Vorkurs Informatik

Matheteil

1.1 Notation

Mengen: $\{1, 2, 3, 7\} = A$

$B = \{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Elefant}\}$

$C = \{☺, ☹\}$

$\{A, B, C\}$

wichtige Mengen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ ganze Zahlen

Vielseitiger: „$\{x \in \ldots \mid \text{Eigenschaft}\}$"

Bsp: $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ gerade}\}$

$P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ Primzahl}\}$

$Q = \{ n \in \mathbb{N} \mid n = k^2, k \in \mathbb{N} \}$
$(= \{1, 4, 9, 16, \ldots\})$

$\mathbb{Q}^+ = \{ \frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

Zeichen für Mengen:

- $\in$ „Element von"

  z.B. $7 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$,
  $1/2 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$

- $\subset$ oder $\subseteq$: Teilmenge

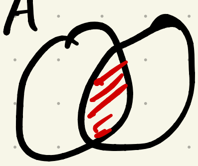
  z.B. $\{1, 4, 9\} \subset \mathbb{N}$
  $\mathbb{N} \not\subset \{1, 4, 9\}$

- $\cup$ Vereinigung: (A, B Mengen)

A B


$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$

$\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A

B

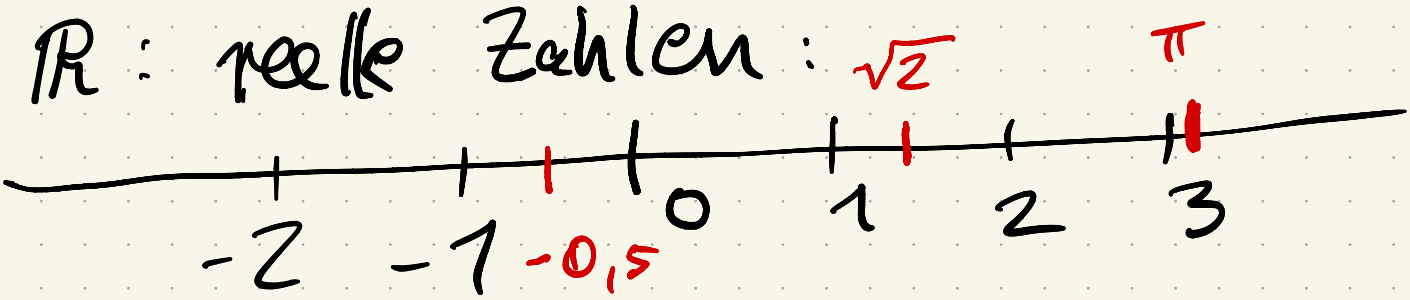
$A \cap B$ Schnitt:

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$

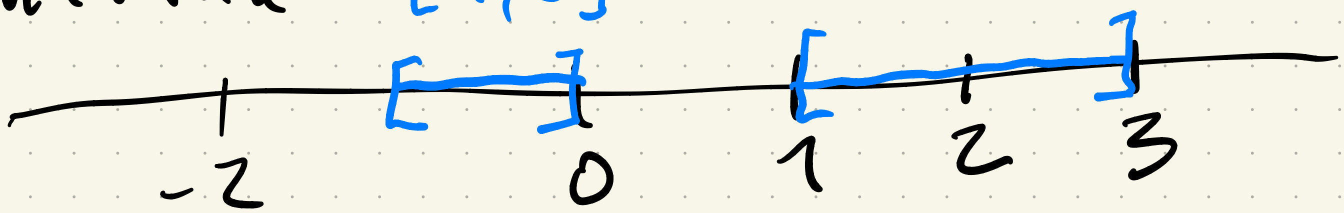
$A \setminus B$ „A ohne B"

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen:



Intervalle: $[-1;0]$ $[1;3]$



- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ „kleiner gleich"

  abgeschlossenes Intervall: $1 \in [1;3]$

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

  offenes Intervall $1 \notin (1,3)$

  (früher auch: $]a;b[$)

- auch: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

  usw.

1.2 Σ und Π

$1, 1, 2, 3, 5, 8, ?$ (13)

$1, 3, 6, 10, 15, ?$ (21)

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100$$

$$1+3+5+\dots+197+199 = 10\,000$$

Hm... daher:

$$\sum_{k=1}^{100} 2k-1 = 1+3+5+\dots+199$$

← Summenzeichen

$$\sum_{n=0}^{10} n^2 = 0^2+1^2+2^2+\dots+100$$

Analog: $4! = \prod_{k=1}^{4} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

$$\prod_{k=1}^{4} 2k-1 = 1\cdot 3\cdot 7\cdot 9 = 219?$$

Damit: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$

n Fakultät ↗ $= \prod_{k=1}^{n} k$

$$\sum_{k=2}^{2} k = 2$$

$$\sum_{k=2}^{1} k = 0$$ („leere Summe", Null Summanden)

Analog: $$\prod_{k=2}^{2} k = 2$$

$$\prod_{k=2}^{1} k = 1$$

1.3 Definition, Satz, Beweis

Seit Euklid: „Elemente" z.B.

