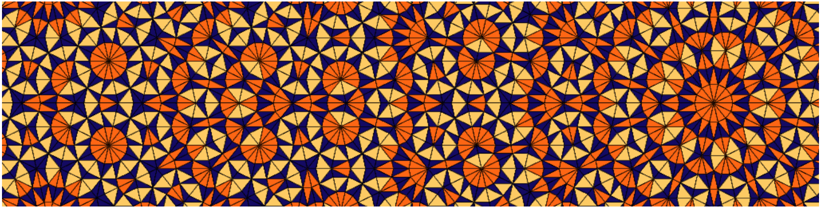
Panorama der Mathematik und Informatik

2: Geschichte: Antike

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät



Recall: Bei den alten Griechen: erstmals Beweise (nicht nur Rechenanleitungen = Algorithmen). Themen:

- Geometrie (z.B. Satz des Pythagoras, Konstruktion mit Zirkel und Lineal...)
- Zahlentheorie (Quadratsummen, irrationale Zahlen, Primfaktorzerlegung...)
- Algorithmen, Näherungsrechnung (z.B. euklidischer Algorithmus, Approximation Kreisfläche oder Quadratwurzel...)

Noch ein Beispiel für einen antiken Satz und Beweis (etwas untypisch, da nicht geometrisch):

Satz von Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Widerspruchsbeweis. (wikipedia)

"Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Es sei m das Produkt aller dieser Zahlen. Betrachten wir nun $m + 1$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:
1. $m + 1$ ist eine Primzahl. Sie ist dann nach Konstruktion größer als $p_1, \dots, p_n$ und somit eine weitere Primzahl im Widerspruch zur Annahme.
2. $m + 1$ ist keine Primzahl. Sie muss daher einen Primteiler q besitzen. Nach Annahme muss q dann eine der Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ sein, und folglich Teiler von m. Als Teiler von m und von $m + 1$ müsste q aber auch die Differenz, also 1, teilen. Da 1 keinen Primteiler besitzt, ergibt sich ein Widerspruch. Die Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, ist also falsch."

Euklidischer Algorithmus:

"[The Euclidean algorithm] is the granddaddy of all algorithms, because it is the oldest nontrivial algorithm that has survived to the present day." Donald Knuth, The Art of Computer Programming.

Ziel: Größter gemeinsamer Teiler. Z.B. von 322 und 138.

Algorithmus: Input: $a > b$ positive ganze Zahlen.

1. Ziehe b von a wiederholt ab, bis das Ergebnis c kleiner als b ist.
2. $c = 0$: STOP. Ausgabe b.
3. Sonst $a := b$, $b := c$, weiter bei 1.

Bsp.: 1. $322 - 138 = 184$, $184 - 138 = 46$, 2. $138 - 46 = 92$, $92 - 46 = 46$, $46 - 46 = 0$. STOP. Ausgabe 46.

Heronverfahren: Näherung für Quadratwurzel aus $a > 0$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}, \quad x_0 \neq 0.$$

Dann $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Bsp.: $\sqrt{9} =?$

$$x_0 = 5$$

$$x_1 = \frac{5 + \frac{9}{5}}{2} = \frac{\frac{34}{5}}{2} = \frac{34}{10} = 3{,}4$$

$$x_2 = \frac{\frac{34}{10} + \frac{9}{\frac{34}{10}}}{2} = \frac{\frac{34}{10} + \frac{90}{34}}{2} = \frac{257}{85} = 3{,}0235294\ldots$$

$$x_3 = \frac{\frac{257}{85} + \frac{9}{\frac{257}{85}}}{2} = \frac{\frac{257}{85} + \frac{765}{257}}{2} = \frac{65537}{21845} = 3{,}000091554\ldots.$$

Sinnvoll zu implementieren! Zahl der korrekten Stellen verdoppelt sich in jedem Iterationsschritt.

Ein Höhepunkt: Euklid's *Elemente* (Band 1-13).

Axiomatischer Aufbau: Definitionen und Axiome, Satz, Beweis.

wikipedia: "Dieses Vorgehen beeinflusste bis heute nicht nur die Mathematiker, sondern auch viele Physiker, Philosophen und Theologen bei ihrem Versuch, ihre Wissenschaft auf Axiomen aufzubauen.
Die Elemente wurden 2000 Jahre lang als akademisches Lehrbuch benutzt und waren bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meistverbreitete Werk der Weltliteratur."

