Taylorreihen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \dots$

Falls f unendlich oft differenzierbar ist, kann man es als Potenzreihe schreiben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (\text{„unendliches Polynom"})$$

Damit kann man auch f näherungsweise bestimmen, z. B. $f(x) \approx \sum_{n=0}^{2} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Bsp $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \quad (x \in (-1,1))$

- Wie bestimmt man die a_n?

Satz (Taylor) [vereinfacht] Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f^{(n)}$ die n-te Ableit.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \dots$$

Bsp $f(x) = e^x$; $f^{(n)}(x) = e^x$

(Satz:) $e^x = e^0 + e^0 \cdot x + \frac{1}{2} e^0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} e^0 \cdot x^3 + \dots$

$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$

Bsp $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

Aufg.: Taylorreihe von (a) e^{2x} (c) $\sin(x)$

(b) $x^3 + x^2 + 1$ (d) $\frac{1}{x}$ (e) $\frac{1}{1+x}$

Taylorreihe für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

<u>Satz (Taylor)</u> [vereinfacht]

$$f(v) \approx f(0) + \mathrm{grad}(f)(0)\cdot v + \frac{1}{2}\underbrace{v^T \cdot H_f(0)\cdot v}_{\text{bei Gess: } [v, H_f(0)\cdot v]} \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

<u>Bsp</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = 2x^2 + y\cdot x + 1$

$\mathrm{grad}(f)(x,y) = (4x+y \,;\, x)$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + \mathrm{grad}(f)(0)\cdot v + \frac{1}{2} v^T H_f(0)\cdot v \qquad \left(v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= 1 + (0,0)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 0 + \frac{1}{2}(x,y)\cdot\begin{pmatrix} 4x+y \\ x \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(4x^2 + xy + xy) = 1 + 2x^2 + xy$$

Hier sogar „$f(x) =$" Taylorreihe.

<u>Probleme:</u>
- evtl. klappt die 0 nicht: $f(\underline{0}) + f'(\underline{0})$
  ($f(x) = \ln(x)$; oder $f(x) = \frac{1}{x}$)
- Präzisiere das $\approx$
- f nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ diff-bar; oder nicht definiert

(Daher im Skript so kompliziert formuliert) (siehe dort)

Gess-

Aufg. Taylorreihen von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

(a) $f(x,y) = 2xy + y^2 + 2$

(b) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 1$

(c) $f(x,y) = \cos(x \cdot y)$

(d) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$

(e)

(Gess: e^{-xy}, $(x+y+z)^2$, $\sin xy$; e^{x+y})

Klausur: e^{xy}

(Extrema bei Gess: $x \cdot y$, $1+x^2+y^2$, $3+x^2+y^4$)

Klausur: $xe^x + y^2 + z^2$