Formale Logik — Blatt 10

Aufgabe 37: (Noch einmal Resolutionskalkül)
Zeigen Sie mit dem Resolutionskalkül, dass $G = \forall w\big(R(w) \Rightarrow Q(w)\big)$ eine logische Folgerung ist von

$$F = \forall y \left(\forall x \left(\big(P(f(x),x) \vee Q(x)\big) \wedge \neg R(f(x)) \right) \wedge \forall z \left(\neg P(z,y) \vee \neg R(y) \vee R(z) \right) \right).$$

Aufgabe 38: (Ramen probieren)
Gegeben den Rahmen $W = \mathbb{N}$, sei R die Relation $<$ (also $R = \{(n,m) \mid n,m \in \mathbb{N}, n < m\}$). Außerdem sei eine Belegung $\alpha : \{A,B\} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$ gegeben durch

$$\alpha(A,n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ odd} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \qquad \alpha(B,n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n < 5 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Formeln jeweils im Punkt $s = 3$.

(a) $F_1 = \diamond \diamond A$
(b) $F_2 = \diamond\Box\neg B$
(c) $F_3 = \diamond \diamond B$
(d) $F_4 = \diamond(A \wedge \Box\neg B)$

Aufgabe 39: (Relationen als gerichtete Graphen)
Zeichnen Sie die folgenden Relationen als gerichtete Graphen $G = (W,R)$. Das heißt, die Knoten von G sind die Elemente von W, und die Kanten von G sind die (geordneten) Paare in R. Zeichnen Sie jeweils auch (W,R^2) und (W,R^3).

(a) $W = \{\text{Stein, Schere Papier}\}$, $R = \{(\text{Stein, Schere}), (\text{Schere, Papier}), (\text{Papier, Stein})\}$
(b) $W = \{0,1,2,3\}$, $R = \{(n,m) \mid n,m \in W, |n-m| \bmod 4 = 1\}$
(c) $W = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$, $R = \{(n,m) \mid n,m \in W, n \subseteq m\}$

Geben Sie für jede der neun Relationen (W,R^i) $(i = 1,2,3)$ an, ob sie jeweils reflexiv, und/oder symmetrisch, und/oder transitiv sind.

Überlegen Sie sich auch für sich, wie man im Graphen die drei Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, transitiv sehen kann.

Aufgabe 40: (Euklidische Relationen)
Eine Relation $R \subset W \times W$ heißt **euklidisch**, falls

$$\forall x \in W \; \forall y \in W \; \forall z \in W \; \Big(\big((x,y) \in R \wedge (x,z) \in R\big) \Rightarrow (y,z) \in R \Big).$$

Zeigen Sie: eine Relation, die reflexiv und euklidisch ist, ist auch symmetrisch und transitiv.

Sie können den Resolutionskalkül nutzen, müssen es aber nicht.

Schicken Sie Ihre Lösungen an die Tutorin bzw. den Tutor, von dem die letzte Korrektur kam.
Abgabe bis 19.12.2023 um 14:00.

Tutorien:	Di 16-18	D2-152	Hannah Heile	hheile+logik@techfak.de
	Di 16-18	T2-204	Can Ward	cward+logik@techfak.de
	Mi 8-10	T2-233	Jakob Niermann	janiermann+logik@techfak.de