Buch 1-6: Flächengeometrie, u. a. kongruente und ähnliche Figuren

- Buch 1: Von den Definitionen bis zum Satz des Pythagoras
- Buch 2: Geometrische Algebra
- Buch 3: Kreislehre
- Buch 4: Vielecke
- Buch 5: Irrationale Größen
- Buch 6: Proportionen

Buch 7-9: Arithmetik, u. a. Zahlentheorie und Proportionenlehre

- Buch 7: Teilbarkeit und Primzahlen
- Buch 8: Quadrat-, Kubikzahl und geometrische Reihen
- Buch 9: Gerade und ungerade Zahlen

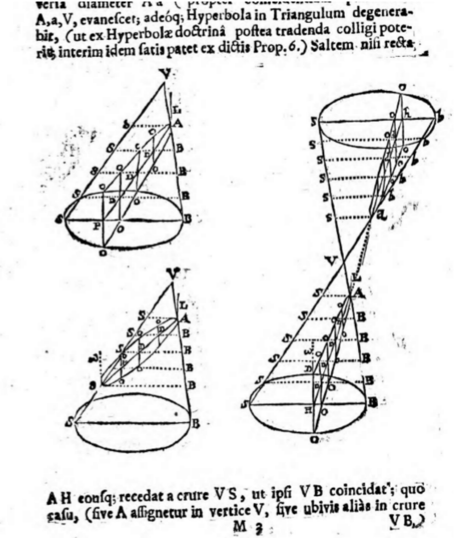
Buch 10: Geometrie für inkommensurable Größen
Buch 11-13: Raumgeometrie

- Buch 11: Elementares zur Raumgeometrie
- Buch 12: Exhaustionsmethode
- Buch 13: Die fünf gleichmäßigen Körper

Euklids *Elemente* bieten eine Übersicht über die Themen der alt-griechischen Mathematik.... bis 300 v. Chr.
Danach gab es noch ein paar weitere Höhepunkte:

- **Archimedes** (287-212 v.Chr.): Kreisfläche, Parabelfläche mit Exhaustionsmethode; Winkeldreiteilung (mit Einschiebung); Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks; Kugelvolumen
- **Eratosthenes** (um 240 v.Chr.): Sieb des Eratosthenes; Berechnung des Erdumfangs; Entwurf einer Erdkarte
- **Apollonius** (ca. 262-ca. 190 v.Chr.): **Kegelschnitte**
- **Diophantos** (um 250 n.Chr.): Bestimmte und unbestimmte Gleichungen bis zu sechstem Grad mit ganzzahligen Lösungen (**diophantische Gleichungen**); Systeme solcher Gleichungen; Variablen

Kegelschnitte: Schnitt einer Ebene mit einem *Kegel*:

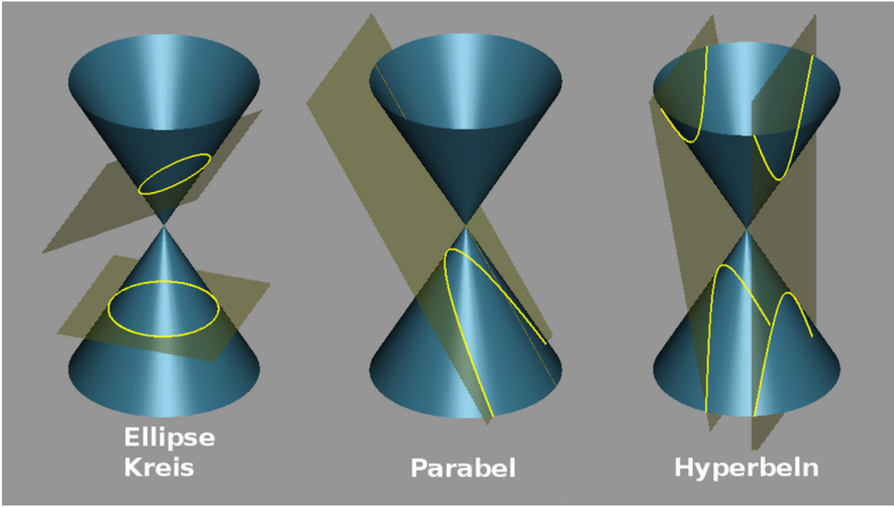


A,a,V, evanescet; adeóq; Hyperbola in Triangulum degenerabit, (ut ex Hyperbolæ doctrinâ postea tradenda colligi poterit; interim idem satis patet ex dictis Prop. 6.) Saltem nisi recta

