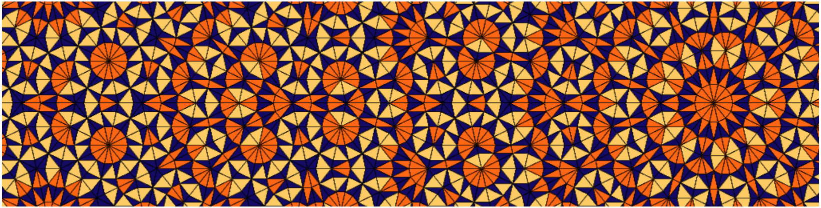
Panorama der Mathematik und Informatik

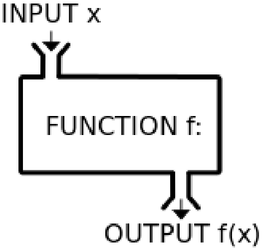
11: Geschichte V: Der Funktionenbegriff

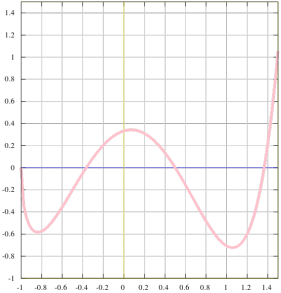
Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / richtig einsteigen

12.5.2015



Was ist eine Funktion?

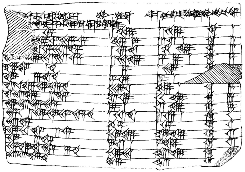




- Etwas, das "einem Funktionsgraph entspricht / ihn erzeugt"
- Eine Größe (y als "Funktion" von x)
- Eine "Maschine": Input x, Output y
  - von der reellen Achse auf die reelle Achse
  - ... von Mengen in Mengen
- ... wobei jedem x höchstens ein y zugeordnet wird
- ... oder mehrere y?

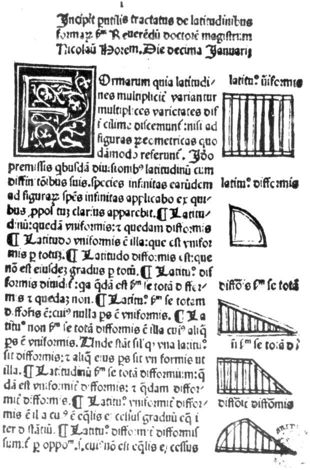
Ein langer Weg . . .

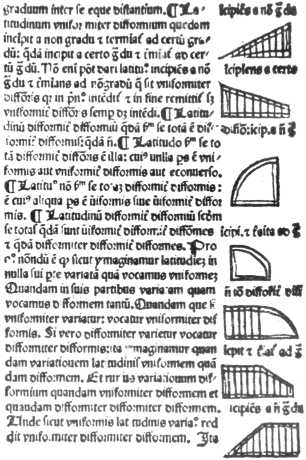
- Antike: gebogene Kurven,
- geradlinig und krummlinig eingeschlossene Flächen,
- Winkel"funktionen" (Wertetabellen)
- aber: Kein Funktionsbegriff, kein Integralbegriff!



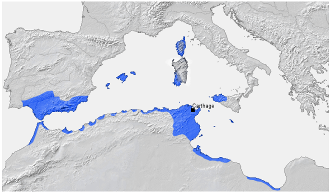
Nicolaus von Oresme (1323-1382)

Erste “Funktionsgraphen”:





Elissa (aka Dido) gründet Karthago

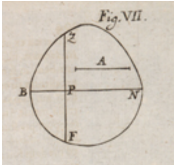


Karthago wird neunten oder achten Jahrhundert v. Chr. von phönizischen Siedlern aus Tyros gegründet. Zerstört um 146 v.Chr. von den Römern.

Problem der Dido: Welche ebene Form der Fläche 1 hat den kleinsten Umfang?

Die Entstehung des Funktionsbegriffs

1697: Das Isoperimetrische Problem (Problem der Dido)



Jakob (Jacques) Bernoulli (1654-1705)

Johann Bernoulli (1667-1748)

- Keine Funktion
- Statt dessen "Verhältnis" (Exponent) von PZ zu BF bzw. PF

Johann Bernoulli und die Funktion

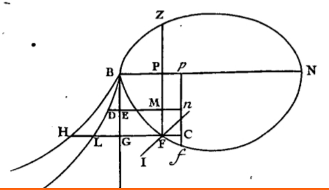
Im Briefwechsel Leibniz – Johann Bernoulli zwischen 1694 und 1698: *functio* oder *fonction*, zunächst ohne Definition.

