x,y>0}{\Longrightarrow} y=x$

Wegen $x^2+y^2=1$ folgt $x=y=\sqrt{\frac{1}{2}}$

Wir erhalten als extremales Rechteck hier ein Quadrat.

### 12.6. Bemerkungen

(i) Merkregel: Bilde **Lagrange-Funktion**

$$L(x,\lambda) := f(x)+\lambda\cdot g(x)$$

und bestimme die Lösungen des Gleichungssystems

$$\operatorname{grad} L(x,\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x_1}=0\\ \vdots\\ \frac{\partial L}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial x_n}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}= g =0\end{bmatrix}$$

(ii) Verfahren geht auch bei Extrema mit mehreren Nebenbedingungen.

Maximiere $f(x)$ unter Nebenbedingungen $\begin{matrix} g_1(x)=0\\ \vdots\\ g_k(x)=0\end{matrix}$.

Bilde Lagrange-Funktion

$$L(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x_1,\dots,x_n)$$

Ist $a$ ein lokales Extremum unter den Nebenbedingungen $\{g_j = 0\}$ und sind die Vektoren grad $g_j(a)$, $j = 1, \dots, k$ linear unabhängig, so löst $a$ das Gleichungssystem

$$\operatorname{grad} L = 0$$

d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } g_j = 0 \text{ für } j = 1, \dots, k$$

### 12.7. Beispiel

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Bestimme die Extrema der quadratischen Form

$$q(x) := \langle x, Ax \rangle$$

unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$.

Dann sei

$$\begin{aligned} g(x) := \|x\|^2 - 1 \Rightarrow \operatorname{grad} g(x) &= \operatorname{grad}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1) \\ &= (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) = 2x \neq 0 \text{ für } \|x\| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i, x_j)}_{\frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + x_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{= a_{ki}} x_i \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \Rightarrow \operatorname{grad} q(x) = 2 \cdot Ax \end{aligned}$$

Somit gilt für ein Extremum $a$ unter der Nebenbedingung $\{g = 0\}$

$$\underbrace{2 \cdot A \cdot a + \lambda \cdot 2 \cdot a = 0}_{\Leftrightarrow A \cdot a = (-\lambda) \cdot a} \text{ und } \|a\| = 1$$

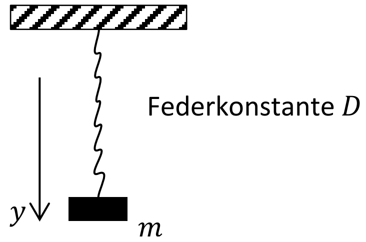
das heißt, $a$ ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\mu = -\lambda$.

Dabei gilt $q(a) = \langle a, Aa \rangle = \langle a, \mu \cdot a \rangle = \mu \cdot \|a\|^2 = \mu$

Somit ist der normierte Eigenvektor zum größten Eigenwert von $A$ ein Maximum
und der normierte Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert von $A$ ein Minimum.

# 13. Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 13.1. **Beispiel** (Federpendel)




**Newton**: Kraft = Masse · Beschleunigung

Sei:
$y(x)$ die Position der Masse $m$ zum Zeitpunkt $x$.
$y'(x)$ die Geschwindigkeit der Masse $m$ zum Zeitpunkt $x$.
$y''(x)$ die Beschleunigung der Masse $m$ zum Zeitpunkt $x$.

Kraft auf Masse: $-D \cdot y(x)$ (rückwirkende Kraft)

$$\underset{\text{Newton}}{\Longrightarrow} \boxed{-D \cdot y(x) = m \cdot y''(x)} \text{ bzw. } \boxed{y'' = -\frac{D}{m} \cdot y}$$

Gesucht ist eine **Funktion** $y = y(x)$, so dass $y$ und $y''$ die obige Gleichung erfüllen, d.h. $y$ soll eine **Lösung** der **Differentialgleichung** (Dgl) sein.

Hier z.B.

$$y(x) = \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot x\right)$$

Die höchste dabei auftretende Ableitungsordnung heißt **Ordnung** der Differentialgleichung (hier: Dgl 2. Ordnung).

