17b

Jakob Niermann

May 29, 2024

Problemstellung

Wir sollen zeigen, dass bei einem Alphabet mit b Buchstaben die maximale Shannon-Entropie $H(w) = 1$ nur erreicht wird, wenn $P_i = \frac{1}{b}$ für $i = 1, \dots, b$ gilt.

Beweis durch Widerspruch

Zuerst erinnern wir uns an die Definition der Shannon-Entropie für ein Alphabet mit b Buchstaben:

$$H(w) = -\sum_{i=1}^{b} P_i \log_b P_i$$

wobei P_i die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Buchstaben sind und $\sum_{i=1}^{b} P_i = 1$.

Wir behaupten, dass die Entropie $H(w)$ maximal ist, wenn alle Wahrscheinlichkeiten gleich sind, d.h. $P_i = \frac{1}{b}$ für alle i.

Berechnung der Entropie unter der Gleichverteilung:

Für den Fall, dass alle Wahrscheinlichkeiten gleich sind, setzen wir $Q_i = \frac{1}{b}$ für alle i. Dann ist die Entropie:

$$H(w) = -\sum_{i=1}^{b} \frac{1}{b} \log_b \frac{1}{b} = -\sum_{i=1}^{b} \frac{1}{b} \cdot (-1) = -\frac{1}{b} \cdot b \cdot (-1) = 1$$

Die Entropie beträgt also 1, wenn alle Wahrscheinlichkeiten gleich sind.

Annahme: Nehmen wir an, dass die Entropie $H(w)$ maximal ist (also 1) und dass die Wahrscheinlichkeiten P_i nicht alle gleich sind. Das heißt, es existieren P_i und P_j mit $P_i \neq P_j$.

Idee: Wir zeigen jetzt das es eine andere Verteilung mit höherer Entropie gibt. Dann haben wir eine Verteilung gefunden mit einer höheren Entropie gefunden als unsere Maximale Entropie. Widerspruch

Untersuchung der Variation:

Nun betrachten wir die Entropie unter der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeiten ungleich sind.

Annahme: (nochmal) Nehmen wir an, dass die Entropie $H(w)$ 1 ist und dass die Wahrscheinlichkeiten P_i nicht alle gleich sind. Das heißt, es existieren P_i und P_j mit $P_i \neq P_j$.

Betrachte die neue Verteilung

$$\bar{P}_1, \bar{P}_2 ... \bar{P}_n$$

$$P_k =: \bar{P}_k \forall k \neq i, j$$

$$\bar{P}_i := \frac{P_i + P_j}{2} =: \bar{P}_j$$

Unsere neue Verteilung ist also gleich der alten an allen bis auf 2 Stellen und in Summe auch 1.

$$1 = \sum_{i=1}^{b} P_i = \sum_{i=1}^{b} \bar{P}_i$$

Es bleibt zu zeigen das die Ursprüngliche Entropie kleiner ist als die spätere.

$$-\sum_{i=1}^{b} P_i \log_b P_i \overbrace{<}^{zuzeigen} -\sum_{i=1}^{b} \bar{P}_i \log_b \bar{P}_i$$

$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{+\ rechnen} -P_i * \log_b P_i - P_j * \log_b P_j \overbrace{<}^{zuzeigen} 2 \cdot -\frac{P_i + P_j}{2} \log_b \frac{P_i + P_j}{2}$$

$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{\cdot(-1)} P_i \log_b P_i + P_j \log_b P_j \overbrace{>}^{zuzeigen} 2 \cdot \frac{P_i + P_j}{2} \log_b \frac{P_i + P_j}{2}$$

$$\overbrace{\Leftrightarrow}^{f(x)=x \cdot log_k x} f(\overbrace{x}^{:=P_i}) + f(\overbrace{y}^{:=P_j}) > 2 \cdot f(\frac{x+y}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \overbrace{>}^{\text{da f strikt konvex und x ungleich y}} f(\frac{x+y}{2})$$

Jetzt brauchen wir nur noch zu zeigen das f strikt konvex. Satz: Eine funktion ist strikt konvex wenn die 2. Ableitung an allen stellen des Definitionsbereichs $f``(x) > 0$ (klappt nicht in 0)

$$f''(x) = \underbrace{\frac{1}{x \ln(k)} > 0}_{da\ x \in [0,1]}$$

oder $f`(x)$ strikt monoton klappt in $\bar{\mathbb{R}}$

$$f'(x) = \underbrace{1 + \log_k(x)}_{da\ streng\ monoton\ steigend}$$

Widerspruch, da die blaue Gleichung stimmt und die rote Gleichung äquivalent zu ihr ist. Also stimmt die rote auch. Also haben wir eine Verteilung gefunden deren Entropie echt größer als 1 ist. Die Shannon Entropie ist durch 1 beschränkt.

$$\lightning$$

Wikipedia streng konvex:

Eine Funktion heißt *streng konvex* oder *strikt konvex*, wenn die Ungleichung der analytischen Definition im strengen Sinn gilt; das heißt, für alle Elemente $x \neq y$ aus C und alle $\theta \in (0, 1)$ gilt, dass

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

mit $\theta = \frac{1}{2}$

$$f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y).$$