5 Mathematische Grundlagen

Für die späteren Kapitel scheint es mir hier sinnvoll, die wichtigsten Begriffe und Konzepte aus der linearen Algebra kurz zu wiederholen und zu interpretieren.

5.1 Notation

In dieser Vorlesung werden hauptsächlich reellwertige Vektoren und Matrizen betrachtet. Der Vektorraum ist also (fast) immer $\mathbb{R}^n$. Die Matrizen sind (fast) immer aus $\mathbb{R}^{m\times n}$. Die Skalare werden meist mit griechischen Buchstaben bezeichnet: α, β, λ.... Die Vektoren sind Spaltenvektoren:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Vektoren heißen meist p, q, v, w... oder auch mal v_1, v_2... (falls keine Verwechslungsgefahr besteht), oder $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$ (falls doch).

Die wichtigsten Rechenoperationen für Vektoren (und Skalare) sind diese ($v, w, ... \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$):

- Zahl mal Vektor:
$$\alpha v = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

- Vektor plus Vektor:
$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

- Linearkombination von m Vektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$
$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v^{(i)}, \text{ bzw. } \alpha_1 v^{(1)} + \cdots + \alpha_m v^{(m)}$$

- Skalarpodukt (aka Innenprodukt):
$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = v_1 \cdot w_1 + \cdots + v_n \cdot w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

  Das kommt eine Zahl raus, $\langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$.

- Euklidische Länge (oder 2-Norm) eines Vektors:
$$\|v\|_2 = \sqrt{v^T \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

- Allgemeiner gibt es die p-Norm eines Vektors:

$$\|v\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\Big)^{1/p}$$

- Dyadisches Produkt zweier Vektoren v und w:

$$v \cdot w^T = (v_i w_j)_{i,j}.$$

  Das ist eine Matrix, also $v \cdot w^T \in \mathbb{R}^{nn\times n}$.

Matrizen werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet: $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dabei ist m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten. Der Eintrag in Zeile i und Spalte j von A heißt a_{ij}, oder auch $(A)_{ij}$. Die Matrix als Ganzes heißt ja A; aber manchmal ist auch praktisch, die Matrix als $(a_{ij})_{ij}$ zu schreiben. Also ist

$$A = (a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix können wir natürlich auch als n Spaltenvektoren nebeneinander auffassen.

Folgende grundlegende Operationen sind auf Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ machbar.

- Multiplikation mit einem Skalar: αA.
- Addition zweier Matrizen: $A + B$.
- Linearkombination: $\alpha A + \beta B + \cdots$.
- Matrix-Norm: später.
- Transponierte Matrix: A^T. Zeilen werden zu Spalten, Spalten zu Zeilen:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

Anders als Vektoren kann man Matrizen miteinander multiplizieren, so dass wieder eine Matrix rauskommt. Genauer: A aus $\mathbb{R}^{\ell\times m}$ und B aus $\mathbb{R}^{m\times n}$, so kann man A mal B berechnen. Nennen wir das Ergebnis C, also $C = A \cdot B$, so ist

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

Spezialfälle sind "Matrix mal Spalten-Vektor" und "Zeilen-Vektor mal Matrix". Das geht genauso: einen Spaltenvektor etwa kann man ja also $n \times 1$-Matrix auffassen. Das Ergebnis der Multiplikation ist dann halt ein (Zeilen- oder Spalten-) Vektor.

Die Rolle des neutralen Elements bezüglich der Matrizenmultiplikation spielt die **Einheitsmatrix**

$$E = E_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die gilt immer $E \cdot A = A \cdot E = A$.

Manchmal, nicht immer, gibt es zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine **inverse Matrix** A^{-1}, für die gilt: $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$.

Bemerkung: Man überzeuge sich, dass "Matrix mal Spaltenvektor" die gleichen Berechnungen erfordert ist wie die n Berechnungen "Skalarprodukt von Zeile i mit dem Spaltenvektor". Analog für "Zeilenvektor mal Matrix".

Im Allgemeinen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$, auf mathematisch: Matrizenmultiplikation ist nicht *kommutativ*. Immerhin gilt $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, also ist Matrizenmultiplikation *assoziativ*.

Wichtige Regel: Es ist $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Letzteres kann man sich so merken: die umgekehrte Operation von "Socken anziehen, dann Schuhe anziehen" ist nicht "Socken ausziehen, dann Schuhe ausziehen", sondern "Schuhe ausziehen, dann Socken ausziehen".

Ein zentraler Begriff im Zusammenhang mit Matrizen sind **Eigenwerte** (einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$): jene $\lambda \in \mathbb{R}$, für die es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $Av = \lambda v$. Dieses v heißt **Eigenvektor** (von A zum Eigenwert λ). Im Allgemeinen bewirkt Matrix mal Vektor etwas wildes (der Vektor wird gestreckt und/oder gedreht und/oder gespiegelt). Aber für einen Eigenvektor v bewirkt die Matrix nur eine Streckung, und zwar um den Faktor λ (wobei λ der zu v gehörende Eigenwert ist).

Die **Determinante** (einer $n \times n$-Matrix A) ist eine wichtige Kennzahl einer Matrix. Die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte. Berechnet wird sie aber einfacher durch wiederholte Entwicklung nach der k-ten Zeile (bzw Spalte), oder durch Dreiecksform herstellen.