

**Auffrischkurs zu
“Mathematik für Naturwissenschaften I”**

Skript Wintersemester 2025/26

Dr Dirk Frettlöh
Technische Fakultät
Universität Bielefeld

2. März 2026

Inhaltsverzeichnis

I	Analysis	4
1	Elementares, vollständige Induktion	4
1.1	Der Binomialkoeffizient	5
2	Grenzwerte von Folgen	6
2.1	Potenzgesetze	8
3	Konvergenz von Reihen und Potenzreihen	9
3.1	Unendliche Reihen	9
4	Grenzwerte von Funktionen	13
4.1	Stetigkeit	13
4.2	Die Regel von l'Hospital	15
5	Differenzieren (Ableiten)	17
II	Lineare Algebra	21
6	Intro	21
6.1	Vektoren	21
6.2	Matrizen	22
7	Lineare Gleichungssysteme	25
7.1	Berechnen der Lösung(en) eines LGS	26
8	Untervektorräume (UVR)	29
9	Basis, lineare Hülle, Dimension, Inverse Matrizen	30
9.1	Basis, lineare Hülle und Dimension	30
9.2	Rang, Kern und Bild	33
9.3	Inverse Matrizen	34
III	Diskrete Mathematik	38
10	Injektiv, surjektiv, bijektiv	38
11	Zählprinzipien	38
12	Teilbarkeit	38

Vorab:

Dieses Skript entstand im Rahmen von Auffrischkursen zur Vorlesung “Mathematik für Naturwissenschaften I” jeweils ab dem Wintersemester 2012/2013 an der Uni Bielefeld. Diese Veranstaltung dient dazu, die Studierenden auf die Nachklausur vorzubereiten.

An den Leser: Dieser Kurs (“Auffrischkurs Mathematik für Naturwissenschaften I”) ist ein Zusatzangebot zur Vorlesung “Mathematik für Informatik und Naturwissenschaften I”. Der Kurs dient dazu, die Studierenden auf die Nachklausur vorzubereiten, die Teilnahme ist freiwillig.

Es wird Wert gelegt auf das Einüben der Rechentechniken. Daher ist dies ausdrücklich keine Ersatzvorlesung. Im Kurs werden immer wieder Gelegenheiten gegeben, konkrete Aufgaben selber zu rechnen. Das Beherrschen der Rechentechniken dient auch dem tieferen Verständnis des Themas, denn Mathematik betreiben hat mehr mit Können zu tun als mit Wissen.

Dieser Text enthält reichlich Beispiellösungen, und viele Übungsaufgaben, aber nicht ihre Lösungen. Das würde (a) den Umfang sprengen, (b) dem Sinn von Übungsaufgaben zuwider laufen. Viele der Lösungen (u.U. auch die Rechenwege) kann man bei Wolfram Alpha erfragen, oder die Lösungen in Mathematica, oder Maple... oder auch bei mir (Email, Sprechstunde). Viele der Rechenwege werden an den Beispiellösungen illustriert.

Dieses Skript ändert sich mit den Jahren. Einige Stellen sind in [blau](#) gesetzt; das ist Zusatzmaterial, das im (diesjährigen) Kurs nicht behandelt wird.

Teil I

Analysis

Der Analyseteil der Veranstaltung umfasst grob fünf Themen: Grundlagen und vollständige Induktion, Grenzwerte von Folgen und Funktionen, Konvergenz von Reihen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit.

1 Elementares, vollständige Induktion

Eine zentrale Rolle in der Mathematik nimmt der Beweis ein. Ein Beweis ist eine logisch legale Herleitung eines Resultats (eines Satzes, einer Formel, ...) aus den grundlegenden Axiomen, oder aus den bereits bekannten Resultaten. Beispiele eines solchen Resultats sind etwa

- Eine Zahl der Form $n^3 - n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$) ist immer durch 6 teilbar
- Für jede ganze Zahl $n \geq 5$ gilt $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- Für jede ganze Zahl $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.

Eine der einfacheren Beweismethoden ist die **vollständige Induktion**. Vollständige Induktion ist oft die Methode der Wahl, wenn es gilt, eine Aussage der Form “für jede natürliche Zahl gilt ...” zu beweisen. Gegeben ist also eine Aussage in Abhängigkeit von n . Nennen wir diese $A(n)$. Im ersten Beispiel oben ist also $A(n)$ die Aussage

$$n^3 - n \text{ ist durch 6 teilbar.}$$

$A(3)$ ist also die Aussage “ $3^3 - 3$ ist durch 6 teilbar”, und weil $3^3 - 3 = 27 - 3 = 24$ durch 6 teilbar ist, stimmt $A(3)$.

Die vollständige Induktion geht in zwei Schritten vor:

- 1) *Der Induktionsanfang (IA)*. Man beweist, dass $A(1)$ gilt.
- 2) *Der Induktionsschritt (IS)*. Man beweist: falls für ein $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr ist, dann auch die Aussage $A(n+1)$.

Im Induktionsschritt beweist man also: “Ist die Aussage für eine Zahl n wahr, dann ist sie auch für den nächsten Wert, nämlich $n+1$, wahr”. Und zwar für ein **beliebiges** $n \in \mathbb{N}$. Wegen IA ist die Aussage für $n=1$ wahr. Wegen IS ist sie dann auch für $n=2$ wahr. Wegen IS ist sie dann auch für $n=3$ wahr usw.

Der Startwert muss nicht unbedingt $n=1$ sein, es kann auch 0 sein, oder 5, oder...

Beispiel 1.1. Zu zeigen: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar für jedes $n \in \mathbb{N}$.

IA: für $n=1$: $n^3 - n = 0 - 0 = 0$ ist durch 6 teilbar (?)

Vielleicht besser auch $n=2$ checken: $n^3 - n = 8 - 2 = 6$ ist durch 6 teilbar: WAHR.

IS: Sei $A(n)$ wahr. Zu zeigen: $A(n+1)$ ist wahr. Also zu zeigen: $(n+1)^3 - (n+1)$ ist durch 6 teilbar. Es ist

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n = n^3 - n + 3n(n+1).$$

Nach unserer Voraussetzung ($A(n)$ ist wahr) ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar. Was ist mit $3n(n+1)$? Die Zahl $n(n+1)$ ist gerade, denn egal wie n aussieht, einer der beiden Faktoren (n oder $n+1$) ist eine gerade Zahl. Also ist $3n(n+1)$ sowohl gerade als auch durch 3 teilbar. Insgesamt ist $3n(n+1)$ also durch 6 teilbar. Dann ist die Summe von $n^3 - n$ und $3n(n+1)$ auch durch 6 teilbar. Fertig.

Bevor wir uns weiteren Beispielen widmen, zunächst ein weiterer Begriff.

$\binom{4}{1} = 4$, oder $\binom{5}{2} = 10$. Allgemeiner gilt die Formel:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad (1.1)$$

Damit kann man zeigen (oder man kann am pascalschen Dreieck sehen)

$$1. \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad 2. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad 3. \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

-) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{k=1}^n 3k-2 = \frac{1}{2}n(3n-1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

c) $\sum_{k=1}^n f_k = f_{n+2} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei sind die f_n die Fibonaccizahlen: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$.

d) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

e) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

f) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

g) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

h) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

i) $1 + na \leq (1+a)^n$, für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $a \geq 0$.

j) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$.

Extrem viele weitere Aufgaben zu vollständiger Induktion samt Lösungen finden sich hier:

<https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf>

2 Grenzwerte von Folgen

Betrachten wir ein paar Beispiele. Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, was sind die Grenzwerte?

$$a_n: \quad 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$b_n: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$$

$$c_n: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$$

$$d_n: \quad \frac{4}{1}, \frac{9}{4}, \frac{16}{9}, \frac{25}{16}, \frac{36}{25}, \frac{49}{36}, \frac{64}{49}, \dots$$

(Publikum fragen).

Die obigen Beispiele illustrieren das Konzept des Grenzwerts. Jeder kann eine intuitive Idee davon bekommen. Die formale Definition ist etwas tricksig. Wir verweisen auf die Vorlesung oder andere Quellen.

Bei Folgen der Form “Polynom durch anderes Polynom” kann man Konvergenz und Grenzwert leicht sehen (wie?). Aber wie schreiben wir es schön auf? Der Trick ist: **Kürzen mit der höchsten Potenz von n im Nenner.**

Beispiel 2.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = \frac{1+0+0}{1} = 1.$$

Hier haben wir beim zweiten “=” mit n^2 gekürzt.

Beispiel 2.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n + 3}{3n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{2+0+0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

Hier haben wir beim ersten “=” mit n^3 gekürzt.

Beispiel 2.3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{0+0},$$

Der Nenner wird 0, der Zähler ist 1, salopp: 1 durch 0 gleich unendlich. Also ist die Folge divergent. Hier haben wir beim zweiten “=” mit n^2 gekürzt. Wegen der Divergenz ist es vielleicht schöner, nur mit n zu kürzen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 4}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Der Zähler geht gegen unendlich, der Nenner gegen 1, also divergiert die Folge.

Systematischer berechnet man Grenzwerte von Folgen so, indem man mit den folgenden Regeln komplizierte Ausdrücke auf einfache zurückführt.

Es gilt

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$, (für alle $c \in \mathbb{R}$)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ (für alle $k \in \mathbb{N}$),
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0$ (für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 1$).

Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, so gilt:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$ (für alle $c \in \mathbb{R}$)
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$ (dann ist $b_n \neq 0$ ab einem gewissen n)

Schreibweise: Statt $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ schreibt man auch etwa $2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$ ($n \rightarrow \infty$).

