

Aufgaben zur Vorlesung
Vertiefung Mathematik I für NWI
Sommersemester 2007

D. Frettlöh
S. Selle

Abgabe: bis Mittwoch, 11.4.2007, 8:15 Uhr

Aufgabe 1:

Bei der Radiokohlenstoffmethode zur Altersbestimmung wird das Verhältnis des radioaktiven Kohlenstoffisotops C^{14} zum stabilen Kohlenstoff C^{12} bestimmt. In der Atmosphäre besteht ein Gleichgewicht zwischen diesen beiden Elementen, und somit auch in lebenden Organismen (z. B. in einem Baum). Stirbt der Organismus, so zerfällt das Isotop C^{14} mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Aus dem geänderten Verhältnis der beiden Isotope kann der Todeszeitpunkt des Organismus berechnet werden (das Alter des Holzes).

Es gibt in einer Burg in Winchester einen großen runden Tisch (round table). Viele glauben, dass dieser "the round table" von König Arthur aus der Zeit von 500 n. Chr. ist. Falls der Tisch aus dieser Zeit stammt, wieviel Prozent von dem originalen Isotop C^{14} würde heute übrig sein, wieviel wäre 1976 übrig gewesen? Im Jahr 1976 wurde mit der Radiocarbontechnik festgestellt, dass der Tisch einen C^{14} Gehalt zwischen 91% und 92% des Wertes aufweist, der in lebenden Organismen vorkommt. In welchem Zeitraum ist der Tisch entstanden?

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung vorgestellten Ergebnisse im Beispiel „radioaktiver Zerfall“.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichung

$$u'(t) = 3u(t)(1 - u(t)), \quad t \in [0, 1], \quad u \in [-1, 2].$$

Zeichnen Sie Bereiche ein, in denen waagerechte Pfeile auftreten.

Skizzieren Sie die Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $u(0) = 2$ (ohne diese zu berechnen).

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Zeichnen Sie für das autonome System

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(t) - u_2(t), \\ u_2'(t) &= 2u_1(t)^2 u_2(t), \quad u_1, u_2 \in [-1, 1] \end{aligned}$$

die Projektion des Richtungsfeldes entlang der t -Achse auf die (u_1, u_2) -Ebene.

Markieren Sie die Bereiche, in denen senkrechte bzw. waagerechte Pfeile auftreten.

Skizzieren Sie die Projektion der Lösung zum Anfangswert $(u_1(2), u_2(2)) = (0, 5, 0, 5)$ (ohne diese zu berechnen).

(6 Punkte)