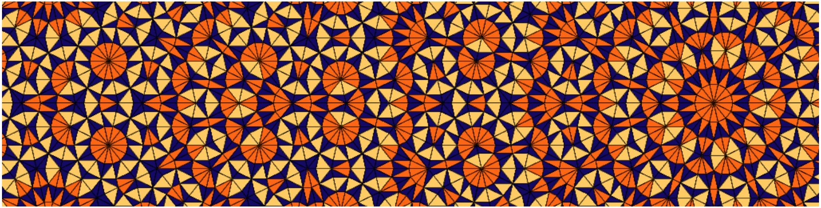
Panorama der Mathematik und Informatik

23: Mathe und Informatik in Film und Buch I: Die Simpsons

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / Richtig Einsteigen

7.7.2015



Es gibt viele schlimme Beispiele für Mathe und Informatik in den Medien. (Informatik ist schwieriger abzugrenzen.)

Auch etliche gute, siehe dazu z.B.:

- **Science Cinema** der TechFak (Ipke Wachsmuth, Julia Fröhlich) *Moon, Her, Ex Machina...*
- Technik- und mathe-affine Buchautoren (s.u.)
- Burkard Polster, Marty Ross: “Maths Goes to the Movies” (über etliche Filme mit Mathebezug, gute und schlechte)

Heute: zwei konkrete Beispiele (TV-Serie: Die Simpsons, Film: CUBE) sowie ein paar "Tech-Fiction"-Autoren.

Die Simpsons

Simon Singh: *Homers letzter Satz*, Hanser (2013)

Gut lesbares und unterhaltsames Buch über Mathematik bei den Simpsons.

Die Simpsons: Satire auf die USA und die Gesellschaft. Start 1989 (D: 1991 im ZDF (!)).

Am längsten laufende "scripted prime time television series" der USA.

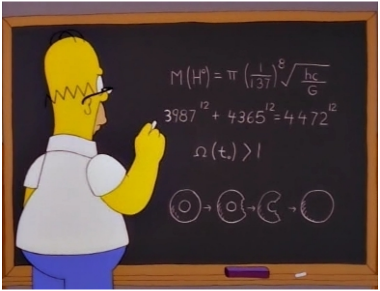
Einfluss auf Alltagskulter, z.B. Neologismen: "D'oh", "cromulent" "embiggen", "yoink", "craptacular", "I, for one, welcome our new insect overlords"

Erfinder: Matt Groening.

Einige **Autoren**:

J. Stewart Burns	B.Sc. Mathematik, Harvard M.Sc. Mathematik, Berkeley
David S. Cohen	B.Sc. Physik, Harvard M.Sc. Informatik, Berkeley
Al Jean	B.Sc. Mathematik, Harvard
Ken Keeler	B.Sc. Angew. Mathematik, Harvard Ph.D. Angew. Mathematik, Harvard
Jeff Westbrook	B.Sc. Physik, Harvard Ph.D. Informatik, Princeton

y= r3/3
Dy= 32DR/3
r2Dr



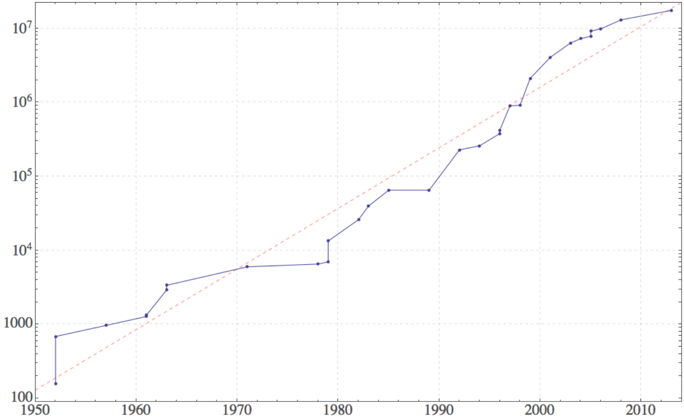
M(H°) = π (1/137)8 √(hc/G)
398712 + 436512 = 447212
Ω(t0) > 1


TONIGHT'S ATTENDANCE:
A) 8,191
B) 8,128
C) 8,208
D) No way to tell
JUMBO - VISION

8191

8191: $2^{13}-1$. Primzahl der Form 2^p-1 (wobei auch p Primzahl). So eine Zahl heißt *Mersenne-Primzahl* M_p.

