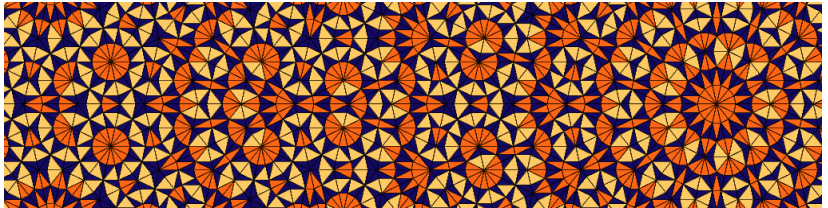


7: Don Knuth II

Dirk Frettlöh
Technische Fakultät / richtig einsteigen



Recall: Bei **kombinatorischen** Problemen sucht man:

- ▶ Rekursionsgleichung (gut)
- ▶ Erzeugende Funktion (besser)
- ▶ Geschlossene Formel (am besten)

Catalanzahlen: Rekursion:

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_0, \quad c_0 = 1, c_1 = 1.$$

Erzeugende Funktion:

$$C(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}}$$

Geschlossene Formel:¹

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! n!} = \prod_{k=2}^n \frac{n+k}{k}$$

¹etwas, wo nur n eingesetzt werden muss

Erzeugende Funktionen

Wie findet man das? Ein Weg: Erzeugende Funktionen!

Dazu zunächst Wiederholung Mathe 1/2: Ein zentrales Thema:

(Viele) Funktionen lassen sich als Potenzreihen schreiben.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- ▶ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$
- ▶ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▶ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▶ $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$
- ▶ $x^2 = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \dots$

Wichtig in dem Zusammenhang: **Taylorreihe**.

Ist f unendlich oft differenzierbar, so ist die Taylorentwicklung (um den Punkt a)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

$$\text{bzw. } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$\text{also für } a = 0 : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Bsp:

- ▶ e^x
- ▶ x^2 (!)

Bei kombinatorischen Problemen mit Zählwerten a_0, a_1, a_2, \dots
sucht man nun $f(x)$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Erklärung am Beispiel der **Fibonaccizahlen**

Def.: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$

1 junges Hasenpaar in Monat 0 wird

1 altes Hasenpaar in Monat 1 wird

1 altes und 1 junges Hasenpaar in Monat 2 wird

2 alte und 1 junges Hasenpaar in Monat 3 wird

3 alte und 2 junge Hasenpaare in Monat 4 wird

5 alte und 3 junge Hasenpaare in Monat 5...

Insgesamt: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,... Paare.

geminat. sic fit in 10 mense paria 7 er quib' i uno mēse duo p̄gnant
 7 geminat in 10 mēse paria 7 conielox. sic fit paria 4 i 10 mē
 se. er quib' i 10 p̄gnat paria 7 7 fit i q̄rto mēse paria 8 er q̄b'
 paria 4 geminat alia paria 4 quib' addit cū parijs 8 faci
 ut paria 12 i q̄rto mēse. er q̄b' paria 4 q̄ geminata fuerit i 10
 mēse si capiat i 10 mēse h' alia 8 paria p̄gnant 7 sic fit i tertio mēse
 paria 21 cū q̄b' addit parijs 12 q̄ geminat i septimo erit i 10
 paria 24 cū quib' addit parijs 21 q̄ geminat i octavo mēse.
 erit i 10 paria 44 cū quib' addit parijs 24 q̄ geminat i no
 no mēse erit i 10 paria 80 cū quib' addit rurſū parijs 44
 q̄ geminat i decimo. erit i 10 paria 124 cū quib' addit rurſū
 parijs 80 q̄ geminat i undecimo mēse. erit i 10 paria 224
 cū q̄b' addit parijs 124 q̄ geminat in ultimo mēse. erit
 paria 448 7 tot paria pepit ſim par i p̄fato loco 7 capite uni
 ſim. potest ē unde i hao margine. qualr hoc opati ſum. s. q̄ ſum
 p̄mū nūm cū ſo uidet i cū 7 ſim ē t̄cio. 7 t̄ciu cū q̄rto. 7 q̄r
 tū cū q̄rto. 7 sic deſcept donec ſumū decimū cū undecimo. uidet
 124 cū 224. 7 hūm' ſtoz cuniclox ſumā uidet. 448
 7 sic poſſet face p̄ ordine de ſumit' mēſib'.