A H consq; recedat a crure V S, ut ipsi V B coincidat; quo casu, (sive A assignetur in vertice V, sive ubivis aliàs in crure V B,)

M 3

Treatise on the Conic Sections, John Wallis 1655


Ellipse
Kreis
Parabel
Hyperbeln

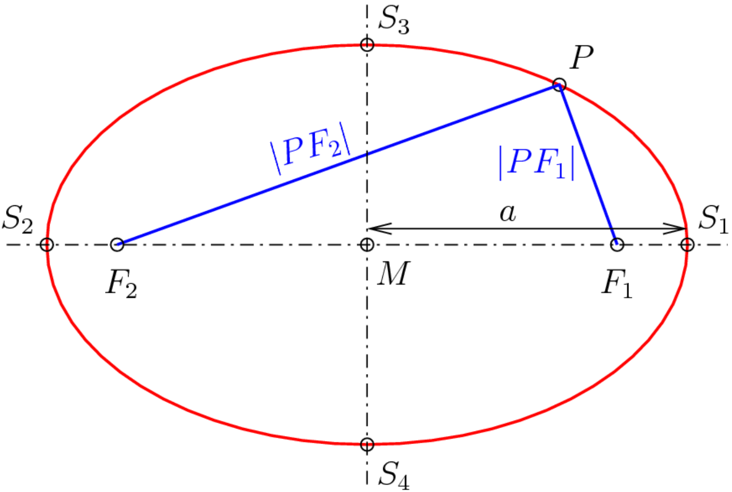
Quizfrage: Was gibt's außerdem für Fälle?

Diese drei Arten von Kurven können verschieden definiert werden. Entweder als Kegelschnitte ("Schnitt eines Kegels mit einer Ebene"). Oder durch zwei Brennpunkte F_1 und F_2, oder analytisch (das ist im Prinzip dasselbe, nur anders formuliert). Zum Beispiel die **Ellipse**:

Def 1: als Kegelschnitt.

Def 2: alle Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, bei denen die Summe der Abstände $|PF_1| + |PF_2|$ gleich einer festen Zahl ist.

Def 3: kongruent zu $\{(x, y)^T \mid \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1\}$ $(b \geq a > 0)$



$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

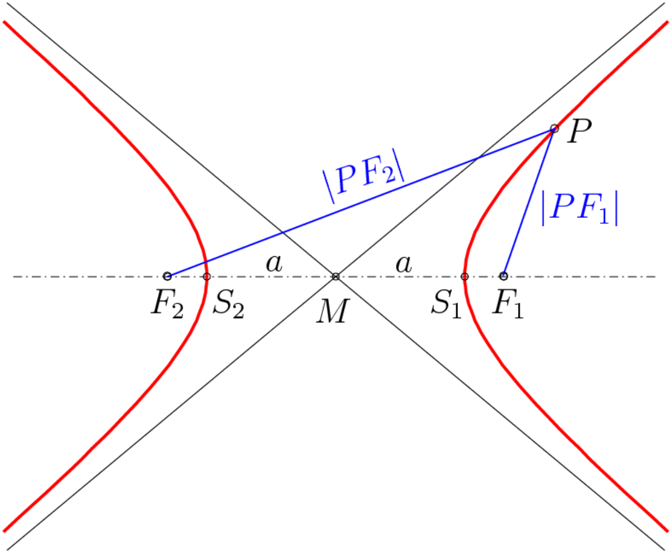
- Eine Ellipse hat zwei Spiegelachsen
- die “Brennpunkte” heißen so, weil ein Lichtstrahl, der von einem Brennpunkt F_1 ausgeht und von der Wand der Ellipse relektiert wird, durch den anderen Brennpunkt F_2 geht.
- Spezialfall: Kreis, falls $F_1 = F_2$ bzw $a = b$.

Definition einer **Hyperbel:**

Def 1: als Kegelschnitt.

