

Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Biowissenschaften IIIFourieranalysis und Anwendungen**Blatt 12 (von 12)****Aufgabe 44:**

Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Laplacetransformierten von $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sin(at)$, von $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = e^{-t} \sin(at)$ und von

$$h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{für } t \geq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 45:

Lösen Sie die folgenden AWP mittels Laplacetransformation:

(a) $f'(t) = af(t)$, $f(0) = 2$,

(b) $f''(t) + 4f(t) = e^t$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$,

(c) $f''(t) + 2f'(t) + 10f(t) = e^{-t} \sin(t)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Aufgabe 46:

Zeigen Sie, dass $c \cdot e^{at} + d \cdot e^{-at}$ ($c, d \in \mathbb{R}$) eine Lösung der DGL $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 f = 0$ ist.

Bestimmen Sie c und d so, dass Sie eine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems

$$f(0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(0) = 0$$

erhalten. (Bemerkung: Es kann sogar gezeigt werden, dass alle Lösungen dieser DGL von der obigen Form sind.)

Aufgabe 47:

Lösen Sie die eindimensionale *Wellengleichung*. D.h., finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0 & (t \in]0; \infty[, x \in \mathbb{R}) \\ f(0, x) &= g(x) & (x \in \mathbb{R}) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(0, x) &= 0 & (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

durch räumliche FT (also FT nur in x). Was erhält man für $g(x) = e^{-x^2}$?

Tipp: Gehen Sie analog zu den Beispielen im Skript vor und benutzen Sie A 46 für $a = ik$.