Johann Bernoulli über das Isoperimetrische Problem in den *Memoires de l'Académie des Sciences* (1706):

C'eſt là le Problême que feu M. Bernoulli propoſa en 1697. M. Bernoulli ſon frere qui étoit particulierement défié, non ſeulement le réſolut, mais le réſolut après l'avoir rendu encore plus general, & par conſequent plus difficile. Il changea les puiſſances des Appliquées en ce qu'il appelle *fonctions*. Les fonctions d'une Appliquée comprennent, outre toutes les puiſſances, ſoit parfaites, ſoit imparfaites, où l'on peut l'élever, toutes les multiplications ou diviſions que l'on en peut faire par des grandeurs conſtantes, ou par les Abciſſes élevées auſſi à telle puiſſance qu'on voudra ; de ſorte, par exemple, que le produit d'une Appliquée élevée au cube & d'une grandeur conſtante, diviſé par le quarré de l'Abſciſſe, eſt une fonction de l'Appliquée. Les puiſſances ne ſont qu'une eſpece dont fonction eſt le genre.

Dies ist das Problem, das der verstorbene M. Bernoulli im Jahre 1697 vorgestellt hat. M. Bernoullis Bruder, an den es insbesondere adressiert war, hat es nicht nur gelöst, sondern gelöst, nachdem er es noch allgemeiner (und damit noch schwerer)

Fig. 1.re



Johann Bernoulli und die Funktion

1718: Zusammenfassung des Isoperimetrischen Problems durch Joh. Bernoulli. Darin folgende:

DEFINITION.

On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité compoſée de quelque maniére que ce ſoit de cette grandeur variable & de conſtantes.

- Keine Unterscheidung zwischen Methode und Größe.
- Aber: Primär als Größe gedacht
- Im gleichen Aufsatz: ΦRc für Auswertung der Funktion Φ an der Stelle (Strecke) Rc.

Leonard Eulers Definiton IA

- Euler: Schüler von Johann Bernoulli
- *Introductio in Analysin Infinitorum. Tomus Primus* (1748):

4. *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.*

Omnis ergo expressio analytica, in qua praeter quantitatem variabilem z omnes quantitates illam expressionem componentes sunt constantes, erit functio ipsius z. Sic

$$a + 3z, \quad az - 4zz, \quad az + b\sqrt{(aa - zz)}, \quad c^z \quad \text{etc.}$$

sunt functiones ipsius z.

Leonard Eulers Definiton IA

Analysis des Unendlichen Band I (fehlerhafte Übersetzung):

§. 4.

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein algebraischer Ausdruck, der auf irgend eine Art aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder beständigen Größen zusammengesetzt ist.

Ein jeder algebraischer Ausdruck, der außer der veränderlichen Größe z lauter beständige Größen enthält, ist also eine Funktion dieser z. So sind $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; c^z; u. s. f. Funktionen von z.

§. 5.

Es giebt indeß auch Ausdrücke, die, ob sie gleich dem Scheine nach zu den Funktionen gehören, dennoch nichts anders als beständige Größen sind, weil sie bey aller Veränderung der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größe immer einen und denselben Werth behalten; z. B. z^0; 1^z; $\frac{aa - az}{a - z}$.

§. 6.

Der Hauptunterſchied der Funktionen beruhet auf der Art und Weiſe, wie ſie aus der veränderlichen und aus beſtändigen Größen zuſammengeſetzt ſind.

Er hängt alſo von den Operationen ab, durch welche Größen mit einander verbunden werden können, als der Addition, Subtraction, Multiplication, Diviſion, Erhebung zu Poteſtäten, Extraction der Wurzeln, ſo wie auch der Auflöſung der Gleichungen. Außer dieſen ſogenannten algebraiſchen Operationen giebt es noch eine Menge anderer, welche den Beynamen der tranſcendenten führen, und wohin die Formation der Exponential- und der logarithmiſchen Größen und unzählige andere gehören, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt.

§. 7.

Man theilt die Funktionen in Algebraiſche und Tranſcendente ein; unter jenen verſteht man die, in welchen bloß die algebraiſchen, unter dieſen aber die, in welchen tranſcendente Operationen vorkommen.