Beispiel 2.4. Grenzwert von $a_n = n - \frac{2n^2+1}{2n+3}$ bestimmen.

$$n - \frac{2n^2+1}{2n+3} = \frac{n(2n+3)}{2n+3} - \frac{2n^2+1}{2n+3} = \frac{2n^2+3n-2n^2-1}{2n+3} = \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \rightarrow \frac{3-0}{2+0} = \frac{3}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Aufgabe 2. Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, was ist der Grenzwert?

a) $\frac{2n+1}{2n-1}$

b) $\frac{(n+2)^2}{n-1}$

c) $\frac{(2n+1)^3}{n^3-1}$

d) $\frac{(\sqrt{\pi n}-1)(\sqrt{\pi n}+1)}{(2n+1)^2}$

e) $\frac{6n^3-3n^2+\sin(n^3-n+2)}{2n^3-4n^2+5n+1}$

f) $\frac{\sqrt{nn^4+1}}{n^4+1}$

g) $\frac{2n^3+n^2+\sqrt{n}+1}{5n^3-1}$

h) $\frac{n^2+1001n^{3/2}+5n-1}{n^2-n+1}$

i) $n^2 - \frac{n^4+2n}{n^2+1}$

j) $n + \frac{n^3+1}{2n^2-n}$

k) $(2n + \frac{1}{n})(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$

l) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

2.1 Potenzgesetze

Beim Umgang mit Grenzwerten sind die folgenden Regeln oft nützlich.

Für $a, d \in \mathbb{R}, b, c \in \mathbb{R}^+$ gelten die folgenden **Potenzregeln**:

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

2. $a^0 = 1$

3. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

4. $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

5. $(a \cdot d)^c = a^c \cdot d^c$

Beispiel 2.5. • $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ (Regel 4)

• $2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$ (Regel 1)

• Falls $a \neq 0$: $a^0 = a^{b-b} = a^b a^{-b} = \frac{a^b}{a^b} = 1$. (d.h. Regel 2 folgt aus Regeln 1 und 4)

Einige konkrete Grenzwerte, die man kennen sollte:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \infty & \text{falls } |a| > 1 \\ 0 & \text{falls } |a| < 1 \end{cases}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \infty$ für $a > 0$ (divergent)

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$ (konvergent)

Aufgabe 3. Konvergieren die folgenden Folgen? Wenn ja, was ist der Grenzwert?

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{n+\sqrt{n}}{2n-\sqrt{n}}$ | h) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ |
| b) $\frac{n^2+n+\sqrt{n}}{5n^2-2n+1}$ | i) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ |
| c) $(-1)^n \frac{1}{n^3} (12n^2 + 100n)$ | j) $\left(\frac{1+n}{n}\right)^n$ |
| d) $\frac{4n+2}{\sqrt{4n^2+2}}$ | k) $\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n$ |
| e) $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$ | l) $\frac{n}{\sqrt[5]{n^3+n^2}}$ |
| f*) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}$ | m) $\frac{\sqrt{n\sqrt{n}}}{\sqrt{\sqrt{16n^3}}}$ |
| g*) $n - \frac{n^2+1}{\sqrt{n^2+1}}$ | n) $\frac{1}{\binom{2n}{n}}$ |

3 Konvergenz von Reihen und Potenzreihen

3.1 Unendliche Reihen

Betrachten wir ein paar Beispiele. Konvergieren die folgenden Reihen? Wenn ja, was sind ihre Grenzwerte?

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 1 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = ? \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ? \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots = ? \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = ? \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \dots = ? \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = ? \end{aligned}$$

(Publikum fragen).

Definition 3.1. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum_{n=2}^{\infty} a_n \dots$) heißt *konvergent*, wenn die Folge $S_N := \sum_{n=0}^N a_n$ konvergent ist. Dann schreiben wir auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$. Ansonsten heißt die Reihe *divergent*. Eine Reihe heißt *absolut konvergent*, wenn sogar $\sum |a_n|$ konvergent ist. Eine Reihe heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist. Eine Reihe heißt *divergent gegen $+\infty$* , falls sie gegen $+\infty$ divergiert (diese letzte Definition ist fahrlässig ungenau, für die genaue Def. siehe Vorlesung).

Beispiel 3.2. Ist Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent, absolut konvergent, divergent oder bestimmt divergent gegen $\pm\infty$?

Die Reihe ist konvergent (s.u., Leibnizkriterium, denn $\frac{1}{n}$ ist eine monotone Nullfolge), aber nicht absolut konvergent. Denn:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

und das ist die harmonische Reihe, die ist divergent (s.u., Kasten “Einige bekannte Reihen”).

Weil die Reihe konvergent ist, ist sie nicht divergent.

Warum ist “absolut konvergent” wichtig?

Beispiel 3.3. Angenommen, wir wollen alle Elemente dieser unendlichen Tabelle aufsummieren:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & \cdots \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Summieren wir entlang der Zeilen, erhalten wir immer “1 – 1” (s. Bsp. oben; oder Kasten unten, geometrische Reihe). Jede Zeile ergibt also 0, und alle Zeilen aufsummiert demnach auch 0. Antwort: Summe aller Elemente der Tabelle ist 0.

Summieren wir dagegen die Spalten, so erhalten wir (von links nach rechts) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$. Summieren wir dann alle Spalten auf, so erhalten wir insgesamt 2. Antwort: Summe aller Elemente der Tabelle ist 2.

Wo liegt der Fehler? Antwort: tief verborgen. Die Antwort ist, dass bei einer konvergenten Reihe, die positive und negative Summanden hat, der Grenzwert von der Summationsreihenfolge abhängt. Dagegen gilt: **Bei absolut konvergenten Reihen bleibt der Grenzwert gleich, egal wie wir die Summanden vertauschen.** Das ist ein Grund, warum absolut konvergent ein wichtiger Begriff ist.

Fakt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

In Worten ausgedrückt: wenn eine Reihe konvergiert, dann muss ihre unterliegende Folge eine Nullfolge sein.

Frage: Gilt das auch umgekehrt? Nein, z.B. nicht für die dritte im obigen Beispiel. Denn:

Einige bekannte Reihen:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergent (“harmonische Reihe”).
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ konvergent für $q > 1$, nicht konvergent für $q \leq 1$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, d.h. konvergent für $|x| < 1$, aber nicht konvergent für $|x| \geq 1$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x$ konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ (“Exponentialreihe”).

Kriterien zum Prüfen von Konvergenz: (Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$)

1. **Quotientenkriterium:**

$$\text{Gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a, \text{ dann ist } \begin{cases} \sum_{n=k}^{\infty} a_n & \text{absolut konvergent, falls } |a| < 1 \\ \sum_{n=k}^{\infty} a_n & \text{divergent, falls } |a| > 1 \\ \text{hiermit keine Aussage möglich, falls } |a| = 1 \end{cases}$$

2. **Wurzelkriterium:**

$$\text{Gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \text{ dann ist } \begin{cases} \sum_{n=k}^{\infty} a_n & \text{absolut konvergent, falls } |a| < 1 \\ \sum_{n=k}^{\infty} a_n & \text{divergent, falls } |a| > 1 \\ \text{hiermit keine Aussage möglich, falls } |a| = 1 \end{cases}$$

3. **Leibnizkriterium:** Ist die Reihe von der Form $\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n a_n$, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und ist a_n monoton fallend, so ist die Reihe konvergent.

Achtung: Leibniz sagt nichts über absolute Konvergenz. Fragt die Aufgabe “ist die Reihe absolut konvergent” muss das anders geprüft werden.

Indirekte Kriterien zum Prüfen von Konvergenz: (Reihe $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$)

1. **Nullfolgenkriterium:** Ist a_n keine Nullfolge, so ist $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ divergent.

2. **Majorantenkriterium:** Ist $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und ist $\sum_{n \rightarrow \infty} b_n$ konvergent, so ist auch $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent.

3. **Minorantenkriterium:** Ist $a_n \geq b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und ist $\sum_{n \rightarrow \infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ divergent.

Normalerweise ist es oft mit Standardmitteln möglich, zu entscheiden, ob eine gegebene Reihe (absolut) konvergent ist oder nicht. Dagegen ist es oft viel schwieriger, den genauen Grenzwert anzugeben (vgl. letzte Reihe im einführenden Beispiel dieses Kapitels). Wenn die Aufgabe lautet “berechnen sie den Grenzwert der Reihe...” dann braucht man meist nur die Infos im Kasten „einige bekannte Reihen“ oben.

Beispiel 3.4. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^3+1}$ konvergent, absolut konvergent oder divergent?

Betrachte $b_n := \frac{1}{5n^3}$. Es ist $a_n := \frac{1}{5n^3+1} \leq \frac{1}{5n^3} = b_n$, und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist konvergent, siehe Kasten S. 10. Also ist wegen des Majorantenkriteriums auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^3+1}$ absolut konvergent. Damit auch konvergent, und nicht divergent.

Beispiel 3.5. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+100}{2n+5} \right)^n$ konvergent, absolut konvergent oder divergent??

Mit Wurzelkriterium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+100}{2n+5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+100}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1,$$

also ist die Reihe absolut konvergent. Damit auch konvergent, und nicht divergent.

Beispiel 3.6. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!}$ konvergent, absolut konvergent, divergent oder bestimmt divergent gegen $\pm\infty$?

Mit Wurzelkriterium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Der Grenzwert im Nenner ist knifflig. Das können wir mit unseren bisherigen Mitteln nicht (das geht mit der Stirlingschen Formel). Also probieren wir was anderes:

Mit Quotientenkriterium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2(n+1))^{n+1} n!}{(n+1)!(2n)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)^{n+1}}{(n+1) 2^n n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2e > 1$$

also Reihe divergent. Da alle Summanden der Reihe positiv sind, ist sie divergent gegen $+\infty$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden Reihen. (Obacht: hier brauchen Sie nur die Infos aus dem Kasten „einige bekannte Reihen“ oben.)

- | | |
|--|---|
| a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n$ | e) $\sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{5}{10^{n-1}}$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{5} \right)^n$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ |
| c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ | g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ |
| d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4^{2n}}$ | h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{n!}$ |

Aufgabe 5. Sind die folgenden Reihen konvergent, absolut konvergent, divergent oder bestimmt divergent gegen $\pm\infty$? (Ab jetzt brauchen Sie alle Kriterien.)