Formal:

## 13.2. **Definition**

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ stetig, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. Dann heißt die Funktion

$$y: I \to \mathbb{R}$$

**Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung**.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

wenn $y(x)$ $n$-mal differenzierbar ist und $\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right) \in G$ für alle $x \in I$ und $y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$ für alle $x \in I$.

Ist die Differentialgleichung nicht nach $y^{(n)}$ aufgelöst, so spricht man von einer **implizierten** Definition, z.B. $\quad y'^2 + y^2 = 1$

Auch vektorwertige Differentialgleichungen sind möglich, d.h. $y(x) \in \mathbb{R}^n$

→ **System von Differentialgleichungen**

### 13.3. Beispiel/Bemerkung

Lösungen von Differentialgleichungen sind nicht eindeutig:

Z.B. $y' = y$

Lösungen sind gegeben durch $y = e^x$ oder $y = 2e^x$ oder allgemein $y(x) = Ce^x$ ($C \in \mathbb{R}$).

**Faustregel**: Für eine Differentialgleichung $n$-ter Ordnung benötigt man $n$ Parameter $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ zur Festlegung der Lösung.

Dies kann man z.B. tun durch die Vergabe einer sogenannten **Anfangsbedingung**.

Etwa

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

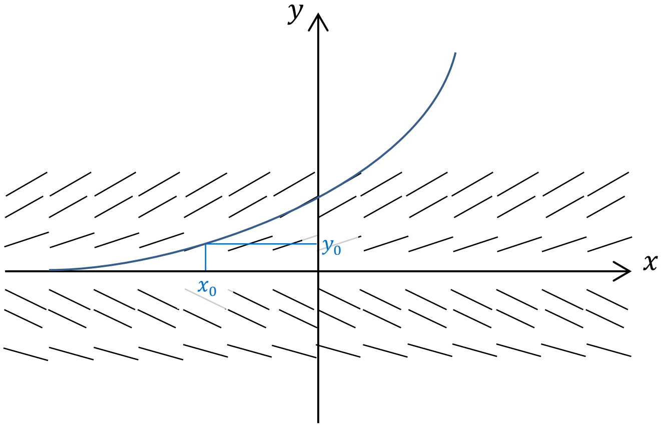
für ein $(x_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$.
Sucht man Lösungen einer Differentialgleichung mit gegebenen Anfangsbedingungen, so spricht man von einem **Anfangswertproblem** (AWP).

### 13.4. Geometrische Interpretation von Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

d.h. in jedem Punkt $(x, y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$ wird eine Steigung $y'(x)$ durch die Funktion $f(x, y)$ vorgegeben. → **Richtungsfeld**

**Beispiel**: $f(x, y) = y$ → Differentialgleichung $y' = y$




Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar ↔ durch jeden Punkt $(x, y) \in G$ läuft genau eine Lösungskurve (Graph der Lösung)

## 13.5. Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Sei $f: G \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle die sogenannte **lokale Lipschitz-Bedingung** bzgl. $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$, d.h. zu jedem $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in G$ existiert eine Umgebung $\tilde{G} \subseteq G$ und $L \geq 0$, so dass

$$\left|f\left(x, y^{(1)}\right) - f\left(x, y^{(2)}\right)\right| \leq L \cdot \left\|y^{(1)} - y^{(2)}\right\| \text{ mit } \begin{array}{l} y^{(1)} = \left(y_1^{(1)}, \dots, y_{n-1}^{(1)}\right) \\ y^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, \dots, y_{n-1}^{(2)}\right) \end{array}$$

für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in \tilde{G}$

Dies ist z.B. erfüllt, wenn $f$ stetig differenzierbar ist.

