

Formale Logik — Blatt 4**Aufgabe 13: (Varianten von Königs Lemma)**

(a) Sei T ein Baum, in dem jeder Knoten in T nur endlich viele Nachbarn hat. Außerdem enthalte T keinen unendlich langen Pfad. Zeigen Sie, dass T nur endlich viele Knoten hat.

(b) Zeigen Sie, dass Königs Lemma falsch ist, falls wir erlauben, dass ein Knoten im Baum T unendlich viele Nachbarn hat; selbst wenn T beliebig lange Pfade enthält.

Das heißt: Finden Sie einen Baum T , in dem ein Knoten unendlich viele Nachbarn hat, der beliebig lange Pfade enthält, aber keinen unendlich langen Pfad.

Aufgabe 14: (Logische Folgerungen)

Seien F und G aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden logischen Folgerungen. Sie dürfen dazu aber in höchstens einer der Teilaufgaben Wahrheitstafeln benutzen.

(a) *Disjunktionseinführung*: $\{F\} \models F \vee G$.

(b) *Modus ponendo tollens*: $\{F, \neg(F \wedge G)\} \models \neg G$.

(c) *Kontraposition*: $\{F \Rightarrow G\} \models \neg G \Rightarrow \neg F$.

Aufgabe 15: (Resolutionen)

Konstruieren Sie die KNF der folgenden Formeln F und G und bestimmen Sie $\text{Res}^1(F)$, $\text{Res}^2(F)$, $\text{Res}^1(G)$ und $\text{Res}^2(G)$. Ist $\square \in \text{Res}^3(F)$, bzw in $\text{Res}^3(G)$? Ist F erfüllbar? Ist G erfüllbar?

$$F = \left((A \wedge C) \vee (B \Rightarrow C) \right) \wedge \neg(B \Rightarrow C),$$

$$G = \left((B \vee C) \Rightarrow A \right) \wedge \left((B \wedge \neg A) \vee C \right) \wedge (C \Rightarrow B) \wedge \neg C.$$

Aufgabe 16 (Wo irrt ChatGPT? — Teil 1)

Ein Student, der den Stoff dieser Vorlesung beherrscht, kann leicht erkennen, dass ChatGPT schlecht darin ist, die Übungsaufgaben zu lösen. Ein Student, der den Stoff nicht beherrscht, kann das nicht gut erkennen.

ChatGPT schlug als Lösung für Aufgabe 11 von Blatt 3 Folgendes vor:

Gegeben ist die unendliche Menge von Formeln:

$$M = \{A_2 \Rightarrow A_1, A_3 \Rightarrow A_2, A_4 \Rightarrow A_3, A_5 \Rightarrow A_4, A_6 \Rightarrow A_5, \dots\}$$

1. Fall 1: $A_1 = \text{wahr}$.

- Falls $A_1 = \text{wahr}$, muss jede nachfolgende Variable $A_2, A_3, A_4, \dots$ ebenfalls wahr sein, da jede Implikation $A_{n+1} \Rightarrow A_n$ erfüllt sein muss.
- Damit ergibt sich die Belegung: $A_n = \text{wahr}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Fall 2: $A_1 = \text{falsch}$.

- Falls $A_1 = \text{falsch}$, kann jede weitere Variable $A_2, A_3, \dots$ unabhängig wahr oder falsch sein.
- Dies liegt daran, dass die Implikationen $A_{n+1} \Rightarrow A_n$ automatisch erfüllt sind, wenn $A_n = \text{falsch}$.
- Daraus ergibt sich eine unendliche Anzahl möglicher Belegungen, bei denen: $A_1 = \text{falsch}$ und jede weitere Variable A_n kann beliebig sein.

Die erfüllenden Belegungen für M lassen sich also in zwei Kategorien einteilen:

1. Alle Variablen sind wahr: $A_n = \text{wahr}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Nur $A_1 = \text{falsch}$: $A_1 = \text{falsch}$ und jede weitere Variable $A_2, A_3, \dots$ kann beliebig wahr oder falsch sein.

Diese beiden Kategorien decken alle erfüllenden Belegungen ab, da:

- Jede Implikation $A_{n+1} \Rightarrow A_n$ durch diese Belegungen erfüllt wird.
- Keine weiteren Belegungen möglich sind, ohne dass eine Implikation verletzt wird.

(a) Welche Teile der Antwort sind falsch?

(b) Nennen Sie zwei weitere Punkte, an denen man merkt, dass die Antwort wohl eher von ChatGPT kommt und nicht von einem Student, der der Vorlesung folgt. (*Bei (b) reichen Indizien.*)

Schicken Sie Ihre Lösungen an die Tutorin bzw. den Tutor, von dem Sie die letzte Korrektur bekamen.

Bitte die Abgaben so nennen: [techfakaccount]-logikn.pdf, also z.B. dfrettloeh-logik04.pdf.
Abgabe bis 12.11.2024 um 23:59.

Tutorien:	Mi 12-14 in C01-148	Mi 16-18 in U2-210	Lisa Henetmayr	lhenetmayr+logik@techfak.de
	Di 16-18 in C01-148	Do 16-18 in U2-210	Valentin Kats	valentin.kats@uni-bielefeld.de
	Di 16-18 in T2-208		Luca Sander	lusander+logik@techfak.de