- | | |
|--|--|
| a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ | f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2-1}$ |
| b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{15}{n} \right)^n$ | g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^n}{(n!)^2}$ |
| c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(n!)^2}$ | h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ |
| d) $\sum_{n=3}^{\infty} n e^{-n}$ | i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+2}}$ |
| e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ | l) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^{n+1}$ |

Aufgabe 6. Sind die folgenden Reihen konvergent, absolut konvergent, divergent oder bestimmt divergent gegen $\pm\infty$?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+200}{2n+7}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\right)^{n+1}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+3n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n!} (2n)^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n n}$

i*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\cos(n)}$

j*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{\ln(n)}$

4 Grenzwerte von Funktionen

Später möchten wir — im Rahmen von Ableitungen von Funktionen — auch Grenzwerte für $n \rightarrow 0$ bzw. $x \rightarrow 0$ oder für $x \rightarrow 2$ oder $x \rightarrow -\infty$ betrachten (nicht nur für $x \rightarrow \infty$). Und zwar für Funktionen statt für Folgen.

Beispiel 4.1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Oder auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{0}{0+1} = 0,$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5}.$$

Fakt: Bei stetigen Funktionen f gilt: Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

4.1 Stetigkeit

In der Vorlesung wurde viel Arbeit investiert, um Stetigkeit von Funktionen sauber zu erklären. Nun, da das geschehen ist, kann man fast immer sehr einfach argumentieren, ob und wo eine gegebene Funktion stetig ist (oder ob und wo sie es nicht ist).

Funktionen sind nicht stetig bei

- Definitionslücken (teilen durch 0, Wurzel oder Logarithmus eines negativen Ausdrucks)
- Sprungstellen (sieht man meist leicht an der Definition der Funktion)

Funktionen sind stetig...

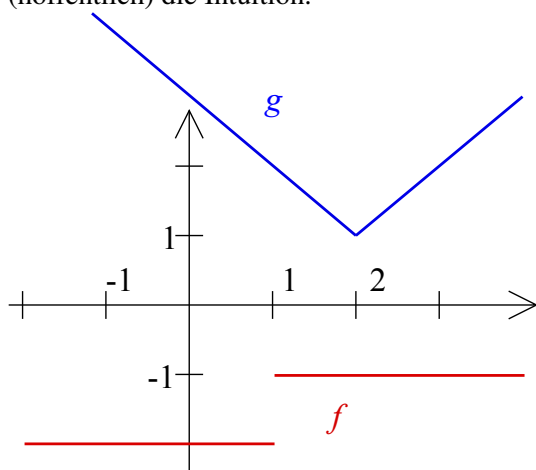
- wenn sie Polynome sind (z.B. $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = 15x^{12} + 3x^7 + 0,5x^3 - 1$, 1 oder auch $f(x) = 17$)
- wenn sie differenzierbar sind (also z.B. e^x , $\sin(x)$, ...)

- wenn sie Summe $(f(x) + g(x))$, Produkt $(f(x) \cdot g(x))$ oder Verkettung $(f(g(x)))$ von stetigen Funktionen sind
- wenn sie Quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ stetiger Funktionen sind, zumindest da, wo $g(x) \neq 0$.

Daher ist $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ meistens einfach $f(a)$ (einfach a einsetzen).

Dennoch hatte Herr Bux viele Aufgaben zu Stetigkeit gestellt. Also besprechen wir das in diesem Kurs. Dazu ist es unerlässlich, den **linksseitigen Grenzwert** und den **rechtsseitigen Grenzwert** zu betrachten.

Es heißt $\lim_{x \rightarrow a^-}$ dass x von unten (also im Graphen: von links) gegen a geht, und $\lim_{x \rightarrow a^+}$ dass x von oben (also im Graphen: von rechts) gegen a geht. Das formal zu erklären ist aufwändig. Uns reicht hier (hoffentlich) die Intuition.



Im Bild sind die Funktionen f und g zu sehen. Es ist

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases},$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{für } x < 2 \\ x - 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Die einzigen interessanten Punkte sind ja 1 (für f) und 2 für g , sonst sind beide überall stetig (weil die Funktionen -2 , $-x + 3$, usw. stetig sind). f ist bei 1 nicht stetig: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$, aber $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$.

Dagegen ist g bei 2 stetig, denn $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1$, und $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$.

Anderes Beispiel:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

gegeben. Ist die Frage: “ist f stetig”? Dann lautet die Antwort:

Für $x \neq 1$ ist f stetig, weil es ein Polynom ist. Die einzig spannende Frage ist, ob f auch bei $x = 1$ stetig ist. Also ob dort eine Sprungstelle ist oder nicht. Dazu müssen wir den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert mit $f(1)$ vergleichen.

Es ist $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + 2 = 1$. Und es ist $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 = 1$, sowie $f(1) = -1 + 2 = 1$. Alle Werte sind gleich, also ist f dort stetig.

Aufgabe 7. Sind die folgenden Funktionen stetig?

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \begin{cases} x & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \\
 \text{(b) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \begin{cases} x^3 - 6 & \text{für } x \leq 2 \\ x^2 - x + 1 & \text{für } x > 2 \end{cases} \\
 \text{(c) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \leq 0 \\ e^x & \text{für } x > 0 \end{cases} \\
 \text{(d) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \begin{cases} \cos(x) - 1 & \text{für } x > 0 \\ \sin(x) & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases} \\
 \text{(e) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases} \\
 \text{(f) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases} \\
 \text{(g) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= |x - 2|.
 \end{aligned}$$

4.2 Die Regel von l'Hospital

Interessant wird $\lim_{x \rightarrow a}$ vor allem für $a = \infty$, $a = -\infty$ (dann geht es aber wie bei Grenzwerten von Folgen), oder wenn beim Einsetzen sowas wie $\frac{0}{0}$ rauskommt, oder $\frac{\infty}{\infty}$, oder $0 \cdot \infty$.

Beispiel 4.2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^3-8} = \frac{4-4}{8-8} = \frac{0}{0} = ??$$

In solchen Fällen hilft die Regel von l'Hospital.

Regel von l'Hospital: Ist $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, sind g und h differenzierbar, und gilt $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$, dann ist

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Beispiel 4.3. Im Beispiel von oben erhalten wir so

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^3-8} \stackrel{\ell'H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{6}.$$

Manchmal muss man die Regel auch wiederholt anwenden, wenn nach der ersten Anwendung immer noch " $\frac{0}{0}$ " rauskommt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \stackrel{\ell'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \stackrel{\ell'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Strenggenommen muss erst der Begriff der Differenzierbarkeit und der Ableitungsfunktion erklärt werden. Dies geschieht in Abschnitt 5.

Die Lösung der folgenden Aufgaben erfordert verschiedene Techniken: l'Hospital, geschickt kürzen, abschätzen, umformen....

Aufgabe 8. Bestimmen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{2x^3+54}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+4x^2+3x-8}{3x^4+4x^3-30x^2+36x-13}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-100(\sin(x))^3}{3x^4+10^7x^3-13}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}-2e^x}{e^{-x}+e^x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x)x$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^x+e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x+e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{17}-1}{x-1}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x)$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x+e^{\frac{1}{x^2}}}$

Aufgabe 9. Mehr davon. Dabei ist $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cosh(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(2x^3)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2 \ln(2x^3)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x)-1}{4x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(2x)-1}{\cos(x)-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(1-x)$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x)-1}{\sinh(x)}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x))^2-1}{\sin(x)}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{\sin(x)}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{\tan(7x)}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

n*) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

Wir haben nun ein paar uneigentliche Grenzwerte gesehen. Und Grenzwerte erlauben einem nun, eigentlich sinnlosen Ausdrücken wie $\frac{1}{0}$ oder $\frac{1}{\infty}$ usw. Sinn zu geben. Eine Übersicht:

Falls $\lim_{x \rightarrow \infty} = \dots$

- „ $\frac{1}{0}$ “, dann ist es immer ∞ . (Obacht, hier und im Folgenden: je nach Vorzeichen auch $-\infty$).
- „ $\frac{0}{1}$ “, dann ist es immer 0.
- „ $\frac{1}{\infty}$ “, dann ist es immer 0.
- „ $\frac{\infty}{1}$ “, dann ist es immer ∞ .
- „ $\frac{\infty}{0}$ “, dann ist es immer ∞ .
- „ $\frac{0}{\infty}$ “, dann ist es immer 0.
- „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, dann kann es alles sein, 0 oder ∞ oder 17. Das ist fast immer ein Fall für l'Hospital.
- „ $\frac{0}{0}$ “, genauso wie „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.
- „ $0 \cdot \infty$ “, kann alles sein. Oft klappt: umformen zu „ $\frac{0}{0}$ “, oder zu „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, und dann l'Hospital.

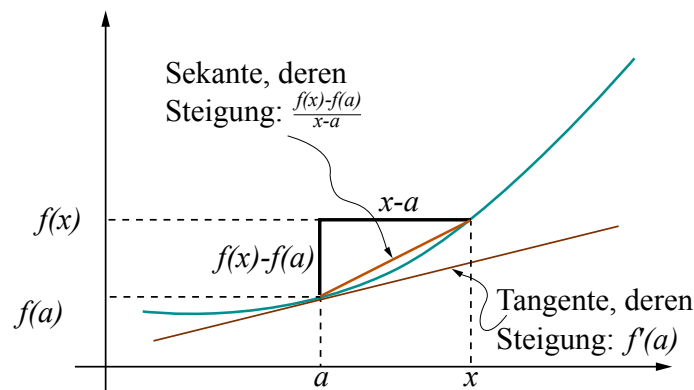
5 Differenzieren (Ableiten)

Die Ableitung einer Funktion ist formal so definiert:

Definition 5.1. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}$) heißt **differenzierbar** in a (kurz: **diffbar** in a), falls $f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert.

f heißt dann differenzierbar auf $I \subseteq D$, falls f diff-bar ist für alle $a \in I$. Dann heißt f' **Ableitung** von f .

Besagte Menge I ist typischerweise ein Intervall. Die Idee, die zu dieser Definition führt, ist, dass $f'(a)$ die Steigung des Graphen von f im Punkt a ist. Denn:



Die Steigung der Tangente ist das, was wir wissen wollen. Die können wir nicht direkt ablesen. Stattdessen können wir diese Steigung näherungsweise berechnen als die Steigung der langen Kante des Dreiecks (in der Zeichnung “Sekante”): Die Steigung ist “Höhe durch Breite” (des Dreiecks), also $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Je näher x an a rückt, desto genauer wird (hoffentlich) dieser Wert an den Wert rücken, den

wir wissen wollen. Daher nehmen wir den Grenzwert von $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (für $x \rightarrow a$) als $f'(a)$.