Def 2: alle Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, bei denen die Differenz der Abstände $|PF_1| - |PF_2|$ gleich einer festen Zahl ist.

Def 3: kongruent zu $\{(x, y)^T \mid \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1\}$ $(b \geq a > 0)$



$$||PF_2| - |PF_1|| = 2a$$

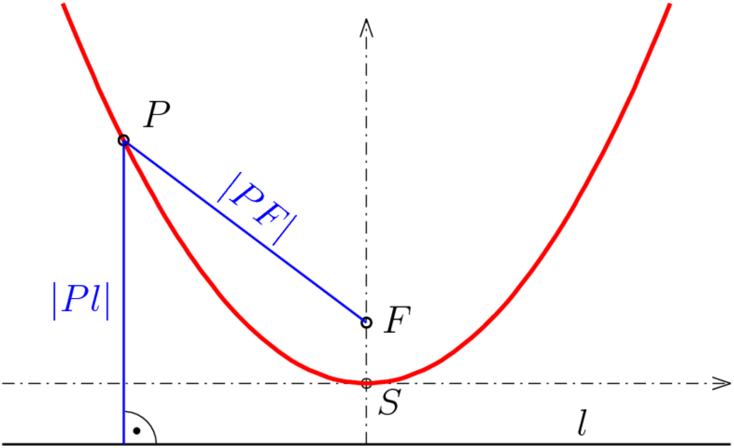
- Eine Hyperbel hat zwei getrennte Teile, die zwei “Äste”
- und zwei Spiegelachsen
- und zwei Asymptoten: Geraden, denen sich die Hyperbeläste annähern.
- Ein Lichtstrahl, der durch einen der Brennpunkte gehen würde, aber von der Hyperbel reflektiert wird, trifft den anderen Brennpunkt.

Definition einer **Parabel:**

Def 1: als Kegelschnitt.

Def 2: alle Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, bei denen der Abstand $|PF_1|$ gleich dem Abstand $|P\ell|$ ist (ℓ ist eine Gerade)

Def 3: kongruent zu $\{(x, y)^T \mid y = ax^2\}$ $(a > 0)$



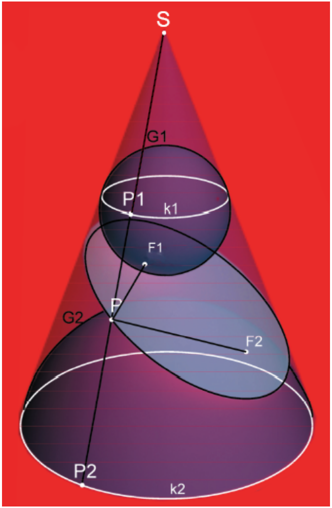
$$|PF| = |Pl|$$

- Eine Parabel hat nur einen “Ast”
- und nur eine Spiegelachse
- und keine Asymptoten: es gibt keine Gerade, der sich die Parabel annähert.
- Jeder Lichtstrahl, der parallel zur Spiegelachse einfällt, wird in den Brennpunkt reflektiert (Parabolspiegel!)

All diese Eigenschaften können/sollten bewiesen werden.

Zur Illustration: der Beweis, dass Def 1 und Def 2 einer Ellipse tatsächlich dasselbe liefern. Genauer: Def 1 implizert Def 2. (Analoger Trick klappt auch für Hyperbeln)

Trick: die *Dandelinschen Kugeln* (nach Germinal Pierre Dandelin, 1794-1847).



Plazier eine Kugel im Kegel so, dass sie die Ebene von oben berührt (in einem Punkt F_1) und den Rand des Kegels in einem Kreis k_1 schneidet.
Dito von unten, berührt Ebene im Punkt F_2, schneidet Kegel im Kreis k_2.
Nimm irgendeinen Punkt P auf dem Kegelschnitt.
Abstände: $|PF_1| = |PP_1|$ (denn PF_1 ist Tangente an Kugel, PP_1 auch)
Dito $|PF_2| = |PP_2|$.
Also $|PF_1| + |PF_2| = |PP_1| + |PP_2|$.
P liegt auf der Geraden durch P_1 und P_2 (und S).

Egal, wie wir P gewählt haben, $|PF_1| + |PF_2|$ ist also immer gleich dem Abstand von P_1 und P_2, also gleich dem Abstand der beiden Kreise k_1 und k_2. Also immer gleich.