Definition: $n! := \prod_{k=1}^{n} k \quad (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$

- Satz (bzw Theorem): wichtiges Ergebnis

- Beweis
- Lemma: Hilfssatz bzw Zwischenergebnis
  (aka Hilfssatz, Proposition)
- Korollar: Folgerung
- Vermutung: offen

Bsp. • Riemannsche Vermutung

• Goldbachvermutung:
Jede gerade Zahl >2 ist Summe zweier Primzahlen
$(4=2+2,\ 6=3+3,\ 8=3+5, \dots)$

• Primzahlzwillinge:
$11, 13,\quad 17, 19 \quad 29, 31$
Vermutung: ∞ viele

Variablen: $f, x, n, \dots$
$A, G, \dots$

das sind zu wenige. Algo

- $x_1, n_2, \dots$
- $x', \bar{x}, \hat{x}, \tilde{x}, \dots$
- griechische Buchstaben:
  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta\ (\vartheta), \kappa, \lambda, \dots$

groß: $\cancel{A}, \cancel{B}, \Gamma, \Delta, \cancel{E} \dots\dots \Sigma, \Pi$

(Nicht: Ш, Щ, Ж, ...)

(selten: χ, I,)

1.4 Rechnen mit Summen

Wichtig: Terme umformen, z.B.

$$\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x^2-y^2)(x+y)}{(x+y)(x+y)} \quad \text{hm...}$$

$$= \frac{\cancel{(x+y)}\cdot(x-y)}{\cancel{x+y}} = x-y$$

Zu Rechnen mit Summen:

1. Indexverschiebung
2. Summanden einzeln schreiben
3. Pünktchenschreibweise

zu 1:

① $\sum_{k=1}^{4}(k+1)^2 = 4+9+16+25$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Vert$

② $\sum_{j=2}^{5} j^2 = 4+9+16+25$

von ① nach ②: $j=k+1$, Grenzen verschieben

von ② nach ①: $k=j-1$

Bsp.: $$\sum_{j=5}^{7} \frac{1}{2j-7} \underset{k=j-4}{=} \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\underbrace{2(k+4)-7}_{2k+8-7}}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2k+1}$$

Satz 1.2 Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$ (geometrische Reihe)

Bsp.: $1+2+4+8+16+32+64=127$

$$\sum_{k=0}^{6} 2^k = \frac{1-2^7}{1-2} = \frac{-127}{-1} = 127$$

Beweis $$(1-q)\cdot\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}$$

genau dann, wenn

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = 1-q^{n+1}$$

$j=k+1$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{j=1}^{n+1} q^j = 1-q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow q^0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} q^k}_{} - \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} q^j}_{} + q^{n+1} \Big) = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \underbrace{0}_{} - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}. \qquad \square$$

früher: qed

Zu 2&3: Oft sieht man mehr, wenn man statt z.B. $\sum_{k=0}^{n} q^k$ schreibt: $\underbrace{q^0}_{1} + \underbrace{q^1 + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n}_{\sum_{k=1}^{n} q^k}$

$$1 + \sum_{k=1}^{n} q^k$$

__Bsp__ zu 3: zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (-k^2 + \underbrace{k^2 + 2k + 1}_{}) = (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (-k^2 + (k+1)^2) = (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-0 + 1}_{k=0} + \underbrace{(-1) + 2^2}_{k=1} + (-2^2) + 3^2 + \ldots$$

$(-3^2) + 4^2 + \dots \underbrace{-(n-1)^2 + n^2}_{k=n-1} + (-n^2) + (n+1)^2$

$= 1 - 1 + 4 - 4 + 9 - 9 + \dots + n^2 - n^2 + (n+1)^2$

$= (n+1)^2$ $\square$

1.5 Potenzregeln

1 Byte: 8 bit, z.B. 0000 0000, 0000 0001, 0000 0010, 0000 0011, $\vdots$

$2^8 = 256$ Mögl.

1 Kilobyte = 1024 Byte = bit

„2^{10}"

1 Megabyte (MB) = [1024 KB bis 1995] (KiB)

= 1000 KB

1 Gigabyte (GB) = 1000 MB = 1000 000 KB = 10^9 B

(analog: GiB)

$1\,\text{MiB} = 1024\,\text{KiB} = 2^{10} \cdot 2^{10}$ Byte

$= 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^3$ bit

$2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{20} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Satz 1.3 Für $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
2. $a^0 = 1$
3. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
4. $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$
5. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

„Exponent"

„Basis"

Beweis: (2) $a^b = a^{b+0} \overset{1.}{=} a^b \cdot a^0$

also $a^0 = 1$.