Leonard Eulers Definiton IA

- Funktionen werden *nicht* nur als algebraische Ausdrücke gedacht.
- Funktionen meist als "Methode"
- Aber: Euler hat (in seinem Sinne) *stetige* Funktionen im Kopf, d.h. in einem geschlossenen Ausdruck formulierbare. Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \leq 0 \\ x, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

  ist nicht Euler-stetig ("gemischte Kurve").
- Mehrdeutige Funktionen nicht ausgeschlossen

Leonard Eulers Definiton IB

Aber: *Analysis des Unendlichen Band II* (1748):

> Es führt alſo jede Funktion von x auf irgend eine Linie, eine gerade entweder oder eine krumme, und umgekehrt läßt ſich jede krumme Linie auf eine Funktion zurückführen.

- Ganz neue Sicht! Funktion als Graph
- Eulers Funktionen jetzt "stetig differenzierbar"
- Angeregt durch Differenzialgleichung (D'Alembert)

Leonard Eulers Definiton II

Nochmals eine Wende: *Institutiones calculi differentialis* (1755):

> Sind nun Größen auf die Art von einander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der andern zu bewirken: so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der andern betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch andere bestimmt werden kann, unter sich begreift *). Wenn also x eine veränderliche Größe bedeutet, so heißen alle Größen, welche auf irgend eine Art von x abhangen, oder dadurch bestimmt werden, Funktionen von x: z. B. das Quadrat xx, und jede Potenz von x, so
>
> wie auch alle daraus auf irgend eine Art zusammengesetzte, ja selbst die transcendenten, und also überhaupt alle Größen, welche auf die Art von x abhängen, daß jede Veränderung dieser x eine Veränderung in ihnen nach sich zieht.

- Algebraische Ausdrücke nicht nötig, um Funktion zu definieren

Bei Euler: Funktionen auch als Potenzreihen (vgl. Vorlesung 8)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + \cdots$$

Schon bei den Bernoullis: trigonometrische Reihen

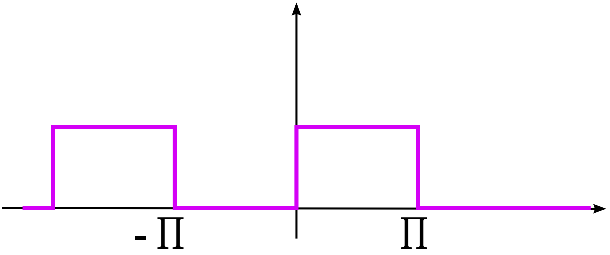
$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

Bsp:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \cdots\right) \tag{1}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1} \tag{2}$$

Das ist die Rechtecksfunktion:



Problem: Klappt das auch wirklich, f so darzustellen? Also

- Konvergieren die Reihen?
- Wo genau?
- Was heißt hier Konvergenz?
- Welche f lassen sich darstellen? (stetige? diff-bare?)

Darum kümmerten sich nachfolgende Generationen. (Siehe auch Mathematische Methoden für Biowiss. III) Insbesondere:

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1821

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Allgemeine Betrachtungen über die Funktionen.

Wenn **veränderliche Zahlgrössen** in solcher Weise unter einander **zusammenhängen,** dass man aus dem gegebenen Werte von einer Veränderlichen die Werte aller übrigen herleiten kann, so denkt man sich gewöhnlich diese verschiedenen Zahlgrössen vermittelst jener einen ausgedrückt. Jene eine nimmt dann den Namen: **unabhängige Veränderliche** an, während die übrigen, die mittelst der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückten Zahlgrössen, sogenannte **Funktionen** jener einen Veränderlichen sind.

- Wurzelfunktion wird zum Spezialfall der Exponentialfunktion
- Mehrdeutige Funktionen durch Notation gekennzeichnet: $((x))^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{x}$.
- Sinus, Cosinus und Logarithmus spielen mit.

Joseph Fourier (1768-1830)

En général, la fonction fx représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées fx. Toutes ont des valeurs numériques *actuelles*, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité.

(1822) "Im Allgemeinen repräsentiert die Funktion *fx* eine Folge von Werten oder Ordinaten, von denen jeder beliebig ist. Die Abzisse x kann eine unendliche Zahl von Werten annehmen, [und] gibt es eine entsprechende Zahl von Ordinaten *fx*. Alle haben bestimmte Zahlenwerte, die positiv, negativ oder Null sind. Man nimmt keinesfalls an, dass diese Ordinaten einen

Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

§. 1.

