Formale Logik — Blatt 12**Aufgabe 45: (Reflexivität und Transitivität helfen)**

Sei $F = \Box A \Rightarrow \Diamond A$ (vgl. Aufgabe 44 (a), das ist keine Tautologie) und $G = \Box A \Rightarrow \Box(\Box A \vee B)$.

- (a) Zeigen Sie, dass auch G keine Tautologie ist.
 (b) Zeigen Sie, dass F eine Tautologie ist, falls wir verlangen, dass der Rahmen (W, R) reflexiv ist.
 (c) Zeigen Sie, dass G eine Tautologie ist, falls wir verlangen, dass der Rahmen (W, R) transitiv ist.

Übung 46: (Kardinalitäten raten)

Geben Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen an. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

- (a) $\mathbb{Q}^2$ (d) $H(F)$ (Herbrand-Universum einer Formel in Prädikatenlogik)
 (b) $\mathbb{R}^2$ (e) die Menge $F := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$
 (c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ (f) $\mathcal{P}(F)$

Übung 47: (Kardinalitäten beweisen)

Bestimmen Sie die Kardinalität jeder der folgenden Mengen und beweisen Sie Ihre Antwort. Sie können die von Ihnen verwendeten Bijektionen bzw. Injektionen auf beliebige Weise beschreiben, indem Sie **wenn ... dann** verwenden, oder Aufzählungslisten oder Tabellen, oder Funktionen, oder Sie können auch den Schröder-Bernstein-Satz benutzen.

- (a) $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$.
 (b) Die Menge aller unendlichen 0-1-Wörter: $\{u_1u_2, \dots \mid u_i \in \{0, 1\}\}$.
 (c) die Menge aller endlichen 0-1-Wörter: $\{u_1u_2 \dots u_n \mid u_i \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}_0\}$.
 (d) Die Menge aller verschiedenen Turingmaschinen.

Der Term in (a) bezeichnet alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, d.h. $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) := \{M \subset \mathbb{N} \mid M \text{ endlich}\}$. In (b) enthält die Menge alle unendlichen Wörter (Zeichenfolgen), die aus den Buchstaben 0 und 1 bestehen, z. B. 010101010..., 101000111010..., 00000000... und so weiter. In (c) enthält die Menge alle endlichen Wörter mit den Buchstaben 0 oder 1, d. h.: 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, ...; einschließlich des leeren Wortes ϵ mit null Buchstaben.

Übung 48: (Tricksige Bijektionen)

Ihr Ziel ist es zu zeigen, dass $|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$.

(a) Finden Sie eine Bijektion f vom geschlossenen Intervall $[0, 1]$ in das offene Intervall $]0, 1[$.

(b) Finden Sie eine Bijektion vom offenen Intervall $]0, 1[$ in das offene Intervall $] - 1, 1[$.

(c) Finden Sie eine Bijektion vom offenen Intervall $] - 1, 1[$ nach $\mathbb{R}$.

Wie in Aufgabe 47 können Sie die Bijektionen auf irgendeine geeignete Weise beschreiben.

Da die Verkettung bijektiver Abbildungen wieder bijektiv ist, ist die Abbildung $h \circ g \circ f$ die gewünschte Bijektion zwischen $[0, 1]$ und $\mathbb{R}$.

Extrapunkte werden für saubere Beweise vergeben, dass die von Ihnen angegebenen Abbildungen wirklich Bijektionen sind.

Letzteres können Sie tun, indem Sie z.B. zeigen, dass Ihre Abbildung injektiv und surjektiv ist; oder Sie können die inverse Abbildung f^{-1} angeben und zeigen, dass $f(f^{-1})(x) = x$.

Schicken Sie Ihre Lösungen an den Tutor, von dem Sie die letzte Korrektur bekamen.
Bitte die Abgaben so nennen: [techfakaccount]-logikn.pdf, also z.B. dfrettloeh-logik12.pdf.

Abgabe bis 21.1.2025 um 23:59.

Tutorien:	Mi 12-14 in C01-148	Lisa Henetmayr	lhenetmayr+logik@techfak.de
	Do 16-18 in U2-210	Valentin Kats	valentin.kats@uni-bielefeld.de
	Di 16-18 in T2-208	Luca Sander	lusander+logik@techfak.de