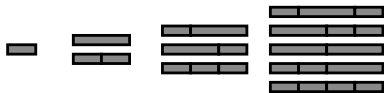
116
 117
 118
 119
 120

Quatuor hoſes ſit. quoz p̄m' ſed' 7 t̄ci hūc d̄ſioſ. ſed' itaq' 7 t̄ci 7 q̄r
 hūc d̄ſioſ 21 t̄ci 7 q̄r' p̄m' hūc d̄ſioſ 24 Er' n' p̄m' 7 ſf
 hūc d̄ſioſ 27 Er' q̄r' unq̄ſq' hūc. adde hoſ. unq̄. nuōſ i unū erit
 124 q̄ nūſ ē t̄plū totū ſumē d̄ſioz illoz. unq̄. hoīmū. Ideo q̄ i p̄m'
 ſumā unq̄ſq' eoz ē op̄tate ē q̄r d̄ſioſo 10 p̄ 7 reddet 7 p̄ eoz
 ſumā. er qua ſi erant d̄ſioſ p̄m' 7 ſf 7 t̄ci hūc 27 unq̄ mēſe

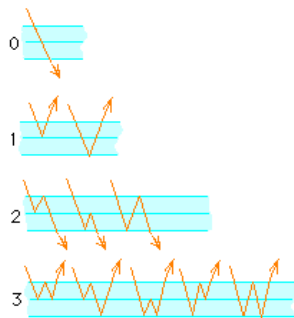
paria
 1
 p̄m'
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100

101
 102
 103
 104
 105
 106
 107
 108
 109
 110
 111
 112
 113
 114
 115
 116
 117
 118
 119
 120

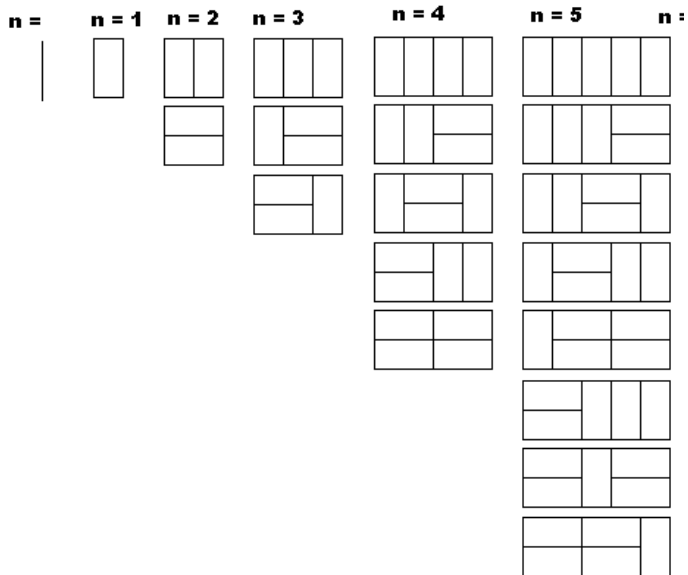
Oder: Anzahl der Möglichkeiten, ein Intervall der Länge n in Intervalle der Länge 1 und 2 zu teilen:



Oder Zahl der Möglichkeiten, wie ein Lichtstrahl in einem Doppelglasfenster $(n + 1)$ -mal reflektiert werden kann (\rightarrow)



...oder: Anzahl der Möglichkeiten, mit 2×1 -Dominos ein $2 \times n$ -Rechteck zu legen.



