

Aufgaben zur Vorlesung
Vertiefung Mathematik I für NWI
Sommersemester 2007

D. Frettlöh
S. Selle

Abgabe: Mittwoch, 09.05.2007, 8:30 Uhr

Übungsgruppen: Di. 12-14, Di. 14-16, Postfach: UV5-1829 (Thomas Regier)
Di. 10-12, Postfach: UV5-1822 (Sabrina Selle)

Aufgabe 13:

Berechnen Sie die Gleichgewichte der folgenden Differentialgleichungen. Erstellen Sie das jeweilige Phasenbild in einem geeigneten Bereich.

(a) $u' = (-u + 2)(1 + u) \sin(u)$,

(b) $u' = u^2 - 3u$,

(c) $u' = u^2 - u^4$,

(d) $u' = u - \sin(u)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 14:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u' = \cos(u) - c,$$

mit einer Konstanten $c < 0$.

- Berechnen Sie alle Gleichgewichte, wobei die Fälle $c < -1$, $c = -1$ und $-1 < c < 0$ zu unterscheiden sind.
- Untersuchen Sie analytisch die Stabilität dieser Gleichgewichte und skizzieren Sie das jeweilige Phasenbild im Intervall $[0, 4\pi]$.

(6 Punkte)

Aufgabe 15:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die in $I \times \mathbb{R}^n$ global einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten $L > 0$ genügt. Weiter seien $\phi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $u' = f(t, u)$. Sei $t_0 \in I$ und $\delta := \|\phi(t_0) - \psi(t_0)\|$. Man zeige mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \delta e^{L|x-t_0|} \quad \text{für alle } x \in I.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für die Picard-Iterierten ϕ_k, ψ_k , $k \in \mathbb{N}$ der beiden Lösungen ϕ, ψ die folgende Abschätzung:

$$\|\phi_k(t) - \psi_k(t)\| \leq \delta \sum_{j=0}^k \frac{(L|x-t_0|)^j}{j!}.$$

(6 Punkte)