Bei Apollonius findet man solche Beweise für alte und eigene Resultate:

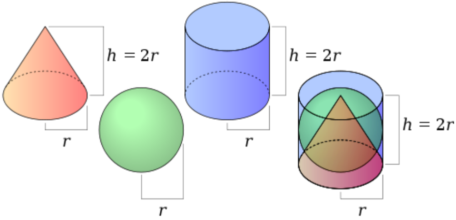
- Konstruktion
- Asymptoten der Hyperbel angeben
- Brennpunkte angeben
- Je zwei Kegelschnitte haben maximal 4 Schnittpunkte
- Ähnliche Kegelschnitte
- ...und etliches mehr

Ein anderer Großer: Archimedes von Syrakus. ("Eureka": Auftrieb, "Gebt mir einen festen Punkt, und ich hebe die Welt aus den Angeln": Hebelgesetze, Kreisfläche $\leftrightarrow$ Kreisdurchmesser, *Der Sandrechner*)

Archimedes' Trick: "mechanische" Methode: erst praktisch, dann theoretisch. Z.B erst wiegen/messen, dann Formel beweisen.

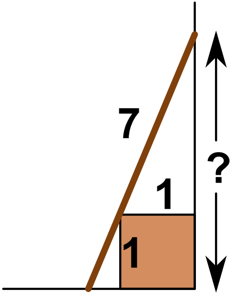
Z.B. Volumen Zylinder : Volumen Kugel : Volumen Kegel = 3:2:1

Diese Idee kann man durch wiegen bekommen, oder Flüssigkeit messen, oder... und dann exakt beweisen.



Schon bei den Griechen der Antike: Wert auf Strenge und Exaktheit.

Wie exakt ist exakt? Zur Illustration: die Leiteraufgabe



- Ingenieur: Ziemlich genau 6,90 m.
- Informatiker: Wie viele Stellen? 6,90162289514212...
- Mathematiker: $\frac{\sqrt{50}-1}{2}+\sqrt{\frac{(\sqrt{50}-1)^2}{4}-1}.$

Was gilt eigentlich als Beweis?

"A proof is any completely convincing argument." (Errett Bishop)

Genaugenommen ändert sich das über die Jahrhunderte. Die eigentliche Grundidee finden wir bei Euklid:

- Ausgehend von einigen Axiomen und Definitionen ziehen wir legale Schlüsse (Logik!), bis wir das Resultat erhalten.
- Bereits bewiesene Resultate dürfen genutzt werden.
- Beispiele dazu oben, oder in den Übungen.

Strenge ist wichtig: ein einmal bewiesenes Resultat ist ewig gültig.

Auf bereits bewiesenen Resultaten kann man weiter aufbauen.

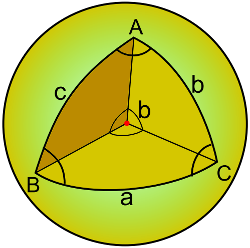
Auch Abstraktion ist von Vorteil: je allgemeiner die Voraussetzungen, desto allgemeiner der Geltungsbereich des Resultats.
("Sei G eine lokal kompakte abelsche Gruppe...", gemeint sind im Prinzip nur drei Sorten: $\mathbb{R}^d, \mathbb{Q}_p^d$, kompakte)

Obacht:

beim Verallgemeinern muss man aufpassen. Manche als wahr angenommene Dinge stellen sich in einem breiteren Rahmen als falsch heraus.

- In einem Dreieck ist die Winkelsumme 180°.
- Hat Dreieck A genau die doppelten Seitenlängen von Dreieck B, so haben A und B die gleichen Winkel.
- Jede ganze Zahl hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren ("Eindeutige Primfaktor-Zerlegung", EPZ).

Die ersten beiden Punkte sind falsch in der sphärischen Geometrie (ebene Geometrie auf der Kugeloberfläche).



Der dritte Punkt ist falsch in anderen Zahlringen. Es gibt z.B. auch die ganzen komplexen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

(OK, da gilt noch EPZ), oder allgemeiner

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Hier gilt keine EPZ! Z.B. $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$.

(Das kam viel später, 19. Jhdt., Stichworte "Fermats letzter Satz", "ideale Zahlen")

Nach den alten Griechen kam das finstere Mittelalter...