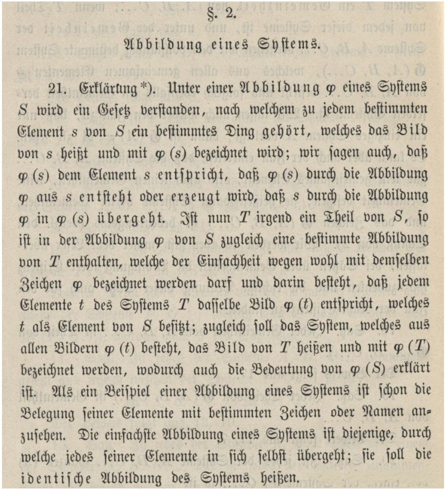
Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y, und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sich ebenfalls allmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche*) Function von x für dieses Intervall. Es ist dabei gar nicht nöthig, dass y in diesem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängig sei, ja man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit zu denken. Geometrisch dargestellt, d. h. x und y als Abscisse und Ordinate gedacht, erscheint eine stetige Function als eine zusammenhängende Curve, von der jeder zwischen a und b enthaltenen Abscisse nur ein Punkt entspricht. Diese Definition schreibt den einzelnen Theilen der Curve kein gemeinsames Gesetz vor; man kann sich dieselbe aus den verschiedenartigsten Theilen zusammengesetzt oder ganz gesetzlos gezeichnet denken. Es

*) Da im Folgenden nur von stetigen Functionen die Rede sein wird, so kann der Zusatz ohne Nachtheil wegbleiben.

Aus: *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837).

Richard Dedekind (1831-1916)

Was sind und was sollen die Zahlen (1893):

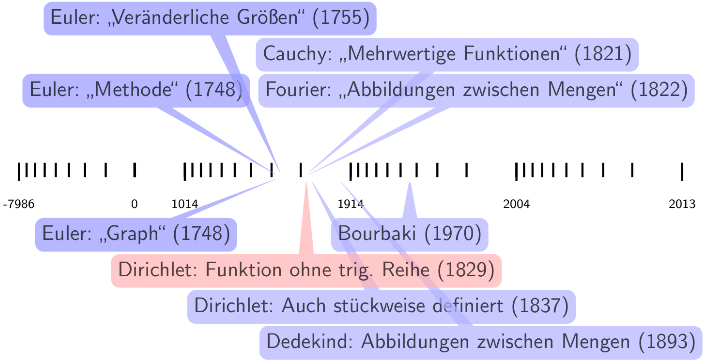


§. 2.

Abbildung eines Systems.

21. Erklärung*). Unter einer **Abbildung** φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding **gehört**, welches das **Bild** von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s **entspricht**, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s **entsteht** oder **erzeugt** wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ **übergeht**. Ist nun T irgend ein Theil von S, so ist in der Abbildung φ von S zugleich eine bestimmte Abbildung von T enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen φ bezeichnet werden darf und darin besteht, daß jedem Elemente t des Systems T dasselbe Bild $\varphi(t)$ entspricht, welches t als Element von S besitzt; zugleich soll das System, welches aus allen Bildern $\varphi(t)$ besteht, das **Bild** von T heißen und mit $\varphi(T)$ bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von $\varphi(S)$ erklärt ist. Als ein Beispiel einer Abbildung eines Systems ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen. Die einfachste Abbildung eines Systems ist diejenige, durch welche jedes seiner Elemente in sich selbst übergeht; sie soll die **identische** Abbildung des Systems heißen.

Übersicht Funktionen



(aus: A. Loos, G.M. Ziegler: *Panorama der Mathematik*, $\geq$ 2015)
Der “naive” Begriff (Funktion = stetig und differenzierbar, oder Funktion = algebraischer Ausdruck) wurde durch den modernen Begriff abgelöst.

