

Übungen zur Vorlesung Kryptographie

Blatt 6

Aufgabe 21: (RSA nutzen)

Alices öffentlicher RSA-Schlüssel ist $(N, e) = (262699, 134529)$. Wir codieren wieder Buchstaben als Zahlen so: a=0, b=1, ... z=25, sowie ausnahmsweise das Ausrufezeichen als 26. Aber wir fassen diesmal je drei Buchstaben zu einem Block zusammen (Beispiel: der Text "bcd efg" wird zu 010203 040506, also $m = (m_1, m_2) = (10203, 40506)$.) Die Blöcke m_i werden dann einzeln mit RSA verschlüsselt.

(a) Sie sind Bob. Verschlüsseln Sie die Botschaft "flieh!" an Alice.

(b) Sie sind Alice. Entschlüsseln Sie die Botschaft (15210, 139648, 168451). (*Das geht nur, weil die Zahlen so unrealistisch klein sind, dass Sie leicht Alices geheimen Schlüssel ermitteln können.*)

Aufgabe 22: (RSA knacken mit Taschenrechner)

Sie sind Eve. Sie kennen Alices öffentlichen Schlüssel $(N, e) = (1007, 31)$. Außerdem erfahren Sie aus dunklen Kanälen, dass $\varphi(N) = 936$.

(a) Berechnen Sie nach dem Verfahren aus Bemerkung 5.1 im Skript die Primfaktoren p und q von N . (*Andere Methoden würden hier funktionieren, weil die Werte so klein sind, gelten aber nicht als Lösung.*)

(b) Berechnen Sie Alices geheimen Schlüssel und entschlüsseln Sie den mit den obigen Daten verschlüsselten Geheimtext $c = 864$.

(*Teil (b) ist unabhängig von (a). Beide Teile können auch nur mit Stift und Papier gelöst werden.*)

Aufgabe 23: (RSA knacken mit Heimtücke)

(a) Eine potenzielle Schwäche von RSA (in der Version aus der Vorlesung) ist, dass es *multiplikativ* ist, das heißt, $f(e, m_1 \cdot m_2) = f(e, m_1) \cdot f(e, m_2)$. Zeigen Sie diese Eigenschaft.

(b) Angenommen, Eve kennt einen Geheimtext $c_1 = f(e, m_1)$, den Bob an Alice schickte (aber Eve kennt nicht das m_1). Weiter angenommen, Eve kann Alice überreden, ihr einen von Eve ausgewählten Geheimtext $c_2 \neq c_1$ (mit dem privaten Schlüssel zu dem e von oben) zu einem Klartext m_2 zu entschlüsseln. Wie kann Eve die Schwäche in (a) ausnutzen, um das c_2 so heimtückisch zu wählen, dass sie damit das m_1 ermitteln kann?

(c) Wie kann das RSA aus der Vorlesung angepasst werden, um diesen Angriff zu unterbinden?

Aufgabe 24: (RSA knacken mit Wurzelziehen in \mathbb{R})

Diese Aufgabe zeigt, dass es keine gute Idee ist, p sehr nah an q zu wählen.

(a) Zeigen Sie, dass $N = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$ und dass $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{N}$ für Primzahlen $p > q > 2$.

(b) Falls p und q in etwa gleich groß sind, sind also p und q ungefähr so groß wie \sqrt{N} . Damit ist auch $A := \frac{p+q}{2}$ in etwa gleich \sqrt{N} , und $B := \frac{p-q}{2}$ ist klein dagegen. Wegen (a) ist $N = A^2 - B^2$, also $B^2 = A^2 - N$.

Also probieren wir $a = \lceil \sqrt{N} \rceil$ und testen, ob $a^2 - N$ eine Quadratzahl ist. Falls ja, so sind (mit $b = \sqrt{a^2 - N}$) die Zahlen $a - b$ und $a + b$ Teiler von N . Falls nicht, setzen wir $a := a + 1$ und machen weiter.

Und nun kommt endlich die Frage zu (b): Warum ist das sinnvoll? Und wie ermitteln wir so p und q ?

(c) Demonstrieren Sie das Verfahren am Beispiel $N = pq = 12345681432098803$.