Primzahljagd (nach der größten bekannten Primzahl) heute mit dem Computer. Man testet gerne 2^p-1, ob's Primzahl ist.



Die 10 größten bekannten Primzahlen (Stand Feb 2013) sind Mersenne-Primzahlen M_p.

Rekordhalter: $M_{57885161} = 2^{57885161} - 1$ mit 17 425 170 Dezimalstellen. (Great Internet Mersenne Prime Search (**GIMPS**))

Alte Rekorde: (fast immer war die größte bekannte Primzahl eine Mersenne-Primzahl)

	Dezimalstellen	Jahr	
M_{127}	39	1876	Edouard Lucas
$180 \cdot (M_{127})^2 + 1$	79	1951	EDSAC computer
M_{2281}	687	1952	(Computer)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$M_{13466917}$	4 053 946	2001	GIMPS
$M_{20996011}$	6 320 430	2003	GIMPS
$M_{32582657}$	9 808 358	2006	GIMPS
$M_{43112609}$	12 978 189	2008	GIMPS
$M_{57885161}$	17 425 170	2013	GIMPS

8128

Perfekte Zahl: Summe ihrer Teiler.

Teiler von 6: 1,2,3, und $1 + 2 + 3 = 6$.

Teiler von 28: 1,2,4,7,14, und $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

Teiler von 8128: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064.

$$1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064 = 8128$$

Zusammenhang perfekt $\leftrightarrow$ Mersenne-Primzahl.

Euklid: Ist $2^p - 1$ eine Mersenne-Primzahl, so ist $2^{p-1}(2^p - 1)$ perfekt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} p = 2: &\quad 2^1(2^2 - 1) = 6 \\ p = 3: &\quad 2^2(2^3 - 1) = 28 \\ p = 5: &\quad 2^4(2^5 - 1) = 496 \\ p = 7: &\quad 2^6(2^7 - 1) = 8128 \end{aligned}$$

Euler: alle **geraden** perfekten Zahlen sind von dieser Form.

Offene Probleme:

- Gibt es ungerade perfekte Zahlen?
- Gibt es unendlich viele perfekte Zahlen?

8208

Narzisstische Zahl.

$$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$

Auch z.B.:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$

$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

$$\text{sowie} \quad 1 = 1^1, 2^1 = 2, 3^1 = 3, \ldots, 9^1 = 9.$$

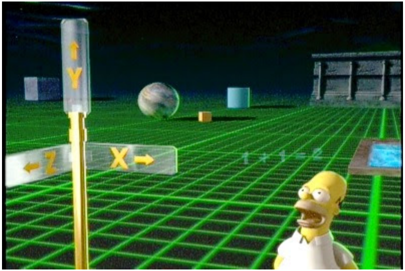
Es ist bekannt, dass es nur endlich viele narzisstische Zahlen gibt: 88 Stück. Viele solcher und ähnlicher Konzepte in:
`http://www2.stetson.edu/~efriedma/numbers.html`
D. Wells: *Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*

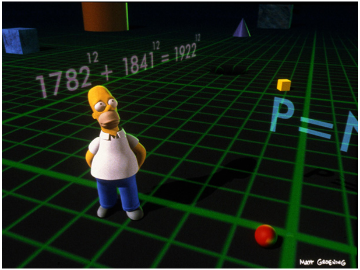
Neben vielen kleinen weiteren Andeutungen...

- Fußball aus Sechsecken (s.o.)
- "π ist genau drei!" (ruft Prof. Frink, um einen Saal voller Wissenschaftler zum Schweigen zu bringen)
- "Ihre Ansicht eines Donut-förmigen Universums ist durchaus interessant" (Stephen Hawking, Gastauftritt, gesprochen von ihm bzw seinem Sprachcomputer)
- "Ich kann π bis auf 40000 Stellen aufsagen. Die letzte Ziffer ist 1." (Apu in "Marge wird verhaftet")
- Acht Finger, aber Dezimalsystem (nur Gott hat 10 Finger!)

...auch ganze Episoden.

- “The Lisa Series” (2010): Baseball und Statistik
- “Gleichungen mit einem Unbekannten” (2006): Mädchen und Mathematik
- “Homer^3”: Eine computeranimierte Halloween-Episode (s.u.)





Homer^3

Animationen gratis geliefert von PDI. Führte zu Kooperation mit (und letztlich Übernahme durch) DreamWorks:

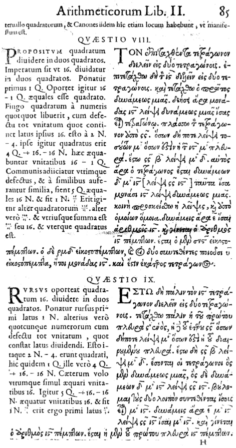
Antz (1998), *Shrek* (2001), *Madagascar* (2005)...

