Dr. D. Frettlöh 17.12.2024

Formale Logik — Blatt 10

Aufgabe 37: (Fußballexperten)
Formulieren Sie die folgenden Aussagen als modallogische Formeln. Zeigen Sie dann, dass nicht alle vier Formeln gleichzeitig erfüllbar sind. Das heißt also, zeigen Sie, dass unter jeder Struktur $\mathcal{A}$ mit Rahmen $(\mathbb{N}, <)$ mindestens eine der Formeln falsch ist.

(a) "Red Bull Leipzig wird alle folgenden Spiele gewinnen."
(b) "Borussia Dortmund wird nicht alle folgenden Spiele gewinnen."
(c) "Immer wenn Bayern München nicht gewinnt, dann wird Red Bull Leipzig nicht gewinnen."
(d) "Immer wenn Bayern München gewinnt, dann wird Borussia Dortmund gewinnen."

Wir nehmen an, dass alle Spiele am Wochenende ausgetragen werden, und dass jede Mannschaft Spiel Nummer i an Wochenende Nummer i austrägt.

Zusatz (nur für 2 Bonuspunkte) Eigentlich müsste der Rahmen ja sowas wie $(\{1, 2, \ldots, 34\}, <)$ sein, dann klappt die Aufgabe aber nicht. Warum nicht?

Aufgabe 38: (Ramen)
Sei (W, R) der Rahmen mit $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und der Relation $R = \{(m, n) \mid m < n\}$ auf W. Sei eine Belegung $\alpha : \{A, B\} \times W \to \{0, 1\}$ gegeben durch

$$\alpha(A, n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \alpha(B, n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte $\mathcal{A}(F_1, 0), \mathcal{A}(F_1, 1), \mathcal{A}(F_2, 1), \mathcal{A}(F_3, 1), \mathcal{A}(F_3, 3)$ der folgenden Formeln. Begründen Sie Ihre Antwort.

$$F_1 = \diamond \Box A \qquad F_2 = \Box \diamond A \qquad F_3 = \Box (B \Rightarrow A)$$

Tun Sie das Gleiche für den Rahmen (W, R') und die Belegung α (W, R'), mit W und α wie oben, aber mit $R' = \{(m, n) \mid n = m + 1 \bmod 6\}$.

Visualisieren Sie die Relationen (W, R) und (W, R') als gerichtete Graphen.

Aufgabe 39: (Noch mehr Regeln)
(a) Beweisen Sie Regel 5 aus Satz 3.9.
(Sie dürfen Regeln 1,2,6 and 7 des Satzes 3.9 benutzen, um die Formel umzuformen.)

(b) Beweisen Sie Regel 4 aus Satz 3.9, indem Sie zeigen, dass $\Box(F \Rightarrow G) \Rightarrow (\diamond F \Rightarrow \diamond G)$ eine Tautologie ist.
(Sie dürfen die Regeln 1,2,5,6 and 7 des Satzes benutzen, um die Formel in etwas umzuformen, dass offensichtlich eine Tautologie ist, wie etwa $F \vee \neg F \vee \ldots$.)

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Variante von Regel 6 in Satz 3.9 nicht gilt, etwa durch ein Gegenbeispiel.

$$(\diamond F \wedge \diamond G) \equiv \diamond (F \wedge G).$$

(Mehr auf Seite 2.)

Aufgabe 40: (Euklidische Relationen)
Eine Relation $R \subset W \times W$ heißt **euklidisch**, falls

$$\forall x \in W \; \forall y \in W \; \forall z \in W \; \Big(\big((x,y) \in R \wedge (x,z) \in R \big) \Rightarrow (y,z) \in R \Big).$$

Zeigen Sie: eine Relation, die reflexiv und euklidisch ist, ist auch symmetrisch und transitiv.

Sie dürfen den Resolutionskalkül nutzen, müssen es aber nicht.

Schicken Sie Ihre Lösungen an den Tutor, von dem Sie die letzte Korrektur bekamen.
Bitte die Abgaben so nennen: [techfakaccount]-logik$n$.pdf, also z.B. `dfrettloeh-logik10.pdf`.

Abgabe bis 7.1.2025 um 23:59.

Tutorien:	Mi 12-14 in C01-148	Lisa Henetmayr	lhenetmayr+logik@techfak.de
	Do 16-18 in U2-210	Valentin Kats	valentin.kats@uni-bielefeld.de
	Di 16-18 in T2-208	Luca Sander	lusander+logik@techfak.de