Dennoch dachte man lange bei “Funktion” etwa an stetige Funktion; und dass stetige Funktionen fast überall differenzierbar sind; und als trigonometrische Reihe oder Potenzreihe geschrieben werden können. Böses Gegenbeispiel I:

Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859):
$f(x) : \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch

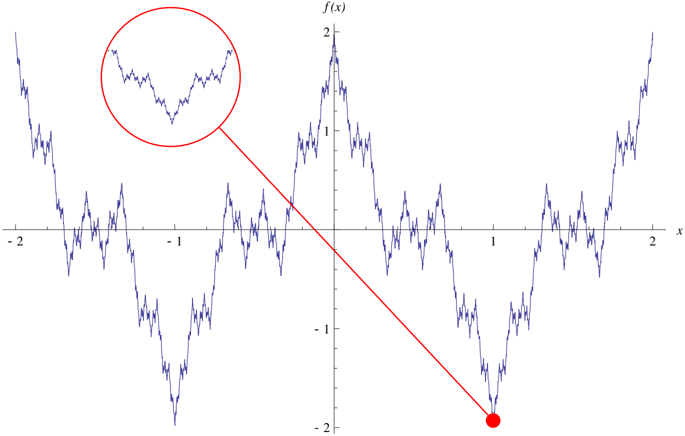
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist nicht als trigonometrische Reihe darstellbar (1829) (gut, und erst recht nicht stetig). Ist aber eine Funktion, die man hinschreiben kann:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^n$$

Weierstraß-Monster

Böses Gegenbeispiel 2: Karl Weierstraß (1815-1897, geb. in Ennigerloh): Eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$



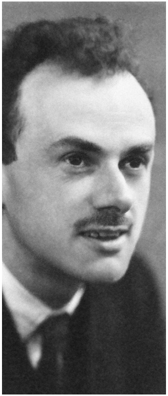
"Pathologische Sonderfälle"

"Jetzt erleben wir, wie eine ganze Masse grotesker Funktionen auftaucht, die sich alle Mühe zu geben scheinen, den anständigen Funktionen, die zu etwas nütze sind, so wenig wie möglich zu ähneln. [...] Wenn früher eine Funktion erfunden wurde, geschah dies im Hinblick auf einen praktischen Zweck; heute erfindet man sie absichtlich nur dazu, die Argumentation unserer Väter zu widerlegen, und zu etwas anderem werden sie nie taugen."

Jules Henri Poincaré (1854-1912), 1899

Verallgemeinerungen I: Distributionen

- Oliver Heaviside: Ableitung der Sprungfunktion (1893)
- Paul A.M. Dirac: δ-Funktion (1920er Jahre)
- Sergei Sobolev (1908-1989) und Laurent Schwartz (1915-2002): *Theory of Distributions* (1950), Erweiterung des Differentialoperators auf Distributionen.



15. The δ function

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx &= 1\\ \delta(x) = 0 \text{ for } x &\neq 0.\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

The exact shape of the function inside this domain does not matter, provided there are no unnecessarily wild variations (for example provided the function is always of order ϵ^{-1}). Then in the limit $\epsilon \to 0$ this function will go over into $\delta(x)$.

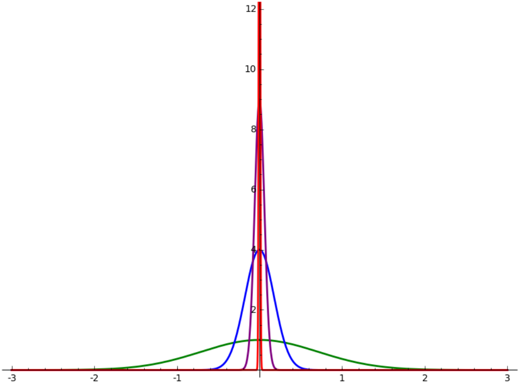
$\delta(x)$ is not a function of x according to the usual mathematical definition of a function, which requires a function to have a definite value for each point in its domain, but is something more general, which we may call an 'improper function' to show up its difference from **a** function defined by the usual definition. Thus $\delta(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confined to certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency can arise.

Problem: wir brauchen (für Physik) die δ-Funktion mit

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

Daraus folgt $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x) = 1$ (setze $f(x) = 1$).

Klappt mit üblichem Funktionen- bzw Integralbegriff nicht. Intuitiv: δ Grenzwert von immer schmaleren Funktionen f_n mit $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$.