Berechnung: Ist f gegeben, so berechnet man die Ableitung f' durch zurückführen auf einige wenige Grundfunktionen, deren Ableitung man in der “Tabelle von Ableitungsfunktionen” unten nachguckt. “Zurückführen” heißt: Durch Anwendung der folgenden Regeln.

Tabelle von Ableitungsregeln

- Konstante Funktion ableiten: $(a)' = 0$
- Faktorregel: $(a \cdot f)' = a \cdot f'$
- Summenregel: $(f \pm g)' = g' \pm h'$
- Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (da wo $g \neq 0$)
- Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- Ableitung der Umkehrfunktion: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Tabelle von Ableitungs- und Stammfunktionen

Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$ (eigentlich immer $+ C$)
$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} & \text{wenn } \alpha \neq -1 \\ \ln x & \text{wenn } \alpha = -1 \end{cases}$
s.o.	$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	s.o.
s.o.	$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$	s.o.
$\alpha e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$
$\ln(a) a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x(\ln x - 1)$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$-\sin x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	

Die Tabelle ist so zu lesen: Man suche in der Mitte die abzuleitende Funktion. Dann steht links die Ableitung. (Rechts steht die “Aufleitung”, dazu mehr im nächsten Semester.)

Hier haben wir statt $\cos(x)$ usw kurz $\cos x$ usw geschrieben. Wenn es klar ist, was gemeint ist, machen wir das ab jetzt öfter.

Beispiel 5.2. 1. $(2e^x - x^2)' = 2(e^x)' - (x^2)' = 2e^x - 2x$. (Erstes “=”: Summen- und Faktorregel, zweites “=”: Tabelle der Ableitungen)

2. $(\sqrt{x^3})' = ((x^3)^{\frac{1}{2}})' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. (Erste zwei “=”: Potenzgesetze, drittes “=”: Tabelle)

3. $\ln(x) \cdot \sin(x^2) = \frac{1}{x} \sin(x^2) + \ln(x)(\sin(x^2))' = \frac{1}{x} \sin(x^2) + \ln(x)2x \cos(x^2)$. (Erstes “=”: Produktregel, zweites “=”: Kettenregel)

4. $\left(\frac{\sqrt{x}}{\cos(x)}\right)' = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\cos(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cos(x) - x^{\frac{1}{2}}(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \quad (= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(x) + \sqrt{x} \sin(x)}{\cos^2(x)})$. (Erstes “=”: Potenzgesetze; zweites “=”: Quotientenregel, Tabelle der Ableitungen; drittes “=” etwas Vereinfachen, das ist hier nicht unbedingt nötig)

Beispiel 5.3. 1. Ableitung von $\ln(x)$. Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion f^{-1} von $f(x) = e^x$. Dafür gilt $f'(x) = e^x$. Also ist mit der Formel aus dem Kasten oben

$$(\ln(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

2. Ableitung von $\operatorname{arsinh}(x)$. Das ist die Umkehrfunktion von $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Also ist arsinh definiert als die Funktion mit der Eigenschaft $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$. (Und damit ist auch $\operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = x$.) Die Ableitung von $f(x) = \sinh(x)$ ist $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. (Das ist übrigens $\cosh(x)$.) Also ist

$$(\operatorname{arsinh}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))}.$$

Das ist zunächst nicht weiter zu vereinfachen. Mit dem folgenden **Hinweis** aber schon: Es gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Damit ist also — zumindest für $x \geq 0$ — $\cosh = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$. Damit vereinfacht sich das oben weiter zu

$$\frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sinh(\operatorname{arsinh}(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Aufgabe 10. Ermitteln Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

(c) $\sinh(x)$ (Def. s. oben)

(e) $\sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$

(g) $x^2 \cdot e^x$

(i) $a^{(x^x)}$

(k) $\sqrt{x+2} \cdot x^2 \cdot e^x \cdot \ln(x)$

(m) $\frac{e^x + \ln(x)}{\sin(x)}$

(o) $\arcsin(x)$ (Umkehrfunktion vom Sinus)

(q) $\ln(\tan(x))$ (Recall: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$)

(s) $\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$

(b) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$

(d) $\cosh(x)$

(f) $\sin(\sqrt{x})$

(h) x^x (Tipp: es ist $x^x = (e^{\ln(x)})^x = \dots$)

(j) $(a^x)^x$

(l) $\frac{x^4-1}{x^2-1}$

(n) $\frac{e^x \cdot \ln(x)}{\sin(x)}$

(p) $e^{x^2} - (e^x)^3$

(r) $x \arccos(x)$

(t) $\arctan(x)$ (Umkehrfunktion von $\tan(x)$)

Aufgabe 11. Ermitteln Sie jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen.

- (a) $\frac{x^2}{\sin(x)}$
- (c) $\operatorname{arccotan}(x)$ (Umkehrfunktion von $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$)
- (e) $\frac{e^x+1}{\sin(\frac{1}{x})}$
- (g) $\ln(\cos(e^{3x}))$
- (i) $\cosh(\cos(x))$
- (b) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^3}}$
- (d) $\tanh(x)$ (das ist $\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$)
- (f) $\arcsin(\sqrt{x})$
- (h) x^{x^x}
- (j) $\operatorname{artanh}(x)$ (Umkehrfunktion von $\tanh(x)$)

Teil II

Lineare Algebra

6 Intro

Fast alles im Lineare-Algebra-Teil der Vorlesung dreht sich um lineare Gleichungssysteme (LGS). Die zentralen Begriffe sind:

Vektor, Matrix, Vektorraum, linear unabhängig (lin.u.), Basis, Kern, Bild, Rang, Spann (= lineare Hülle) usw. Eine kompakt gehaltene Übersicht über diese Begriffe findet sich am Ende dieses Skripts. Die Begriffe wollen wir im Folgenden so knapp wie möglich und so präzise wie nötig erläutern. Zunächst behandeln wir komplexe Zahlen.

6.1 Vektoren

Ein **Vektor** ist einfach eine Tabelle mit einer Spalte, deren Einträge Zahlen sind. Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -0,1 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \dots$$

Als Werte für die Zahlen lassen wir hier alle reellen Zahlen zu. Die Menge aller Vektoren mit n Zeilen bezeichnen wir als $\mathbb{R}^n$. (Eine **Zeile** ist immer horizontal, eine **Spalte** immer vertikal.) Interessant wird es, weil man: erstens mit Vektoren Ortskoordinaten beschreiben kann. Ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ kann die Position eines Punkts in der Ebene beschreiben. Ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ kann die Position eines Punkts im Raum beschreiben. Zweitens kann man mit Vektoren rechnen: man kann sie addieren, subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren. Letzteres heißt **Skalarmultiplikation**. Eine echte Multiplikation (Vektor mal Vektor) gibt es nicht, auf jeden Fall nicht so, dass in natürlicher Weise wieder ein Vektor rauskommt. Addieren, subtrahieren und skalar-multiplizieren geht z.B. so:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bei Addition und Subtraktion von Vektoren müssen beide Vektoren natürlich die selbe Länge haben.

Schreibt man allgemein einen Vektor x aus $\mathbb{R}^n$ so: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dann geht Addition, Subtraktion und

Skalarmultiplikation so:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad x - y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

6.2 Matrizen

Eine **Matrix** ist einfach eine Tabelle mit n Zeilen und m Spalten, deren Einträge reelle Zahlen sind. Zum Beispiel sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & \pi & -0,1 \\ 7 & 1000 & -33 \\ 6 & 8 & -10 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizen. Auch Matrizen lassen sich addieren und subtrahieren, wenn sie das selbe Format haben. Zum Beispiel¹

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -3+3 & 2+5 \\ 1+2 & 2+1 & 7+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Matrizen mit n Zeilen und m Spalten, deren Einträge reelle Zahlen sind, bezeichnet man als $\mathbb{R}^{n \times m}$. Matrizen werden wir hier oft mit Großbuchstaben $A, B, \dots$ benennen. Die Einträge der Matrix A in Zeile i und Spalte j bezeichnen wir mit $a_{i,j}$. So ist zum Beispiel in der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 23 \end{pmatrix}$ etwa $a_{1,1} = 1$, $a_{1,3} = 3$ und $a_{2,2} = 12$. Wenn die Zahl der Spalten und Zeilen (wie hier) klein ist, dann lassen wir das Komma zwischen i und j weg. Also a_{12} statt $a_{1,2}$. Manchmal ist es praktisch, statt der Bezeichnung A für eine Matrix diese so zu schreiben: $(a_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$, oder kurz (a_{ij}) . Damit läßt sich etwa die Regel zur Addition von Matrizen sehr kompakt hinschreiben:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$$

Die Regel zur Skalarmultiplikation lautet in dieser kompakten Schreibweise einfach $\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$. Zum Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot (-3) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix}.$$

Im Gegensatz zu Vektoren kann man Matrizen auch miteinander multiplizieren, also “Matrix mal Matrix”, nicht nur “Zahl mal Matrix”. Zumindest, wenn ihr Format passt. Genauer:

Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl der linken mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt.

Ist also A aus $\mathbb{R}^{\ell \times m}$ und B aus $\mathbb{R}^{m \times n}$, so kann man “A mal B” rechnen. Nennen wir das Ergebnis C , also $C = A \cdot B$, so ist

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}.$$

Ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 39 & -12 \end{pmatrix}$$

¹Dieses und viele weitere Rechenbeispiele in diesem Abschnitt sind aus wikipedia übernommen (Stand Dez 2012):
de.wikipedia.org/wiki/Vektor, [de.wikipedia.org/wiki/Matrix_\(Mathematik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix_(Mathematik))
de.wikipedia.org/wiki/Falksches_Schema

- Achtung: Im Allg. ist $A \cdot B \neq B \cdot A$! (Matrizenmultiplikation ist nicht *kommutativ*.)
- Immerhin gilt $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. (Matrizenmultiplikation ist *assoziativ*.)