Dann gibt es zu jeder Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

genau eine Lösung des Anfangswertproblems (mit maximalem Definitionsintervall von $y$) zu der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right).$$

**Spezielle Methoden für Differentialgleichungen 1. Ordnung**

## 13.6. Trennung der Variablen

Betrachte Anfangswertproblem $y' = f(x) \cdot g(y)$

$y(x_0) = y_0$ wobei $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ stetig, $I, J$ Intervalle in $\mathbb{R}$ (hier ist dann $G = I \times J$)

1. Fall: $g(y_0) = 0 \Rightarrow y(x) = y_0$ konstant ist offensichtlich eine Lösung der Dgl.

2. Fall: $g(y_0) \neq 0 \Rightarrow g$ ist in einer Umgebung von $y$ ebenfalls $\neq 0$ (Stetigkeit!), ohne Einschränkung $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.

„Formale Rechung“:

$$y' = \frac{d}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \text{„}\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx\text{“}$$
$$\Leftrightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x_0}^{x} f(t) dt$$

Oder nach Anfangsbedingung

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C}$$

### 13.7. Beispiele

(i) $y' = y \; f(x) = 1, g(y) = y$

$$\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int 1 dx$$

$$\boxed{\ln|y| = x + C}$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm e^{x+C} = \underbrace{\pm e^C}_{=:\tilde{C}} \cdot e^x \text{ mit } \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

(ii) $y' = y^2 \cdot x^3$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot x^3$$

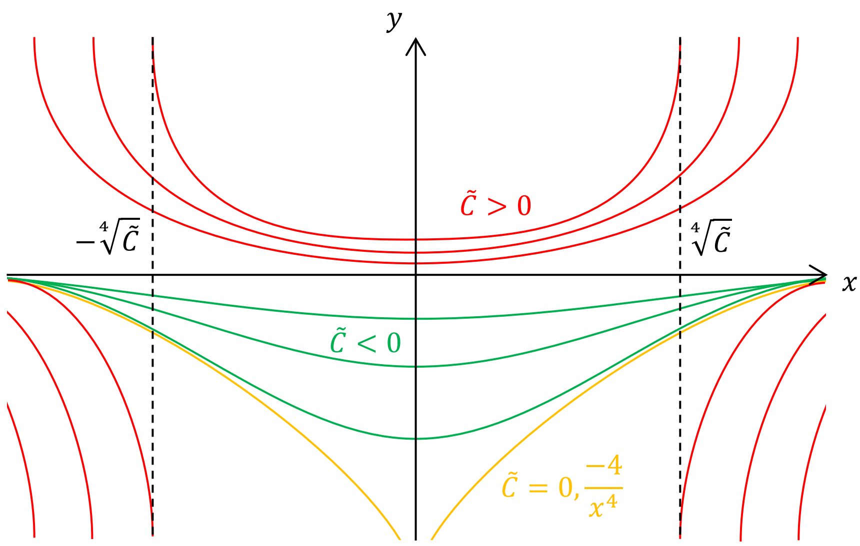
$$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int x^3 dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{4} x^4 + C = \frac{1}{4}(x^4 - \underbrace{\tilde{C}}_{4 \cdot C})$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{f}{\tilde{C} - x^4}$$

Definitionsintervalle: $I$

$\tilde{C} < 0: I = \mathbb{R}$
$\tilde{C} \geq 0: I = \left]-\infty, -\sqrt[4]{\tilde{C}}\right[, \left]-\sqrt[4]{\tilde{C}}, \sqrt[4]{\tilde{C}}\right[, \left]\sqrt[4]{\tilde{C}}, \infty\right[$



**Lineare Differentialgleichungen**

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

dabei nur linear bzgl. $y$. $a, b$ müssen nicht linear sein.

### 13.8. Homogene Gleichung: $\boldsymbol{b(x) = 0}$

$$\boxed{y' = a(x) \cdot y}$$

Typ: Getrennte Variablen

$$\frac{dy}{dx} = a(x) \cdot y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a(x) dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \int a(x) dx + \tilde{C}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{\tilde{C}}}_{=:C} \cdot e^{\int a(x) dx}$$

Lösung:

$$\boxed{y(x) = C \cdot e^{\int a(x) dx}}$$

### 13.9. Beispiel

$$y' = x \cdot y$$

d.h. $a(x) = x$

$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

### 13.10. Inhomogene Gleichung: $\boldsymbol{b(x) \neq 0}$

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

Ansatz: **Variation der Konstanten**

$$y(x) = C(x) \cdot e^{\int a(x) dx}$$

(wäre $C(x) = C \rightarrow$ Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung)