Distributionen, aka verallgemeinerte Funktionen

Vorteil:

- Einheitliche Behandlung von *Maßen* und Funktionen
- Alle Funktionen sind differenzierbar
- Einfachere Behandlung von Fouriertransformation

Formale Definition:

- Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller *rapidly decreasing functions*, oder *Testfunktionen*. D.h.
  - $\phi \in \mathcal{S}$ beliebig oft differenzierbar
  - $\phi \in O(x^{-n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ("f fällt schneller als jedes Polynom für $x \to \pm\infty$")

Bsp: $\phi(x) = e^{-x^2}$ ist Testfunktion, oder "Polynom mal e^{-x^2}".

Definition: Jede lineare Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathbb{R}$ heißt *Distribution*.

Praktisch: Schreibe $\langle g, \phi \rangle$ für "g angewandt auf ϕ". (g ist die Distribution, ϕ ist die Testfunktion)

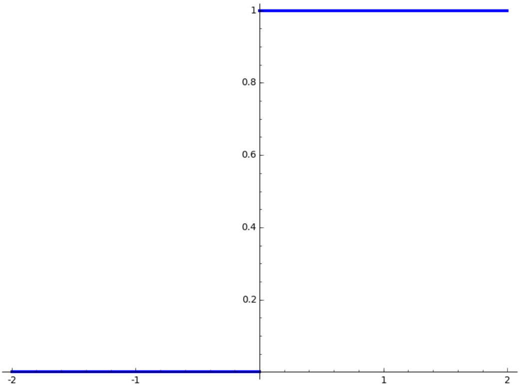
- Definiere δ durch $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ (*ist* linear)
- Definiere δ_a durch $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(a)$
- f "normale" Funktion (z.B. Polynom): $\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$ (ist endlich, da ϕ rapidly decreasing!)
- μ Ihr Lieblings-(wahrscheinlichkeits-)maß: $\langle \mu, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)d\mu$.

Jetzt muss man alles aus Analysis hierfür erneut machen: Ableitung einer Distribution definieren, Ableitungsregeln, Integral,... alles von vorn!

Z.B. die Ableitung der *Heaviside-Funktion* $h(x)$, aka Sprungfunktion:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$h'(x) = ?$$



$h'(x) =?$

$\langle h', \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} h'(x) \cdot \phi(x) dx$

$= \big(h(x)\phi(x)\big)\Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} h(x)\phi'(x) dx$

$= 0 - 0 - (\int_0^\infty \phi'(x) dx)$

$= -(\phi(x)\Big|_{x=0}^{\infty}) = -(\phi(\infty) - \phi(0)) = -0 + \phi(0) = \phi(0)$

$= \langle \delta, \phi\rangle.$

Also $h' = \delta$. Magic.

Aus der Rechnung oben erhalten wir:
Lemma: $\langle f', \phi\rangle = -\langle f, \phi'\rangle$.

Ableitung der δ-Funktion: $\langle \delta', \phi \rangle = \phi'(0)$.

So leitet man nun Ableitungsregeln her, Ableitungen von Polynomen, Kettenregel, (Produktregel,hm)..... sowie Fouriertransformierte, Laplacetransformierte...

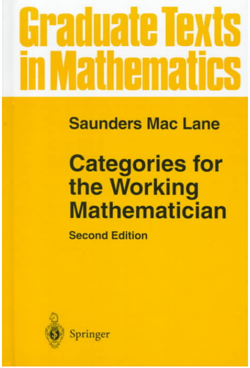
Es geht aber auch etwas verloren: Einfacher Zugang z.B., Schulmathematik reicht nicht aus.

Oder: Produkte von Distributionen sind nicht unbedingt wieder Distributionen.

Daher z.B. in "Mathematische Methoden der Biowissenschaften III" *keine* Distributionen, sondern herkömmliche Funktionen. Eine andere Verallgemeinerung:

Kategorientheorie

- Saunders MacLane, Samuel Eilenberg (1945)
- Kategorientheorie: Erweiterung der Algebra
- Kategorien
  - Klasse $\mathcal{C}$ von Objekten
  - Klasse von Pfeilen (Morphismen) (Elemente von Mengen zu jedem Paar von Elementen aus $\mathcal{C}$)
  - Abgeschlossene Verknüpfung von Pfeilen: $f \circ g$ ist Pfeil
  - Assoziative Verknüpfung von Pfeilen: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
  - Identitätspfeil: $\forall A \in \mathcal{C}: \; id_A(x) = x$ ist Pfeil
- Funktoren
  - strukturerhaltende Abbildungen zwischen

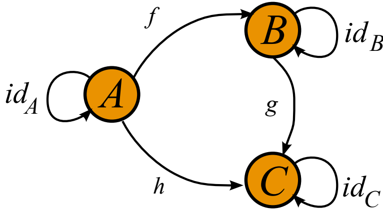


Kategorie:

- $\mathcal{C}$: Klasse von Objekten, hier: $\{A, B, C\}$.
- Klasse von Pfeilen: $\{id_A, id_B, id_C, f, g, h\}$.