(3) $\underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \quad \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{b} \quad \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b} \quad \ldots \quad \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{b}}_{c \text{ mal}}$

Insgesamt $c \cdot b$

(4) $1 = \frac{a^b}{a^b} = \frac{1}{a^b} \cdot a^b$

$\parallel$

$a^0 = a^{b-b} \overset{1}{=} a^b \cdot a^{-b}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^b} = a^{-b}$ $\square$

1.6 Die Trickkiste

Oben: Indexverschiebung, ...

- $(x-y)\cdot(x+y) = x^2 - y^2$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

(binomische Formel)

[Übrigens: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

[z.B. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$]]

- p-q-Formel:

  Lösungen von $x^2 + px + q = 0$

  sind $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{p^2/4 - q}_{\text{falls das } \geq 0}}$

- Bruchrechnen

  $\frac{21}{7} = 3$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$, ...

  $\frac{x^2 - y^2}{x+y} = x - y$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$ ...

13.9. **1.7 Wurzelfunktionen**

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow x = 2$ oder $x = -2$

Also Obacht bei $\sqrt{x^2}$:

Kann x oder $-x$ sein

! Hier immer nur $\boxed{\sqrt{x} \text{ für } x > 0}$

und: $\boxed{\sqrt{x} \text{ ist } > 0}$

<u>Bester Tipp</u>: Wurzeln als Potenzen schreiben!

Klar: z. B. $\pi^3 = \pi \cdot \pi \cdot \pi$

<u>Problem</u>: $3^\pi = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ?$ (?)

sinnlos!

Dazu (viel) mehr in Mathe I.

<u>Kein Problem</u> $3^{1/2} \cdot 3^{1/2} = 3^{1/2 + 1/2} = 3$

Also $3^{1/2} = \sqrt{3}$

Allgemeiner: $\boxed{a^{1/b} = \sqrt[b]{a}}$

(meint: $\sqrt[4]{16} = 2$ usw.)

Das macht Rechnen mit Wurzeln einfacher.

Bsp zu zeigen: $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^3}}$

$$\Leftrightarrow \left(2^{1/2}+2^{1/2}\right)^{1/2} = \left(\left(2^3\right)^{1/2}\right)^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \left(2^1 \cdot 2^{1/2}\right)^{1/2} = \left(2^3\right)^{1/4}$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{3/2}\right)^{1/2} = 2^{3/4}$$

$$\Leftrightarrow 2^{3/4} = 2^{3/4} \leftarrow \text{wahr, also auch wahr.} \ \square$$

Hilfreich: (wegen des Problems $\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$)

Def. $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

„Betrag"

Bsp: $|2| = 2$; $|-3| = -(-3) = 3$

Damit: $\sqrt{|x|^2} = |x|$

Tricks: Wurzeln im Nenner von Brüchen beseitigen:

- $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

- oder

$$\ldots = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$$
$$= 1 + \frac{2}{3}\,3^{1/2}$$

- $\boxed{\text{Im Nenner } \sqrt{a}+\sqrt{b}\text{: mit } \sqrt{a}-\sqrt{b} \text{ erweitern}}$

z.B. $$\frac{\sqrt{12}-\sqrt{20}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{12}-\sqrt{20})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{\sqrt{36}-\sqrt{60}-\sqrt{60}+\sqrt{100}}{3-5} =$$
$$= \frac{6 - 2\sqrt{60} + 10}{-2} = -8 + \sqrt{60}$$

1.7 Logarithmen

So wie $\quad x^2 \longleftrightarrow \sqrt{x}$

nun $\quad 2^x \longleftrightarrow \log_2 x$

Potenz: $\quad 2^4 = ?$

Logar.: $\quad 2^? = 16$

Schreibweise: $\quad \log_2(16) = 4$

Allgemein: $\boxed{\log_b a = x, \text{ falls } b^x = a.}$

<u>Bsp</u>. $\log_3 9 = 2$ (denn $3^2 = 9$)

- $\log_3 27 = 3$
- $\log_7 343 = 3$
- $\log_{10} 1000 = 3$; $\log_{10} 100 = 2$
- $\log_{10} 343 = 2{,}415021\ldots$ (?)

Zehnerlogarithmus: Zahl der Dezimalstellen (evtl. ∓ 1)

$\log_2$: Zahl der Binärstellen (evtl. ± 1)

<u>Einschub: Binärzahlen</u>

$(1101)_b = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$
$= 13$

$(10000)_b = 16$;
$\log_2(16) = 4$

Logo Uni H:
$10 + 10 = 100$
(Leibniz)

$\log_2(8192) = 13$, $\log_2(1024) = 10$

* *
*