Einsetzen in Gleichung:
Linke Seite:

$$y'(x) = C'(x) \cdot e^{\int a(x)dx} + C(x) \cdot e^{\int a(x)dx} \cdot a(x)$$

Rechte Seite:

$$a(x) \cdot y(x) + b(x) = a(x) \cdot C(x) \cdot e^{\int a(x)dx} + b(x)$$

Gleichsetzen liefert

$$C'(x) \cdot e^{\int a(x)dx} = b(x)$$

Auflösen nach $C'(x)$ und Integration liefert $C(x)$:

$$C'(x) = b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}$$

**13.11. Beispiel**

$$y' = 2xy + x^3 \to a(x) = 2x, b(x) = x^3$$

homogene Gleichung:

$$y' = 2xy$$

Lösung

$$y(x) = C \cdot e^{\int a(x)dx} = C \cdot e^{x^2}$$

Variation der Konstanten, d.h. Ansatz:

$$y(x) = C(x) \cdot e^{x^2}$$

$$y'(x) = C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x$$

$$2xy + x^3 = 2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2} + x^3$$

$\Rightarrow C'(x) = x^3 \cdot e^{-x^2}$
$\Rightarrow C(x) = \int x^3 \cdot e^{-x^2} dx$

Substitution: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

$\Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} \cdot \int u \cdot e^{-u} du \overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} \ldots = -\frac{1}{2} \cdot (1+u) \cdot e^{-u} + C = -\frac{1}{2} \cdot (1+x^2) \cdot e^{-x^2} + C$
$\Rightarrow y(x) = \left(-\frac{1}{2}(1+x^2) \cdot e^{-x^2} + C\right) \cdot e^{x^2}$
$\quad = C \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2}(1+x^2)$

**Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung**

Betrachte Differentialgleichung vom Typ

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = b(x)$$

mit $a_i, b: I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall.

$b(x) = 0$: homogene Gleichung
$b(x) \not\equiv 0$: inhomogene Gleichung

Man kann zeigen: Lösungen von $y(x)$ sind auf ganz $I$ definiert.

Sei $L_H$ die Menge aller Lösungen der homogenen Gleichung (also $b(x) = 0$).

$$(H)\ \ y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) \cdot y = 0$$

**13.12. Satz**

$L_H$ ist Vektorraum der Dimension $n$.

**Beweis**:

Seien $y_1, y_2: I \to \mathbb{R}$ Lösungen

$$\begin{aligned} & (y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) \cdot (y_1 + x_2) \\ &= \underbrace{y_1^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y_1^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) \cdot y_1}_{0} + \underbrace{y_2^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y_2^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) \cdot y_2}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ebenso:

$$y \in L_H \Rightarrow \lambda y \in L_H$$

Dies zeigt: $L_H$ ist Vektorraum.

Sei nun $x_0 \in I$ beliebig aber fest.

Zu jedem $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Lösung von $(H)$ mit

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{gathered}$$

Betrachte Abbildung

$$\Psi: \mathbb{R}^n \to L_H$$
$$(y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto \text{diese Lösung } y(x)$$

dann folgt:

(i) $\Psi$ ist linear
(ii) $\Psi$ ist injektiv: Verschiedene Anfangsbedingungen liefern verschiedene Lösungen
(iii) $\Psi$ ist surjektiv:
Ist $y(x) \in L_H$: Wähle $\left(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\right)$ als Anfangsbedingung, $\Psi$ liefert dann $y(x)$ zurück.

Somit
(iv) $\Psi$ ist Vektorraum-Isomorphismus (also bijektiv) $\Rightarrow \dim L_H = \dim \mathbb{R}^n = n$

■

→ Um alle Lösungen von $(H)$ zu kennen, muss man also nur $n$ linear unabhängige Lösungen kennen, d.h. eine Basis von $L_H$

→ Lösungsbasis

Für inhomogene Gleichungen gilt dann:

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichungen
=
spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung
+
allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ($L_H$)

**Lineare Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = b(x)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$.