Andeutungen aus Mathe, Informatik, Physik:

- P=NP
- Russells Teekanne, bzw. Utah Teapot
- $e^{\pi i} = -1$
- 46 72 69 6E 6B 20 72 75 6C 65 73 21 (ASCII-Code)
- $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$.

Fermats letzter Satz

Berühmte Aussage von Pierre Fermat (1637):


Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. Erit igitur alter quadratorum . alter verò . & vtriusque summa est seu 16. & vterque quadratus est.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. erit ergo primi latus

H

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

"Es gibt für $n \geq 3$ keine Lösung der Gleichung $a^n + b^n = c^n$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ich habe einen wunderbaren Beweis dafür, aber der Rand hier ist zu klein, ihn zu fassen."

Es gab über die Jahre viele Versuche, den Beweis zu liefern.

- Für $n = 4$: Fermat. Damit muss man's nur noch für ungerade Primzahlen $n = p$ zeigen.
- $p = 3$: Euler (1770) und viele andere.
- $p = 5$: Legendre, Dirichlet, unabhängig voneinander ca 1825, und viele andere.
- $p = 7$: Lamé (1839), Lebesgue (1840), und viele andere.
- $n \leq 100$: Sophie Germain (um 1823).
- $p \leq 125000$: Wagstaff (1978, Computer).
- $p \leq 4000000$: (1993, Computer)

Endgültig bewiesen durch **Andrew Wiles** (geb. 11.4.1953) um 1994.

Simon Singh: *Fermats letzter Satz* (1997) erzählt die Geschichte.

Andrew Wiles' Beweis: 1993 präsentiert, enthielt einen Fehler, der konnte von ihm im Herbst 1994 repariert werden.

Außergewöhnlich ist, dass heute ein einzelner Mathematiker allein einen solchen Durchbruch erzielt. (OK, er baute auf etlichen tiefen Vorarbeiten auf, insbesondere Ribets Satz und der Taniyama-Shimura-Weil-Vermutung)

Dennoch ist Wiles' Arbeit titanisch. Leider war er zum Zeitpunkt des endgültigen Beweises bereits 41.

Fieldsmedaille: Bedeutende Auszeichnung für (reine) Mathematiker, IMU, zwei bis vier Preisträger alle vier Jahre. ("Nobelpreis für Mathematik", aber das sagt man auch zum **Abelpreis**)

Wird nur verliehen an Leute, die am 1. Januar des Verleihungsjahres unter 40 Jahre alt sind. Bei Wiles:
Sommer 1994: Beweis hat Lücke (und Wiles ist schon 41)
Sommer 1998: Wiles ist 45 Jahre alt.

Die Fieldsmedaille gibt's für reine Mathematik.

Weitere wichtige Preise:

- **Turingpreis**: Informatik (ACM, jährlich, "Nobelpreis für Informatik").
- **Nevanlinnapreis**: math. Informatik (IMU, alle vier Jahre, Preisträger unter 40 Jahre)
- **John von Neumann-Medaille**: angewandte Informatik (IEEE, jährlich)
- **Abelpreis**, **Wolfpreis**: reine Mathematik (jährlich).

Preisgelder von ca 10 000 Euro (Fieldsmedaille) bis ca 1 000 000 Euro (Abelpreis).

Clay Millennium Prize

Anderer Ansatz: Das Clay-Institut (L.T. Clay: reicher Geschäftsmann) setzt im Jahr 2000 Preis von je 1 Mio \$ aus für den Beweis von

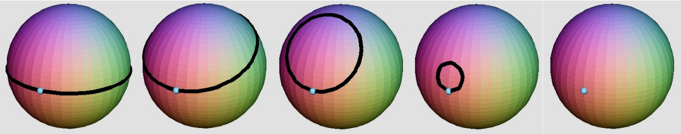
- $P \neq NP$
- Hodge conjecture
- Poincaré conjecture (solved)
- Riemann hypothesis
- Yang–Mills existence and mass gap
- Navier–Stokes existence and smoothness
- Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

(vgl. auch Hilberts 23 Probleme)

CLAY
MATHEMATICS
INSTITUTE

Neben Wiles einer der wenigen Mathematiker, der es in die Nachrichten geschafft hat:

Grigori Perelman (St. Petersburg, geb. 1966)
Bewies 2003 die Poincaré-Vermutung.