Zum Ausrechnen mit der Hand ist das Falk-Schema nützlich: Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es soll das Produkt $C = A \cdot B$ ermittelt werden. C ist eine 3×2 -Matrix. Zunächst wird das Falk-Schema aufgestellt, indem die Matrizen höhenversetzt nebeneinander geschrieben werden (in der ursprünglichen Ausrichtung, also ohne Kippen oder Drehen). Hier also:

			(Spalte 1)	(Spalte 2)
			-1	1
			1	-2
(Zeile 1)	1	4		
(Zeile 2)	2	5		
(Zeile 3)	3	-6		

Die erste Zeile von A wird elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert: $1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 3$, ergibt also $c_{11} = 3$. Analog ist $c_{12} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -7$. Insgesamt ergibt sich

			(Spalte 1)	(Spalte 2)
			-1	1
			1	-2
(Zeile 1)	1	4	3	-7
(Zeile 2)	2	5	3	-8
(Zeile 3)	3	-6	-9	15

Also $C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -8 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$.

Nach dem obigen ist klar, dass man eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten mit einem Vektor mit m Einträgen multiplizieren kann. Vgl dazu die folgende Übungsaufgabe.

Aufgabe 12. Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Ausdrücke $A \cdot b$, $A \cdot A \cdot b$ (also $A^2 \cdot b$), $A \cdot A \cdot A \cdot b$ (also $A^3 \cdot b$), und $A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot b$ (also $A^4 \cdot b$).

Aufgabe 13. Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ die Ausdrücke AB , BA , AC , CA , BC , CB , $A^T C$, $C^T A$, (zu A^T s.u.: “Transponierte”), ABC und CBA , falls es möglich ist.

Später (spätestens bei orthogonalen Matrizen) brauchen wir einen weiteren Begriff: Die **Transponierte** einer $n \times m$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $n \times m$ -Matrix $A^T = (a_{ji})$. Das heißt: Zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

die Transponierte. Man schreibt also die erste Zeile als erste Spalte, die zweite Zeile als zweite Spalte usw. Das ist ein sehr einfaches Konzept. Am besten sieht man es vielleicht an einem Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Fakt: $(A^T)^T = A$

Eine Matrix heißt **symmetrisch**, falls $A^T = A$ ist. Dazu muss A eine **quadratische** Matrix sein, also eine $n \times n$ -Matrix. Z.B. sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

symmetrische Matrizen.

7 Lineare Gleichungssysteme

Quizfrage: Ein Hotel hat insgesamt 90 Zimmer. (Mit “Zimmer” ist ab jetzt immer Gästezimmer gemeint.) Es gibt Einbett-, Zweibett- und Dreibett-Zimmer. Insgesamt hat das Hotel 133 Gästebetten. Es gibt doppelt so viele Einbettzimmer wie Zwei- und Dreibettzimmer zusammen. Wieviel Ein-, Zwei- und Dreibettzimmer gibt’s?

(Ins Auditorium fragen: Wie rangehen?)

Wenn x_1 die Zahl der Einbettzimmer ist, x_2 die der Zweibettzimmer und x_3 die der Dreibettzimmer, so gilt offenbar:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 90 \quad (7.1)$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 133 \quad (7.2)$$

$$x_1 = 2(x_2 + x_3), \quad \text{also} \quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \quad (7.3)$$

Das packen wir jetzt in ein Tabellenschema und wenden das **Gaußverfahren** an: Wir addieren Vielfache einer Zeile zu einer anderen und stellen so nach und nach Zeilen-Stufen-Form her:

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 90 \\
 1 & 2 & 3 & 133 \\
 1 & -2 & -2 & 0 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 90 \\
 0 & 1 & 2 & 43 \\
 0 & -3 & -3 & -90 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 90 \\
 0 & 1 & 2 & 43 \\
 0 & 0 & 3 & 39
 \end{array}$$

$\cdot(-1) \cdot(-1)$
 "Erste Zeile mal -1, dann zur dritten Zeile addieren"

An der dritten Zeile (im untersten Block) lesen wir ab: $3x_3 = 39$, also $x_3 = 13$. An der zweiten Zeile lesen wir (mit $x_3 = 13$) dann ab: $x_2 + 2 \cdot 13 = 43$, also $x_2 = 43 - 26 = 17$. Damit sehen wir in der ersten Zeile $x_1 + 17 + 13 = 90$, also $x_1 = 60$. Bingo!

Was passiert, hätte die dritte Bedingung in der Aufgabe gelautet “es gibt gleich viele Einzel- und Dreibettzimmer”? Die dritte Bedingung übersetzt sich dann zu $x_1 = x_3$ bzw $x_1 - x_3 = 0$. Das Vorgehen wie oben liefert

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 90 \\
 1 & 2 & 3 & 133 \\
 1 & 0 & -1 & 0 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 90 \\
 0 & 1 & 2 & 43 \\
 0 & -1 & -2 & -90 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 90 \\
 0 & 1 & 2 & 43 \\
 0 & 0 & 0 & -47
 \end{array}$$

$\cdot(-1) \cdot(-1)$
 "Zweite Zeile zur dritten Zeile addieren"

Die dritte Zeile heißt $0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -47$. Es gibt keine Werte für x_2 und x_3 , so dass diese Gleichung stimmt. Es gibt keine Lösung. (Ein solches Hotel kann es nicht geben!)

Was passiert wiederum, wenn die dritte Bedingung lautete “es gibt 47 mehr Einzelzimmer als Doppelzimmer”? Also $x_1 = x_3 + 47$, bzw $x_1 - x_3 = 47$:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 90 \\
1 & 2 & 3 & 133 \\
1 & 0 & -1 & 47 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 90 \\
0 & 1 & 2 & 43 \\
0 & -1 & -2 & -43 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 90 \\
0 & 1 & 2 & 43 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$\begin{array}{c} \textcircled{-1} \quad \textcircled{-1} \\ \swarrow \quad \swarrow \\ 133 \quad 47 \end{array}$

Die dritte Zeile heißt jetzt $0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$. Das sagt gar nix. Diese Gleichung gilt für alle Werte von x_2 und x_3 . Also liefert diese Zeile keine Information. Die zweite Zeile sagt: $x_2 = 43 - 2x_3$, und die erste damit $x_1 = -x_2 - x_3 + 90 = -43 + 2x_3 - x_3 + 90 = 47 + x_3$. Damit erhalten wir viele Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ 43 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 48 \\ 41 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 49 \\ 39 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 50 \\ 37 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \dots$$

Beherrscht man dieses Verfahren und seine Varianten, kann man damit sehr viele Lineare-Algebra-Aufgaben der Vorlesung lösen.

Gleichungen der Form (7.1) heißen **Lineare Gleichungssysteme** (kurz: LGS). Genauer: Mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen ($x_1, x_2, \dots$) heißen LGS, wenn überall nur Summen der Variablen stehen, eventuell mit einer konstanten Zahl als Faktor. (Also nicht so: x_1^2 , oder $x_1 \cdot x_2$, oder 2^{x_1} , oder $\sqrt{x_1}, \dots$)

Zusammenhang Matrix - LGS: Mittels Matrizen kann man es viel präziser sagen: Ein LGS ist eine Gleichung der Form

$$Ax = b,$$

wobei $A = (a_{ij})$ eine gegebene Matrix ist, b ein gegebener Vektor und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein unbekannter Vektor, den es zu berechnen gilt.

Man sieht, dass da ein LGS steht, wenn man es ausmultipliziert! Die Matrixeinträge a_{ij} sind die Zahlen links des senkrechten Strichs in den Rechnungen oben, die b_i sind die Zahlen rechts des senkrechten Strichs. Oben ist also $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, und $b = \begin{pmatrix} 90 \\ 133 \\ 47 \end{pmatrix}$.

Im Beispiel oben war also $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, b war $\begin{pmatrix} 90 \\ 133 \\ 47 \end{pmatrix}$ (in der ersten Rechnung). Gesucht war x mit $Ax = b$. Gefunden wurde $x = \begin{pmatrix} 60 \\ 17 \\ 13 \end{pmatrix}$.

7.1 Berechnen der Lösung(en) eines LGS

Ein LGS heißt **homogenes** LGS, wenn b der Nullvektor ist (wenn also in den Rechnungen oben rechts des senkrechten Strichs nur Nullen stehen). Andernfalls heißt das LGS **inhomogen**.

Offenbar war unser Ziel in den obigen Rechnungen, "vorne unten" möglichst viele Nullen zu erzeugen. Denkt man sich statt der Nullen Leerstellen, so strebt man also eine Art (umgedrehte) Treppenform an. Diese heißt **Zeilen-Stufen-Form**. Zu mehr Details, siehe wikipedia:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Gau\{OT1\ss\}-Jordan-Algorithmus>

Lineare Gleichungssysteme lösen (Gauss-Verfahren)

1. Durch Addieren von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile Zeilen-Stufen-Form herstellen.
2. Ist das LGS homogen, so gibt es immer mindestens eine Lösung: den Nullvektor. Ist die Zahl der Spalten größer als die Zahl der Nicht-Nullzeilen, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Die Anzahl der Spalten minus die Anzahl der Nicht-Nullzeilen ist die Anzahl frei wählbarer Parameter x_i .
3. Ist das LGS inhomogen, so gibt es immer entweder null Lösungen, oder eine Lösung, oder unendlich viele. Ist die Zahl der Spalten kleiner als die Zahl der Nicht-Nullzeilen (nach Herstellen der kleinstmöglichen Stufenform!), dann gibt es keine Lösung.

Die Zeilen-Stufen-Form stellt man her wie in den obigen Rechnungen. Wenn man möchte, kann man es noch etwas kompakter aufschreiben: Da sich in jedem Block eine oder mehrere Zeile wiederholen, können wir die wiederholten Zeile weglassen. Dafür markieren wir in einem der Blöcke darüber, welche Zeile wir uns "merken", welche also in den Blöcken darunter nicht hingeschrieben wird (aber immer noch gültig ist).