Ansatz: $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$

$$F(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \quad (1)$$

$$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^{n+2} \quad (2)$$

$$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} + f_n) x^{n+2} \quad (3)$$

$$= 1 + x + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} \quad (4)$$

$$= 1 + x + x \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (5)$$

$$= 1 + x + x \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + x^2 F(x) \quad (6)$$

$$= 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n + x^2 F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x) \quad (7)$$

Also

$$F(x)(1 - x - x^2) = 1, \text{ also } F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

In Sage: `taylor(1/(1 - x - x^2), x, 0, 8):`

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + O(x^8)$$

Klappt!

F ist die gesuchte **erzeugende Funktion**.

Für die **Geschlossene Formel**: F vereinfachen. Z.B. zu

- ▶ $\frac{1}{1-7x} = \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n$ (dann wäre $f_n = 7^n$), oder
- ▶ $\frac{21}{1-7x} + \frac{2}{1+5x} = 3 \cdot 7 \sum_{n=0}^{\infty} 7^n x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-5)^n x^n$
(dann wäre $f_n = 3 \cdot 7^{n+1} + 2 \cdot (-5)^n$)

Wo sind wir?

- ▶ **Rekursion:** klar, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$.
- ▶ **Erzeugende Funktion:** $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$ haben wir jetzt.
- ▶ **Geschlossene Formel:** (“closed form”) bestimmen wir nun aus der erzeugenden Funktion F .

Wegen $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$ hätten wir F gerne in einer Form wie

$$F(x) = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} + \dots$$

Ansatz: (recall Mathe 2) Partialbruchzerlegung!

Stelle Nenner dar als Produkt: $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$
(! Variante der Partialbruchzerlegung)

$$1 - 1x - 1x^2 = 1 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta x^2$$

Löse $\alpha + \beta = 1$ und $\alpha\beta = -1$, also $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 1$, also $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Gesucht: A, B mit

$$\frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x} = \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}$$

$$A(1 - \beta x) + B(1 - \alpha x) = 1$$

$$A - A\beta x + B - B\alpha x = 1 + 0 \cdot x$$

also (Koeffizientenvergleich)

$$A + B = 1, \quad -A\beta - B\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - B, \quad -(1 - B)\beta - B\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - B, \quad B(\beta - \alpha) = \beta$$

$$\stackrel{(\beta - \alpha = -\sqrt{5})}{\Leftrightarrow} A = 1 - B, \quad B = \frac{\beta}{-\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow A = 1 - \left(-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} (!), \quad B = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\beta}{1-\beta x} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) x^n
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die **Formel von Moivre-Binet** erhalten:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \quad \text{mit } \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \beta = \frac{-\sqrt{5}+1}{2},$$

Damit: wie verhalten sich die f_n für $n \rightarrow \infty$?

Da $\beta < 1$ gilt $\beta^n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$.

Also $f_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+1} \approx 0,4472 \cdot 1,608^{n+1}$.

Insbesondere: Fibonaccizahlen wachsen exponentiell.

Einige Werte der Approximation: $n = 7 : 12,984\dots$,
 $n = 8 : 21,009\dots$, $n = 9 : 33,994\dots$, $n = 10 : 55,003\dots$, ...,
 $n = 30 : 832040,000000024\dots$

Beispiele für erzeugende Funktionen

- ▶ Fibonaccizahlen: $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$
- ▶ verschobene Fibonacciz. ($f_0 = 0, f_1 = 1, \dots$): $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
- ▶ Catalanzahlen: $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$
- ▶ Dreieckszahlen: $\frac{x}{(1-x)^3}$
- ▶ $1, 1, 1, 1, 1, \dots$: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (auch: $\frac{x}{1-x}$)
- ▶ $1, 2, 3, 4, 5, \dots$: $\frac{x}{(1-x)^2}$
- ▶ n -te Binomialkoeffizienten:
 $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \dots$

