

Formale Logik — Blatt 8**Aufgabe 29: (Die normale Normalform (NNF))**

Benutzen Sie Algorithmus 2.22, um die NNF der folgenden beiden Formeln herzustellen.

$$F = \exists x \forall y Q(x, y) \Rightarrow \exists y P(y),$$

$$G = \neg \exists x \forall y (P(y) \vee Q(g(a, x))) \wedge \neg \forall x (P(b) \wedge \neg Q(f(x))).$$

Aufgabe 30: (Keine gültige Regel)

Zeigen Sie, dass die zwei Formeln in (a) — bzw. in (b) — nicht äquivalent sind.

$$(a) (\forall x F) \vee (\forall x G) \not\equiv \forall x (F \vee G),$$

$$(b) \exists x \forall y F \not\equiv \forall y \exists x F$$

Das erklärt, warum es keine entsprechende Regel in Satz 2.14 gibt.

Aufgabe 31: (Die Menge aller Mengen)

Sei $U_{\mathcal{A}} := M$ die Menge aller (!) Mengen. (Nebenbei: Es gilt dann natürlich $M \in M$.) Sei nun $P(x, y)$ das Prädikat

$$P = \{(x, y) \mid x \in M, y \in M, x \in y\}.$$

Nun definieren wir $z := \{x \mid \neg P(x, x)\}$? (z ist also die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.)

Zeigen Sie, dass es eine solche Menge z nicht geben kann, und zwar, indem Sie zeigen, dass

$$F = \exists z \forall x (P(x, z) \Leftrightarrow \neg P(x, x))$$

unerfüllbar ist. (Siehe auch Russells Paradox auf Wikipedia.)

Aufgabe 32: (Äqui-Erfüllbarkeit)

Schritt 4 in Algorithmus 2.22 erhält nicht die Äquivalenz der Formel, nur die Erfüllbarkeit. (Vgl. Satz 2.20 und die Bemerkung hinter Algorithmus 2.22.)

Es gibt einen simplen Grund dafür: Durch Schritt 4 entstehen ja neue Symbole f, g, \dots . Ein \mathcal{A} für die Formel F vor Schritt 4 erklärt ja nicht die neuen Symbole f, g, \dots , die in Schritt 4 neu hinzukommen.

Aber auch wenn wir nur solche \mathcal{A} erlauben, die sowohl Strukturen sind für die Formel vor Schritt 4 als auch für die Formel nach Schritt 4 (also alle neuen Symbole f, g, \dots erklären), wird die Äquivalenz dennoch nicht immer erhalten. Finden Sie ein solches Beispiel.

Schicken Sie Ihre Lösungen an die Tutorin bzw. den Tutor, von dem die letzte Korrektur kam.

Abgabe bis 5.12.2023 um 14:00.

Tutorien:	Di 16-18	D2-152	Hannah Heile	hheile+logik@techfak.de
	Di 16-18	T2-204	Can Ward	cward+logik@techfak.de
	Mi 8-10	T2-233	Jakob Niermann	janiermann+logik@techfak.de