Beispiel 7.1. Löse das Gleichungssystem $Ax = b$, mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\
 -2 & -2 & -2 & 2 & -1 & -4 \\
 1 & 1 & 6 & 1 & 6 & 18 \\
 -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
 \hline
 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 4 \\
 0 & 0 & 4 & 1 & 5 & 14 \\
 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 6 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 6 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Die Zeile wird "gemerkt"

Die beiden auch

Nun ist Zeilen-Stufen-Form so weit wie möglich hergestellt. Es gibt nur drei markierte (also "gültige") Zeilen, die keine Nullzeilen sind. Es gibt 5 Spalten, also können wir zwei Parameter x_i frei wählen. Das merken wir aber auch von allein, wenn wir nach den x_i auflösen:

Die letzte (markierte) Zeile liefert $-3x_4 + 3x_5 = 6$, also x_5 frei wählbar. Wir schreiben kurz: $x_5 \in \mathbb{R}$. Dann ist $x_4 = x_5 - 2$.

Die vorletzte markierte Zeile liefert $2x_3 + 2x_4 + x_5 = 4$, also $2x_3 + 2(x_5 - 2) + x_5 = 4$, also $2x_3 = 8 - 3x_5$, also $x_3 = 4 - \frac{3}{2}x_5$.

Die erste markierte Zeile liefert $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4$, also $x_1 + x_2 + 2(4 - \frac{3}{2}x_5) + x_5 = 4$, also $x_1 + x_2 + 8 - 3x_5 + x_5 = 4$, also $x_1 + x_2 = 2x_5 - 4$. Mehr Bedingungen gibt es nicht, also können wir z.B. x_2 frei wählen. Dann ist $x_1 = -x_2 + 2x_5 - 4$.

Die Lösungsmenge (also die Menge aller Lösungen) können wir so schreiben:

$$L(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R}, x_4 = x_5 - 2, x_3 = 4 - \frac{3}{2}x_5, x_1 = -x_2 + 2x_5 - 4 \right\}, \quad \text{oder so:}$$

$$L(A|b) = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_2, x_5 \in \mathbb{R}, x_4 = x_5 - 2, x_3 = 4 - \frac{3}{2}x_5, x_1 = -x_2 + 2x_5 - 4\}, \quad \text{oder so:}$$

$$L(A|b) = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_5 - 4 \\ x_2 \\ 4 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_5 - 2 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad (x_2, x_5 \in \mathbb{R}), \quad \text{oder so:} \quad (7.4)$$

$$L(A|b) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x_2, x_5 \in \mathbb{R}). \quad (7.5)$$

Hätten wir die Lösungsmenge $L(A|0)$ des entsprechenden homogenen LGS bestimmt, so hätten wir erhalten:

$$L(A|0) = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x_2, x_5 \in \mathbb{R}). \quad (7.6)$$

Daran sehen wir exemplarisch:

Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein (Unter-)Vektorraum.
Das Gaußverfahren in der obigen Form liefert dessen Basis.

Zum Begriff Untervektorraum siehe Abschnitt 8.

Die Basisvektoren liest man an der Darstellung in (7.5) ab. Im obigen Beispiel ist also $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Basis von $L(A|0)$. An der Darstellung der Lösung oben (7.5) sehen wir auch (exemplarisch):

Die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS ist von der Form
"Spezielle Lösung des inhomogenen LGS + allgemeine Lösung des homogenen LGS"

Überzeugen Sie sich! Machen Sie eine Probe: Berechnen Sie $A \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, oder auch A mal der allgemeine

Vektor in (7.4) (es muss $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$ rauskommen). Dieser Vektor ist daher die besagte spezielle Lösung des inhomogenen LGS (denn er ist Lösung von $Ax = b$). Und berechnen Sie A mal den zweiten (oder dritten) Vektor in (7.5) (es muss 0 herauskommen). Diese Vektoren (und ihre Linearkombinationen) sind daher besagte Lösungen des zugehörigen homogenen LGS. (Und jede Linearkombination der beiden ist auch Lösung davon).

Wer dieses Verfahren beherrscht, kann damit sehr viele Aufgaben zu Linearer Algebra lösen.

Der Rest dreht sich nur um das Verständnis der Begriffe: Inverse/Rang einer Matrix, lineare Abbildung, Kern/Bild einer linearen Abbildung (bzw einer Matrix) usw.

Aufgabe 14. Lösen Sie das LGS $Av = b$ für

(a) $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

(b) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(f) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(g) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(h) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(i) $A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 12 & 15 & 1 \\ 6 & -3 & 11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(i) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(k) $A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 12 & 15 & 1 \\ 6 & -3 & 11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$

(ℓ) $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 15. Lösen Sie die das LGS $Ax = b$ für die folgenden Matrizen A und Vektoren b .

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & 2+i \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2i \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & i & -1+i \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -20 \end{pmatrix}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Das Verfahren kann auch auf die folgenden Aufgaben angewandt werden. Dazu führt man das zwei- bzw drei-fach durch: links steht immer A , rechts steht jeweils eine der Spalten der Matrix B . Die zwei (bzw drei) Spaltenvektoren, die man als Lösung erhält, sind dann die Spalten der Matrix X . Achtung: Auch hier kann es passieren, dass es mehrere Lösungen gibt, oder gar keine.

Aufgabe 16. Finden Sie Matrizen X , so dass gilt $AX = B$ für die folgenden Matrizen A und B .

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

8 Untervektorräume (UVR)

Generell gilt: Vektoren sind Tabellen mit einer Spalte. Vektoren sehen also so aus: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weil das etwas sperrig ist, benutzen wir folgende Schreibweise: $(1, 0, 1)^T$. (Vgl. die Def. der Transponierten, Seite 24).

“ U ist Untervektorraum von V ” (oder “Unterraum”) heißt einfach, dass U ein Vektorraum ist, und dass U in V enthalten ist. Z.B. sind alle Vektoren der Form $(a, 0, 0)^T$ ($a \in \mathbb{R}$) ein UVR von $\mathbb{R}^3$.

Um diese letzte Aussage zu beweisen, könnte man zeigen, dass für $U = \{(a, 0, 0)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$ alle zehn Vektorraumbedingungen erfüllt sind. Das geht aber auch einfacher:

Ist V ein Vektorraum und $U \subset V$, dann ist U UVR von V genau dann, wenn für alle $u, v \in U$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: (1.) $u + v \in U$ und (2.) $\lambda u \in U$.

Da $U \subset \mathbb{R}^3$ ist, brauchen wir nur zu prüfen, ob (1.) für $u = (a, 0, 0)^T$ und $v = (b, 0, 0)^T$ auch $u + v \in U$ ist, und (2.) für $u = (a, 0, 0)^T$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda u \in U$ ist.

Da $u + v = (a, 0, 0)^T + (b, 0, 0)^T = (a + b, 0, 0)^T$ auch in U ist, und $\lambda u = \lambda(a, 0, 0)^T = (\lambda a, 0, 0)^T$ auch, ist gezeigt, dass U wirklich UVR von $\mathbb{R}^3$ ist.

Fakt: Jeder UVR muss den Nullvektor $(0, 0, \dots, 0)^T$ enthalten (Warum? Wegen Punkt (2.) mit $\lambda = 0$). Und für jeden UVR muss gelten: wenn $v \in U$ dann auch $-v \in U$. (Warum? Wegen Punkt (2.) mit $\lambda = -1$).

(Publikum fragen:) Sind die folgenden Beispiele UVR von $\mathbb{R}^3$? Wenn ja, welche Dimension haben sie?

1. $U_1 = \{(a, 0)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$
2. $U_2 = \{(a, a, a)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$
3. $U_3 = \{(a, b, 0)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
4. $U_4 = \{(a, 0, b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
5. $U_5 = \{(a, a + 1, 0)^T \mid a \in \mathbb{R}\}$
6. $U_6 = \{(a, b, c)^T \mid a + b + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$
7. $U_7 = \{(a, b, 0)^T \mid a + b = 1, a, b, c \in \mathbb{R}\}$
8. $U_8 = \{(0, 0, 0)^T\}$
9. $U_9 = \{(a, b, 0)^T \mid a = b^2, a, b \in \mathbb{R}\}$

Zu U_6 und U_7 beachte auch den Kasten auf Seite 28.

9 Basis, lineare Hülle, Dimension, Inverse Matrizen

Wieder schreiben wir hier oft statt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch $(1, 0, 1)^T$. (Vgl. die Def. der Transponierten, Seite 24).

9.1 Basis, lineare Hülle und Dimension

Zur Definition einer Basis siehe die Vorlesung oder Wikipedia. Eine der vielen gleichwertigen Definitionen ist diese:

Eine Menge $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ von Vektoren heißt **Basis** eines Vektorraums V (z.B. $V = \mathbb{R}^n$), falls

- jedes Element $v \in V$ sich in der Form

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m, \quad (\text{mit } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ geeignet}) \quad (9.1)$$

schreiben lässt, sowie

- diese Darstellung eindeutig ist.

Eine Darstellung wie in (9.1) heißt **Linearkombination** (der b_i).

Die **lineare Hülle** (oder **Spann**) von $b_1, \dots, b_m$ ist die Menge aller Linearkombinationen der b_i . Ein Beispiel für die lineare Hülle von Vektoren haben wir schon gesehen: Hat die Lösungsmenge eines homogenen LGS mehr als ein Element, dann ist sie die lineare Hülle eines oder mehrerer Vektoren (vgl. z.B. Bsp 7.1, Gleichung (7.6)).

Zur Definition von **linear unabhängig** siehe wieder Vorlesung oder Wikipedia. Kurz gesagt sind $b_1, \dots, b_m$ linear unabhängig, falls sich keins der b_i als Linearkombination der anderen b_j ($j \neq i$) schreiben lässt.

(Man kann mit diesen Begriffen eine Basis auch so definieren: $b_1, \dots, b_m$ sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$, falls $b_1, \dots, b_m$ linear unabhängig sind und ihr lineare Hülle gleich $\mathbb{R}^n$ ist.)

Beispiel 9.1. 1. Die zwei Vektoren $(1, 0, 0)^T$ und $(0, 1, 0)^T$ sind keine Basis des $\mathbb{R}^3$, denn ich kann z.B. den Vektor $(0, 0, 1)^T$ nicht als Linearkombination der beiden schreiben.