Knuths Toilet Paper Paper

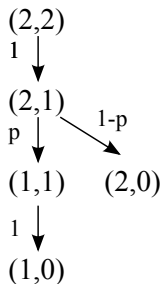
Donald E. Knuth: The Toilet Paper Problem, *The American Mathematical Monthly* 91 (1984) 465-470

“The toilet paper dispensers in a certain building are designed to hold two rolls of tissues, and a person can use either roll. There are two kinds of people who use the rest rooms in the building: big-choosers and little-choosers. A big-chooser always takes a piece of toilet paper from the roll that is currently larger; a little-chooser always does the opposite. However, when the two rolls are the same size, or when only one roll is nonempty, everybody chooses the nearest nonempty roll. When both rolls are empty, everybody has a problem.”

Wahrscheinlichkeit für “big-chooser”: p ,
für “little-chooser”: $q = 1 - p$.

Start mit n Papierportionen auf beiden Rollen. $M_n(p)$ ist die erwartete Zahl der Portionen auf einer Rolle, wenn die andere leer ist.

- ▶ $M_n(0) = n$
- ▶ $M_n(1) = 1$
- ▶ $M_1(p) = 1$
- ▶ $M_2(p) = 2 - p = 1 \cdot p \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (1 - p) \cdot 1 \cdot 2$



“The purpose of this paper is to study the asymptotic value of $M_n(p)$ for fixed p as $n \rightarrow \infty$. We will see that the generating function $\sum_n M_n(p)z^n$ has a surprisingly simple form, from which the asymptotic behavior can readily be deduced.”

Mit Hilfe von Rekursionen für $M_{mn}(p)$ (Start mit m und n Papierportionen) findet er

$$M_n(p) = c_1 p M_{n-1}(p) + c_2 p^2 M_{n-2}(p) + \cdots + c_{n-1} p^{n-1} M_1(p) + L_n(p)$$

$$L_n(p) = \sum_{2 \leq k \leq n} k d_{nk} p^{n-k} q^{n-1} \quad (n \geq 2), \quad L_1(p) = 1$$

Hier bezeichnet c_n die Catalanzahlen, und d_{nk} sind auch bekannte kombinatorische Zahlen:

$$d_{nk} = \binom{2n-k-2}{n-2} \frac{k-1}{n-1}$$

Nach nützlichen Vorüberlegungen in Kap. 3 macht er in Kap. 4 den Ansatz

$$M(z) = \sum_{n \geq 1} M_n(p)z^n; \quad L(z) = \sum_{n \geq 1} L_n(p)z^n$$

und findet aus der Rekursionsgleichung oben

$$M(z) - L(z) = \frac{1}{1-p} C(p(1-p)z)M(z)$$

(C die erz. Funktion der Catalanzahlen). Daraus dann

$$M(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \left(\frac{1-p - C(p(1-p)z)}{q} \right)$$

Das lässt sich schön als Potenzreihe schreiben. Damit:

$$M_n(p) = n - (n-1)c_1p - (n-2)c_2p^2(1-p) - \dots - 1c_{n-1}p^{n-1}p^{n-2}$$

Damit wird in Kap. 5, Theorem 1, das “limiting behavior” beschrieben (Asymptotik für $n \rightarrow \infty$)

(Tippfehler? $O(r^n)$ wird sehr groß für $r = 2$. Soll aber offenbar klein sein. Oder ist gemeint $1 > r > 4pq$):

“For example, if $p = 2/3$ and $q = 1/3$, so that big-choosers outnumber little-choosers by 2 to 1, the average size of the remaining roll will be very close to 2, when n is large; but when $p = 1/3$ and $q = 2/3$ the average will be approximately $\frac{1}{2}n + 1$.”

Kap. 6: Was passiert für $p = 1/2$? Theorem 2: noch einfachere Formel

$$M_n(p) = \frac{2n}{4^n} \binom{2n}{n} \approx 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{\pi n}}$$