Bedingung für den Millenniumpreis ist Publikation in einer renommierten Fachzeitschrift. Perelman publiziert seinen Beweis nur auf `arxiv.org`.

Dennoch wird er von Experten begutachtet bzw. nachvollzogen. 2006 soll Perelman dafür die Fieldsmedaille bekommen; er lehnt ab.

Das gibt ein Presseecho:
G. Szpiro: Genialer Einsiedler, *Neue Zürcher Zeitung* 23.7.2006
S. Nasar, D. Gruber: Manifold Destiny, *The New Yorker* 28.8.2006.

...aber wir schweifen ab.

Simpsons:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12} \quad \text{und} \quad 3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}$$

sind Gegenbeispiele zu Fermats letztem Satz. Echt?

$$\sqrt[12]{1782^{12} + 1841^{12}} = 1921.9999999558672...$$
$$\sqrt[12]{3987^{12} + 4365^{12}} = 4472.0000000070592...$$

Die Zahlen sind so gewählt, dass ein Taschenrechner mit 8 oder 10 Stellen die Zahlen als gleich ansieht.

Bei der ersten allerdings: gerade + ungerade = gerade, Widerspruch.

Das Futurama-Theorem

Am deutlichsten zeigt sich der mathematische Hintergrund der Autoren aber in Futurama (1999-2013).

Ein Höhepunkt: Ein mathematischer Satz, der von Ken Keeler für Futurama gefunden und bewiesen wurde.

Ausgangslage: Die Körpertauschmaschine ("Im Körper des Freundes", 2010). Mit dieser Maschine können zwei Personen (bzw Roboter) ihren Körper tauschen. Aber wegen eines Defekts kann dasselbe (Körper-)Paar niemals wieder tauschen. Folgende *Körper* tauschen im Laufe der Folge ihre aktuellen Personen:

Prof $\leftrightarrow$ Amy, Amy $\leftrightarrow$ Bender, Prof $\leftrightarrow$ Leela, Amy $\leftrightarrow$ Wash Bucket, Fry $\leftrightarrow$ Zoidberg, Leela $\leftrightarrow$ Hermes, Wash Bucket $\leftrightarrow$ Kaiser

Fragen:

- Kann jeder wieder in seinen ursprünglichen Körper zurück?
- Braucht man dazu Hilfskörper?
- Wieviele in diesem Beispiel?
- Wieviele im Allgemeinen?

Theorem (Keeler)

Zwei Hilfskörper reichen immer.

Beweisskizze: Schreibe alles als **Permutation**. Betrachte die einzelnen Zykel (Zusammenhangskomponenten, im Bsp. oben: { Fry, Zoidberg }, { alle andern }).

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

(D.h.: nummeriere die Personen so, dass Person 1 in Körper 2 ist, Person 2 in Körper 3 usw.)

Führe die beiden neuen Körper x und y ein und schreibe:

$$\pi^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & x & y \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 & x & y \end{pmatrix}.$$

Sei $\sigma = (x\ 1)(y\ 2)(y\ 3)\cdots(y\ n)(x\ 2)(y\ 1)$. D.h.: tausche y und 1, x und 2 usw. Von hinten nach vorn durchführen!

Hier werden jedesmal nur die neuen Körper x und y mit anderen getauscht, daher Bedingung erfüllt. Berechne

$$\pi^*\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & x & y \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n & y & x \end{pmatrix}.$$

Das ist das gewünschte Ergebnis.
Sorgfältig zusammensetzen, am Ende evtl x und y tauschen, fertig.

In der Sendung stellen zwei Basketballer, Tate und Clyde, den Beweis vor und tauschen die Körper dem Beweis folgend wieder zurück (selbst als Hilfskörper x und y dienend).

Der Satz steht auf wikipedia, der Beweis wurde nicht wirklich publiziert. Allerdings:

Ron Evans, Lihua Huang, Tuan Nguyen: Keeler's theorem and products of distinct transpositions, *Amer. Math. Monthly* 121 (2014), 136-144

Die stellen einen Algorithmus für die effizienteste Lösung vor.

Es gibt noch einen Dreh: Im konkreten Beispiel oben würde es ohne Hilfskörper klappen: Fry und Zoidberg könnten als diese dienen, und hätten nach dem Entwirren der anderen Körper selbst auch ihre eigenen Körper wieder.