Diese beiden Vektoren sind linear unabhängig, denn ich kann keinen von ihnen als die Linearkombination des anderen schreiben. Linearkombination heißt hier ja etwa: $(1, 0, 0)^T = \alpha(0, 1, 0)^T$; aber ein solches α gibt es nicht.

2. Die zwei Vektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ sind eine Basis des $\mathbb{R}^2$, denn ich kann alle Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination der beiden schreiben:

$$(a, b)^T = a(1, 0)^T + b(0, 1)^T.$$

Die beiden Vektoren hier sind auch linear unabhängig, aus dem selben Grund wie in 1.

3. Die zwei Vektoren $(1, 1)^T$ und $(-2, -2)^T$ sind keine Basis des $\mathbb{R}^2$, denn alle Linearkombination der beiden sehen so aus:

$$a(1, 1)^T + b(-2, -2)^T = (a - 2b, a - 2b)^T,$$

haben also zwei gleiche Einträge. Den Vektor $(1, 0)^T$ kann man so nicht erhalten, egal, wie man a und b wählt. Außerdem sind diese beiden Vektoren linear abhängig, denn ich kann $(1, 1)^T$ als Linearkombination von $(-2, -2)^T$ schreiben: $(1, 1)^T = -\frac{1}{2}(-2, -2)^T$.

4. Die drei Vektoren $(1, 0)^T$, $(1, 1)^T$ und $(0, 1)^T$ sind keine Basis des $\mathbb{R}^2$, denn ich kann zwar alle Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination der beiden schreiben, aber nicht eindeutig. Z.B. ist

$$(0, 2)^T = 0(1, 0)^T + 0(1, 1)^T + 2(0, 1)^T = -2(1, 0)^T + 2(1, 1)^T + 0(0, 1)^T.$$

Außerdem sind diese drei Vektoren linear abhängig, denn ich kann $(1, 1)^T$ als Linearkombination von $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ schreiben: $(1, 1)^T = 1 \cdot (1, 0)^T + 1 \cdot (0, 1)^T$.

Fakt: Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ hat genau n Vektoren.

Sind Vektoren $b_1, \dots, b_m$ aus $\mathbb{R}^n$ gegeben, so stellen sich drei bis zwei Fragen:

- Ist $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$?
- Sind $\{b_1, \dots, b_m\}$ linear unabhängig?
- Was ist eine Basis der linearen Hülle von $b_1, \dots, b_m$?

Die Antworten auf diese Fragen lauten:

- $\{b_1, \dots, b_m\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^n$, falls $m = n$ und falls die $b_1, \dots, b_m$ linear unabhängig sind.

- Ob $\{b_1, \dots, b_m\}$ linear unabhängig sind, kann man so berechnen:
 - Die Vektoren $b_1, \dots, b_m$ als Zeilen untereinander schreiben.
 - Zeilen-Stufen-Form herstellen.
 - Falls keine Nullzeilen auftauchen, sind die b_i linear unabhängig. Falls Nullzeilen auftauchen, sind sie's nicht.
- Eine Basis der linearen Hülle von $b_1, \dots, b_m$ findet man nach derselben Methode wie im letzten Punkt: Für jede Zeile i , die am Ende keine Nullzeile ist, fügen wir b_i zur Basis hinzu. sind, sind Basisvektoren der linearen Hülle. (Ebenso bilden die Nicht-Nullzeilen eine Basis der linearen Hülle.) Wichtig hierbei: nur von oben nach unten arbeiten (d.h., nur Vielfache von Zeilen auf Zeilen darunter addieren, nicht darüber).

Beispiel 9.2. Fragen: Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Was ist die Dimension ihrer linearen Hülle? Was ist eine Basis der linearen Hülle?

Die erste Frage können wir in diesem speziellen Fall sofort beantworten: es sind fünf Vektoren sind aus dem $\mathbb{R}^4$ gegeben. Im $\mathbb{R}^4$ kann es nicht fünf linear unabhängige Vektoren geben, denn eine Basis des $\mathbb{R}^4$ hat nur vier Vektoren. Die Vektoren sind also nicht linear unabhängig.

Für die beiden anderen Fragen müssen wir das LGS aufstellen und losrechnen.

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 1 & 1 & 0 & 1 & \cdot (-1) \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \cdot (-1) \\
 0 & 1 & 1 & 1 & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 0 & 0 & -1 & 0 & \cdot (-1) \quad \cdot (-1) \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 0 & 0 & -1 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

Wir sehen Hier wird noch ein Effekt sichtbar, den wir bisher nicht besprochen haben: Hier müssen wir am Ende noch Zeile 4 vor Zeile 2 schieben, um eine "ordentliche" reduzierte Zeile-Stufen-Form zu haben.

Für unsere Zwecke ist es aber besser, nicht die Zeilen zu tauschen: Wir lesen ab, dass die Vektoren b_1 , b_2 und b_4 eine Basis der linearen Hülle von b_1, b_2, b_3, b_4 und b_5 bilden. (Würden wir Zeilen tauschen, etwa 2 und 4, müssten wir uns das merken: Dann stünde Zeile 2 für b_4 und Zeile 4 für b_2 .) (Ebenso gültige Antwort: die Zeilen, die keine Nullzeilen sind — also Zeilen 1,2 und 4 — sind Basisvektoren der linearen Hülle.)

Aufgabe 17. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Was ist die Dimension ihrer linearen Hülle? Bestimmen Sie eine Basis der linearen Hülle.

(a) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $b_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$

(c) $c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(d) $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, d_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, d_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, d_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(e) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

9.2 Rang, Kern und Bild

Gegeben eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, interessieren wir uns für die Fragen:

- Für welche Input-Vektoren ist der Output 0 (der Nullvektor)?
- Welche Output-Vektoren kann es geben? (Alle? Manche? Nur 0?)

Die Vektoren aus Frage 1 heißen **Kern**, die aus Frage 2 **Bild**. Genauer:

Definition 9.3. Gegeben eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Der **Kern** von A ist $\text{Kern}(A) = \{v \in \mathbb{R}^m \mid Av = 0\}$. Das **Bild** von A ist $\text{Bild}(A) = \{Av \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathbb{R}^m\}$. Der **Rang** von A ist die Dimension des Bildes von A .

Der letzte Satz ist sinnvoll, denn:

Fakt: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so ist $\text{Kern}(A)$ ein UVR von $\mathbb{R}^m$ und $\text{Bild}(A)$ ein UVR von $\mathbb{R}^n$.

Falls die Aufgabe lautet “Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A ”, so können wir die Antwort mit den bereits bekannten Techniken liefern: Wir bestimmen einfach eine Basis von $L(A|0)$ (vgl Bsp 7.1). Falls die Aufgabe nur lautet “Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A ”, so geht das wie oben, aber wir müssen nur die Zahl der Basisvektoren von $(L(A|0))$ hinschreiben. (Oder einfacher: wir müssen nur “ m minus Zahl der Nullzeilen” hinschreiben.)

Falls die Aufgabe lautet “Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von A ”, so geht man so vor:

1. Berechnen von $b_1 = Ae_1, b_2 = Ae_2, \dots, b_n = Ae_n$. (Dabei sind die e_k die Standardbasisvektoren, also $e_1 = (1, 0, 0, \dots)^T, e_2 = (0, 1, 0, \dots)^T$ usw.)

2. Berechnen einer Basis der linearen Hülle von $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Falls die Aufgabe lautet “bestimmen Sie den Rang von A ”, dann geht das wie oben im letzten Absatz, nur einfacher: Auch hier muss man nur die Zahl der Basisvektoren der linearen Hülle der $b_1, b_2, \dots, b_n$ hinschreiben.. Noch besser geht’s aber mit folgendem Fakt:

Rangsatz: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so ist $\dim \text{Kern}(A) + \dim \text{Bild}(A) = m$.

Aufgabe 18. Bestimmen Sie jeweils die Dimension und eine Basis des Kerns der Matrizen in den Aufgaben 14 und 15, sowie dieser hier:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -6 \\ -1 & 5 & 3 \\ -3 & 15 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -7 & -12 & -7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

$$(c) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 11 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -11 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 9 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$$(d) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & -4 & 9 & -2 \\ 4 & 1 & -5 & 13 & -5 \\ -2 & 10 & 13 & -38 & -65 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19. Bestimmen Sie den Rang der Matrizen in Aufgabe 14 sowie der Matrizen aus Aufgabe 18 sowie Basen der Bilder dieser Matrizen. Was ist jeweils die Dimension des Kern dieser Matrizen?

9.3 Inverse Matrizen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur noch quadratische Matrizen, also nur noch Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Einige Typen von Matrizen spielen eine wichtige Rolle. Eine ist die **Einheitsmatrix**:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die besondere Eigenschaft von E in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist, dass für jede Matrix A in $\mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: $A \cdot E = A$, und auch $E \cdot A = A$. (Probieren Sie es an Beispielen aus!)

Die Einheitsmatrix ist der Spezialfall einer Diagonalmatrix. Eine **Diagonalmatrix** ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale Null sind. Also haben Diagonalmatrizen die Form

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Eine (**obere**) **Dreiecksmatrix** ist eine Matrix, bei der alle Einträge unter der Hauptdiagonalen 0 sind. Z.B. sind

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 0 & 22 & 23 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrizen. Ist nur von einer ‘‘Dreiecksmatrix’’ die Rede, ist fast immer (in diesem Skript: immer!) eine obere Dreiecksmatrix gemeint.

Oft (aber nicht immer) gibt es zu einer Matrix A eine **inverse** Matrix A^{-1} . (Wenn, dann geht es nur für quadratische Matrizen.) A^{-1} ist die (eindeutige) Matrix mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. (E ist die Einheitsmatrix.)

Falls es eine Inverse zu A gibt, kann man sie effizient so berechnen:

Berechnen der Inversen einer Matrix:

1. Man schreibe die Matrix A als Block hin (vgl. Beispiel 7.1). Rechts davon ziehe man einen senkrechten Strich. Rechts des Strichs schreibe man die Einheitsmatrix als Block hin.
2. Man bringe mit den üblichen Operationen des Gauß-Verfahrens die linke Matrix auf die Form der Einheitsmatrix E . (Also einfach reduzierte Zeilen-Stufen-Form herstellen.)
3. Wenn es klappt (links steht nun wirklich E) steht nun rechts die Inverse A^{-1} . Wenn es nicht klappt (links tauchen Nullzeilen auf), dann ist A nicht invertierbar.