Betrachte homogene Gleichung: $b(x) = 0$

Ansatz: Wähle

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\Rightarrow y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}&\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \dots + a_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_0 \cdot e^{\lambda x}\\ &= \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0)}_{\text{Polynom auf } \lambda \to \text{Bestimme Nullstellen}} \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0}\end{aligned}$$

Also

**13.13. Satz**

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

ist genau dann Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot y = 0,$$

wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

ist.

**13.14. Bemerkungen**

(i) Gibt es $n$ einfache Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bilden

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

eine Lösungsbasis.
Ist $\lambda$ eine Nullstelle der Vielfachheit $k$, so sind

$$e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, x^2 \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda x}$$

$k$ linear unabhängige Lösungen → bilden insgesamt Lösungsbasis.

(ii) Sei $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ komplexe Nullstelle

⇒ $\bar{\lambda} = a - ib$ ist auch Nullstelle.

⇒ Linearkombination von $e^{\lambda x}$ und $e^{\bar{\lambda} x}$ sind auch Lösungen:

$$\begin{aligned}e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x} &= e^{ax} \cdot e^{ibx} + e^{ax} \cdot e^{-ibx} = e^{ax} \cdot \left(e^{ibx} + e^{-ibx}\right)\\ &= 2 \cdot e^{ax} \cdot \operatorname{Re} e^{ibx} = 2 \cdot e^{ax} \cdot \cos(bx)\end{aligned}$$

$$e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x} = \dots = 2i \cdot e^{ax} \cdot \sin(bx)$$

$\Rightarrow$ Zu konjugiert komplexem Nullstellenpaar $a \pm ib$ gehören

$$e^{ax} \cdot \cos(bx), e^{ax} \cdot \sin(bx)$$

als linear unabhängige Lösungen.

**13.15. Beispiele**

(i) $y'' = y$

d.h. $y'' - y = 0$, charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - \lambda^0 = \lambda^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow e^{1\cdot x} = e^x,\ e^{-1\cdot x} = e^{-x}$ Lösungsbasis

(ii) $y'' = -y$

d.h. $y'' + y = 0$, charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow e^{0\cdot x} \cdot \cos(1 \cdot x) = \cos x, e^{0\cdot x} \cdot \sin(1x) = \sin x$ Lösungsbasis

(iii) Federpendel mit Dämpfung

$$y'' = -\underbrace{\frac{D}{m}}_{=:\omega_0^2} \cdot y - \underbrace{k \cdot y'}_{\text{Reibungskraft}}$$

$k = 0$: Keine Dämpfung

$$y'' + \omega_0^2 \cdot y = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega_0$$

Lösungsbasis $\cos(\omega_0 \cdot x), \sin(\omega_0 \cdot x)$

$k > 0$:

$$y'' + k \cdot y' + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + k \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2 - 4 \cdot \omega_0^2}}{2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega_0^2}$$

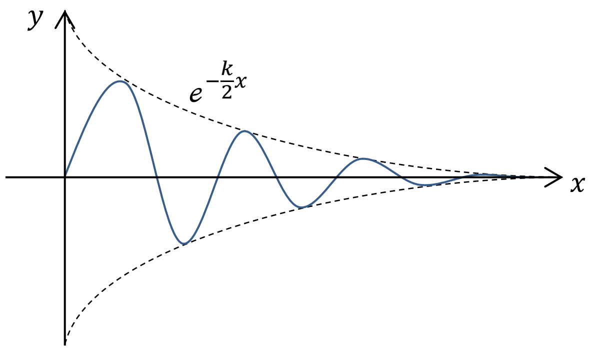
1. Fall: $0 < k < 2\omega_0$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{4} - \omega_0 < 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm i\omega \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k^2}{4}}$$

Lösungsbasis

$$e^{-\frac{k}{2}x} \cdot \cos(\omega x)\,, e^{-\frac{k}{2}x} \cdot \sin(\omega x)$$




2. Fall: $k \geq 2\omega_0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - \omega_0^2} \text{ zwei reelle negative Nullstellen}$$