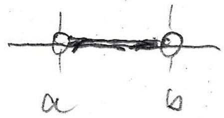
Grundbegriffe Topologie

Bsp offenes Intervall: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

abgeschlossenes Intervall: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(a,b):  Randpunkte $\notin (a,b)$

$[a,b]$  Randpunkte $\in [a,b]$

Grob: A „offen": Rand von A gehört nicht zu A

A „abgeschlossen" (abg.): Rand von A gehört zu A

(halboffen: $(a,b]$: weder noch)

Dazu Def. x Berührpunkt von A, falls es Folge $(x_n)_n$ in A gibt (also $x_n \in A \ \forall n$) mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. $\bar{A}$: abg. Hülle von A: Menge aller Berührp.

Passt: z.B. $(0,1)$: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\in (0,1)} = 0 \notin (0,1)$

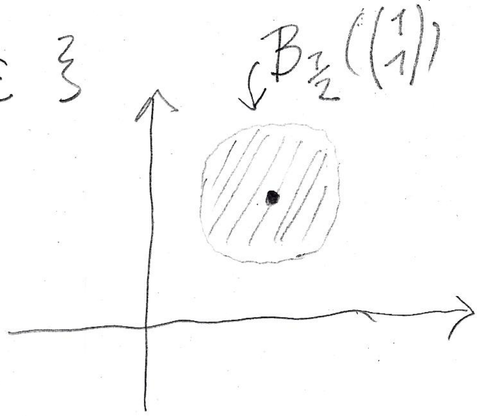
Jedes $x \in A$ ist Berührp., und evtl. noch andere.

Im Prinzip kann man nun alles damit definieren:

- A abg., wenn $\bar{A} = A$
- A offen, wenn $\underbrace{\mathbb{R}^d \setminus A}_{\text{„Komplement"}}$ abg.

usw.

Aber:



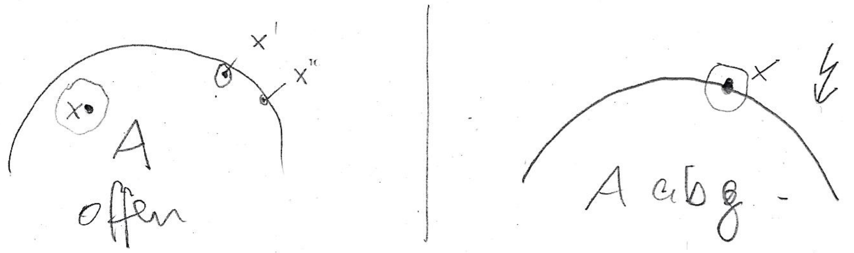
__Def__ $\quad B_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R}^d \mid \|x-y\| < \varepsilon \}$

(„ε-Ball", ε-Kugel um x):

offen!

A heißt __offen__, falls es für __jedes $x \in A$__ ein ε gibt mit $B_\varepsilon(x) \subset A$

Seltsame Def., aber die tut's!



x auf dem Rand

__Def__
- A __beschränkt__: es gibt $B_\varepsilon(x)$ mit $A \subset B_\varepsilon(x)$
- $A \subset \mathbb{R}^d$ __Kompakt__: A abg. und beschränkt.
- (x __innerer Punkt__ von A: es gibt ε mit $B_\varepsilon(x) \subset A$)
- ($\mathring{A}$: alle inneren Punkte von A)
- ($\bar{A} \setminus A^\circ$: __Rand__ von A)

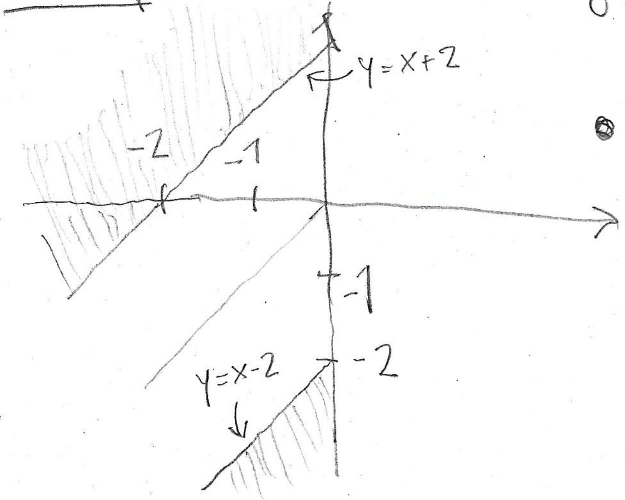
__Bsp__ (fragen: offen? abg.? beschr.? Kompakt?)

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ $\quad$ (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| \leq 1\}$ $\quad$ (d) $[1,2] \times [1,2]$

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, |y| < 1\}$

A 8.4 | Sind die Mengen offen? abg? beschr.? Kompakt?



- $A = \{(x,y) \mid x<0, |x-y|>2\}$

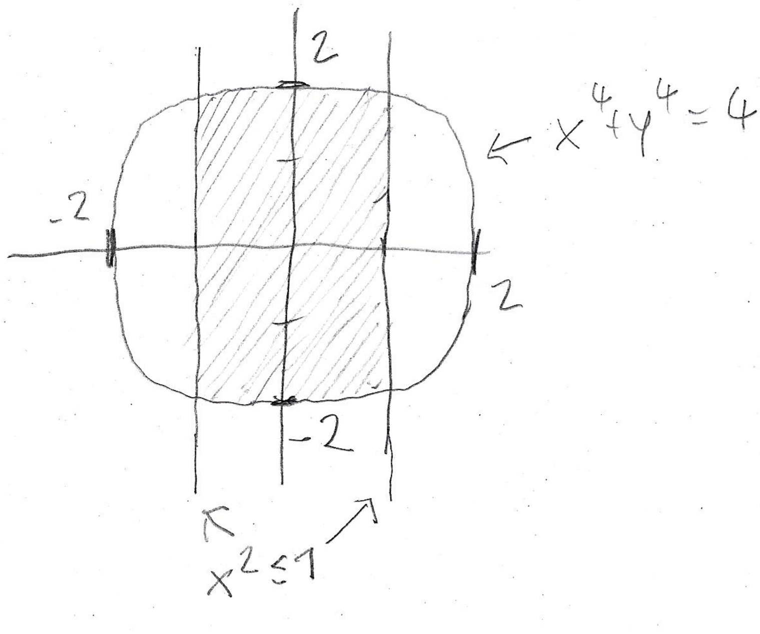
(Grenze: $|x-y|=2$; also

- $x-y=-2$ und
- $x-y=2$

offen! denn $\partial A \cap A = \emptyset$.

also nicht abg., nicht Kompakt.

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4+y^4 \le 4;\ x^2 \le 1\}$



abg.; beschr.; Kompakt