

Formale Logik — Blatt 5**Aufgabe 17: (Resolventen)**

Bringen Sie die folgenden Formeln in KNF:

$$F = (C \Rightarrow A \vee B) \wedge (B \Rightarrow A) \wedge \neg A, \quad G = (C \Rightarrow A \vee B) \wedge \neg(B \wedge (C \Rightarrow A)) \wedge B \wedge (B \Rightarrow A).$$

Bestimmen Sie  $\text{Res}^0(F)$ ,  $\text{Res}^1(F)$  und  $\text{Res}^2(F)$ . Ist  $F$  erfüllbar?

Wenden Sie den Resolutionskalkül auf  $G$  an. Ist  $G$  erfüllbar?

**Aufgabe 18: (Die Dr.-Who-Diät)**

(a) Dr. Who wird gefragt, wie er es schaffte, so ein hohes Alter zu erreichen. Seine Antwort: “Eine strenge Diät. Wann immer ich etwas esse, gelten diese Regeln: Zu jedem Essen gibt es entweder Bohnen oder Datteln. Falls es zum Essen Chilies gibt, gibt es keine Datteln. Immer, wenn es Datteln gibt, trinke ich auch Alkohol. Wann immer es Bohnen gibt, gibt es Chilies, aber keine Datteln.”

Übersetzen Sie die Aussagen in eine aussagenlogische Formel  $F$ . Benutzen Sie den Tableaukalkül, um zu entscheiden, ob  $F$  erfüllbar ist. (Andernfalls hätte Dr. Who offenbar Quatsch erzählt).

(b) Ein anderes Mal behauptet er dies: “Wenn es keine Bohnen zum Essen gibt, esse ich Chilies. Wenn ich Alkohol zum Essen trinke, dann esse ich auch Fischstäbchen. Zu Fischstäbchen und Chilies gibt es immer auch Bohnen. Immer, wenn ich Chilies esse, trinke ich auch Alkohol.”

Übersetzen Sie die Aussagen in eine aussagenlogische Formel  $G$ . Zeigen Sie mit dem Tableaukalkül, dass Dr. Who zu jedem Essen Bohnen isst.

**Aufgabe 19: (Resolutionsvarianten)**

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Der Resolutionskalkül ist auch korrekt, wenn wir zusätzlich erlauben, Klauseln der Form  $\{A, \neg A, B, \dots\}$  zu  $\{B, \dots\}$  aufzulösen. Schreibweise:

$$\{A, \neg A, B, \dots\} \vdash \{B, \dots\}.$$

(b) Der Resolutionskalkül ist auch korrekt, wenn wir zusätzlich zwei Literale simultan auflösen, also z.B.

$$\{A, B, C\}, \{\neg A, \neg B, D\} \vdash \{C, D\}.$$

(c) Der Resolutionskalkül ist auch korrekt, wenn wir zusätzlich eine Klausel, die  $A_i$  und  $\neg A_i$  enthält, mit einer anderen, die ebenfalls  $A_i$  und  $\neg A_i$  enthält, auflösen. Also z.B.

$$\{A, \neg A, B\}, \{A, \neg A, C\} \vdash \{B, C\}.$$

(d) Klauseln der Form  $\{A, \neg A, B, \dots\}$  können weggelassen werden. Das Ergebnis des Resolutionskalküls bleibt dasselbe.

**Aufgabe 20: (1SAT and 2SAT)**

Im *worst case* braucht der Nachweis der Erfüllbarkeit einer Formel in KNF exponentiell viele Resolutionsschritte. Aber es gibt Ausnahmen. Hier sind zwei.

(a) Sei  $F$  eine Formel in KNF, in der jede Klausel genau ein Literal hat. Formulieren Sie einen Algorithmus, der die Erfüllbarkeit von  $F$  in linearer Zeit entscheidet, und begründen Sie kurz, warum das wirklich linear ist (in der Anzahl der Zeichen in  $F$ ).

(b) Sei  $F$  eine Formel in KNF, in der jede Klausel höchstens zwei Literale hat. Die Anzahl der verschiedenen atomaren Formeln in  $F$  sei  $n$ . Was ist die maximale Anzahl von Klauseln in  $\text{Res}^*(F)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.

*(Dies ist der Kern des Beweises, dass die Laufzeit für 2SAT nur  $O(n^2)$  beträgt.)*

**Zusatzaufgabe:** *(wird nur positiv gewertet, für vier zusätzliche Punkte)*

Zeigen Sie mit einem formalen Beweis: Ist ein Kalkül korrekt, dann ist er widerspruchsfrei.

---

Suchen Sie sich ein Tutorium unten aus.

Schicken Sie Ihre Lösungen an die Tutorin bzw. den Tutor, von dem Sie die letzte Korrektur bekamen.

Abgabe bis 14.11.2023. um 14:00.

Tutorien:	Di 16-18	D2-152	Hannah Heile	hheile+logik@techfak.de
	Di 16-18	T2-204	Can Ward	cward+logik@techfak.de
	Mi 8-10	T2-233	Jakob Niermann	janiermann+logik@techfak.de