Beispiel 9.4. Die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \quad \cdot (-4) \leftarrow \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -4 \quad \cdot (-5) \quad \cdot (3) \quad | \quad \cdot (-1) \leftarrow \\
 \hline
 1 & 2 & 0 & -5 & 3 & -12 \\
 0 & -4 & 0 & 8 & -4 & 20 \quad \cdot (1/2) \quad | \quad :(-4) \leftarrow \\
 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -5 \\
 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4
 \end{array}$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. (Machen Sie eine Probe! Berechnen Sie $A \cdot A^{-1}$!)

Ob eine gegebene Matrix A eine Inverse besitzt, kann man auch auf andere Weise berechnen. Ein Weg ist, zu prüfen ob die Determinante der Matrix ungleich Null ist (s. nächstes Semester).

Fakt: Die Inverse A^{-1} einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert genau dann, wenn $\text{Kern}(A) = \{0\}$. Das ist dasselbe wie $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$, also auch dasselbe wie $\text{Rang}(A) = n$.

Aufgabe 20. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(g) G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(j) J = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(e) E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(h) H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(k) K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -9 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(f) F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(i) I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 10 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(l) L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Die zentralen Resultate in LinA 1:

1. **Zusammenhang lineare Abbildung - Matrix:** Jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist von der Form $f(x) = Ax$, wobei A eine $n \times m$ -Matrix ist. Umgekehrt liefert jede $n \times m$ -Matrix eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.
2. Daher übertragen sich die Begriffe: z.B. ist $\ker(f) = \ker(A)$, $\text{im}(f) = \text{im}(A)$ usw.
3. $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T) =$ Dimension der linearen Hülle der Zeilenvektoren von $A =$ Dimension der linearen Hülle der Spaltenvektoren von A .
4. $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A)$ sind Vektorräume.
5. **Rangsatz:** $\dim V = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$.
6. **Dimensionsformel:** $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$
7. **Existenz der Inversen:** Ist A eine $n \times n$ -Matrix, so gilt: A^{-1} existiert genau dann, wenn $\text{Rang}(A) = n$.

Die zentralen Begriffe in LinA 1:

- (Matrix, Vektor, Vektorraum)
- **Untervektorraum (UVR, auch: Unterraum):** eine Teilmenge eines Vektorraums, die selber Vektorraum ist. Formal ist $U \subset V$ ein UVR, falls
 - $0 \in U$ (das folgt auch aus Punkt 3, also eigtl überflüssig)
 - $\forall v, w \in U : v + w \in U$
 - $\forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in U : \alpha v \in U$
- **linear unabhängig:** die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ heißen linear unabhängig, falls sich keiner als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Formal: Aus $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ folgt $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$.
- **Linearkombination** (von Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m$): jeder Ausdruck der Form

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m.$$

- **lineare Hülle** (von $v_1, \dots, v_m$): Menge aller Linearkombinationen der $v_1, \dots, v_m$.
- **Erzeugendensystem:** eine Menge $\{v_1, \dots, v_m\}$ von Vektoren in einem (U)VR V , so dass sich jedes $v \in V$ als Linearkombination der v_i schreiben lässt. Also formal: für jedes $v \in V$ gibt's $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ so dass

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m.$$

- **Basis:** linear unabhängiges Erzeugendensystem eines VR.
- **Dimension** (eines VR V): Zahl der Basisvektoren irgendeiner Basis von V .
- **Kern** (einer Matrix A , auch $\ker(A)$): Menge aller Vektoren, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden. Formal also $\{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$.
- **Bild** (einer Matrix A , auch $\text{im}(A)$): Menge aller Vektoren, die als Ergebnis Av auftreten. Formal also $\{w \mid w = Av \text{ für ein } v \in \mathbb{R}^n\}$.
- **Rang** (einer Matrix A): Dimension des Bildes von A .
- **lineare Abbildung:** Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit
 - $\forall u, v \in V : f(u + v) = f(u) + f(v)$.
 - $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha v) = \alpha f(v)$.
- **Inverse** (einer $n \times n$ -Matrix A): die Matrix A^{-1} , so dass gilt: $A^{-1}A = E_n$ (falls es so ein A^{-1} gibt).

Das sieht jetzt wenig aus. Viel Arbeit in der Vorlesung wird darauf verwendet, zu zeigen, dass die obigen Begriffe sauber definiert sind. Damit z.B. "Dimension" sauber definiert ist, muss gezeigt werden, dass jede Basis eines gegebenen Vektorraums gleichviele Elemente hat.

Teil III

Diskrete Mathematik

- injektiv, surjektiv, bijektiv,
- Zählprinzipien,
- (ungerichtete) Graphen, insbesondere eulersche und bipartite, Färbungen,
- Teilbarkeit, ggT, mod, $\mathbb{Z}_n$.

Siehe dazu auch das Skript von Prof. Erbar.

10 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine *Abbildung* $f : A \rightarrow B$ (oder Funktion, das ist das gleiche) ordnet jedem Element ihrer *Definitionsmenge* A genau ein Element ihrer *Zielfmenge* B zu. Man schreibt $f : A \rightarrow B, f(x) = \dots$ (Die Punkte beschreiben, wie diese Zuordnung aussieht). Sie kennen wohl alle die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Definition 10.1. Seien A und B Mengen und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Diese heißt **injektiv**, falls es zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$. Mit anderen Worten: jedes $y \in B$ kommt höchstens einmal dran.

Die Abbildung f heißt **surjektiv**, wenn es zu jedem $y \in B$ (mindestens) ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$. D.h. alle $y \in Y$ kommen dran.

Die Abbildung f heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Ob eine Abbildung injektiv ist oder nicht, hängt nicht nur von der Abbildungsvorschrift, sondern auch von den beteiligten Mengen ab! Betrachte zum Beispiel die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch $f(n) = n^2$. Diese Abbildung ist injektiv, denn aus $n^2 = m^2$ folgt $n = m$ (Übung!). Betrachtet man aber die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, so ist diese nicht injektiv, da zum Beispiel $f(3) = f(-3)$, aber $3 \neq -3$.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Diese ist surjektiv: sei $y \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig gegeben, dann ist $x := y^2$ ein Urbild unter f , denn $f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{y^2} = y$. Die Wurzelfunktion aus dem obigen Beispiel ist nicht nur surjektiv, sondern auch injektiv, denn falls $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$, dann folgt durch Quadrieren sofort $x = x'$ (Beachte, dass aufgrund der Mengen $x \geq 0$ und $x' \geq 0$ gilt!). Die Abbildung ist also bijektiv und $y \mapsto y^2$ ist die Umkehrabbildung.

11 Zählprinzipien

12 Teilbarkeit

Eine Zahl $j \in \mathbb{N}$ heißt **Teiler** einer Zahl $m \in \mathbb{N}$, falls $\frac{m}{j} \in \mathbb{N}$. Z.B. sind 1, 2, 3, 4 und 6 alle Teiler von 12.

Sind zwei Zahlen $k, m \in \mathbb{N}$ gegeben, so ist die größte Zahl k , die Teiler sowohl von k als auch von m ist, der **größte gemeinsame Teiler** (kurz: ggT, auch: $\text{ggT}(k, m)$) der beiden Zahlen. Z.B. ist der ggT von 12 und 21 gleich 3, oder der ggT von 42 und 70 gleich 14. Bei großen Zahlen braucht man eine systematische Art, den ggT zu berechnen. Das ist ein 2000 Jahre alte Klassiker, der euklidische

Algorithmus. Wir zeigen ihn hier in seiner aufgebohrten Form, die noch mehr kann, weil das in Bux' Vorlesung vorkam.

Erweiterter Euklidischer Algorithmus:

Berechnet zu $k, m \in \mathbb{N}$ den $\text{ggT}(k, m)$ sowie Zahlen $c, d \in \mathbb{Z}$ mit $ck + dm = \text{ggT}(k, m)$.

Seien $k, m \in \mathbb{N}$ gegeben ($k > m$).

1. $a_1 := k, a_2 := m, n := 1.$
 $c_1 := 1, c_2 := 0, d_1 := 0, d_2 := 1.$
2. $n := n + 1, \quad q_n := \max\{r \in \mathbb{N} \mid a_{n-1} - ra_n \geq 0\}$
3. $a_{n+1} := a_{n-1} - q_n a_n, \quad c_{n+1} := c_{n-1} - q_n c_n, \quad d_{n+1} := d_{n-1} - q_n d_n.$
4. Falls $a_{n+1} \neq 0$ weiter bei 2. Sonst STOP, Ausgabe $\text{ggT} = a_n$, sowie c_n, d_n .

Dann ist $c_n k + d_n m = \text{ggT}(k, m)$.

Beispiel 12.1. Aufgabe: Finde $c, d \in \mathbb{Z}$ so dass $c \cdot 160 + d \cdot 7 = \text{ggT}(160, 14)$.

n	a_n	q_n	c_n	d_n
1	160	\	1	0
2	14	11	0	1
3	6	2	1	-11
4	2	3	-2	23
5	0			

Der ggT steht in der zweiten Spalte über der 0 (das ist immer so, siehe Algorithmus). Also ist $\text{ggT}(160, 14) = 2$. Außerdem liefern die c_n und d_n in derselben Zeile wie der ggT $(-2) \cdot 160 + 23 \cdot 14 = \text{ggT}(160, 14) = 2$.

Literatur

- [P1] Papula, Lothar: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, Vieweg und Teubner, Wiesbaden 2011 (online in der Unibib verfügbar)
- [P2] Papula, Lothar: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2, Vieweg und Teubner, Wiesbaden 2011 (online in der Unibib verfügbar)
- [F1] Furlan, Peter: Das Gelbe Rechenbuch 1, Verlag Martina Furlan, Dortmund 2006
- [F2] Furlan, Peter: Das Gelbe Rechenbuch 2, Verlag Martina Furlan, Dortmund 2006
- [WIK] Online: <https://en.wikipedia.org>