Kann z.B. sein:

- A, B, C Vektorräume, f, g, h lineare Abbildungen
- A, B, C Gruppen, f, g, h Homomorphismen
- A, B, C Zahlen, Pfeil für $\leq$ (hier: $A \leq B \leq C$)
- A, B, C Haskell-Programme, id_A ist `id :: A->A`. Und `f :: A->B` usw.

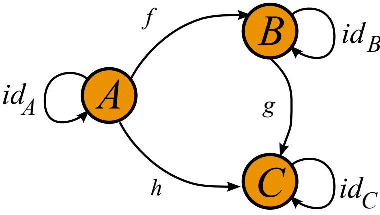


Kategorie:

- $\mathcal{C}$: Klasse von Objekten
- Klasse von Pfeilen

Kann z.B. sein:

- Kategorie **K-Vekt** alle Vektorräume über K mit lin. Abb.
- Kategorie **Grp**: alle Gruppen mit Homomorphismen.
- Kategorie **Z**: $(\mathbb{Z}, \leq)$.
- Kategorie **Hask**: alle Haskell-Typen mit allen Haskell-Programmen



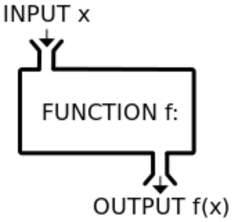
Funktoren sind nun (strukturerhaltende) Abbildungen zwischen Kategorien. $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ ist Funktor, wenn:

- Objekte werden Objekte
- Pfeile werden Pfeile
- $F(id_A) = id_{F(A)}$ für alle $A \in \mathbf{X}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle Pfeile f, g

Damit lassen sich Ergebnisse aus dem einen "Reich" (z.B. Gruppen) in Ergebnisse aus einem anderen "Reich" (z.B. topologische Räume) übersetzen. Insbesondere hilfreich bei "was sind die richtigen Definitionen?"

$$f : M \to N, x \mapsto f(x)$$

Sowohl Distributionen als auch Pfeile und Funktoren sind also Verallgemeinerungen von "Funktion". Es gibt noch andere Verallgemeinerungen des Funktionenbegriffs, mehr oder weniger erfolgreich.



Eine sehr kurze Geschichte der Mathematik

(aus: *Panorama der Mathematik*, A. Loos und G.M. Ziegler)

- Bis 500 v.Chr.: “Wissenschaft von den Zahlen”, dominiert von praktischer Anwendung.
- 500-300 v.Chr.: Griechische Mathematik nimmt Zahlen als (Längen-)Maße wahr. Die Griechen finden einen geometrischen Blick auf die Dinge. Anwendungen sind nicht mehr der einzige Grund, um Mathematik zu studieren: Sie wird zu einer intellektuellen Beschäftigung, die religiöse und ästhetische Elemente in sich vereint.
- 17. Jahrhundert: Die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung führte zu einem neuen, gewaltigen Schub in den Anwendungen, denn nun können erstmals nicht-statische Probleme angepackt werden. “Nach Newton und Leibniz wurde Mathematik zu einem Studium von Zahlen, Formen, Bewegung, Änderung und Raum.”

Eine sehr kurze Geschichte der Mathematik

- 18./19. Jahrhundert: Die Mathematik beginnt sich in der Folge von der Physik abzulösen und zu einer eigenständigen Wissenschaft zu entwickeln, die die mathematischen Werkzeuge untersucht, die in der Zeit zuvor entwickelt wurden.
- 20. Jahrhundert: Es findet eine Wissenexplosion statt. Neue Gebiete (Kategorientheorie, Kombinatorik, Theoretische Informatik...) Manches ist *"abstract nonsense"* und wird vergessen; mnaches ist abstract nonsense und nützlich, manches ist von Vornherein nützlich ("Angewandte Mathematik": Optimierung, Biomathe,...).

Eine extrem kurze Geschichte der Mathematik