4 Folgen & Reihen

Erinnerung: $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$
$(x \in \mathbb{R})$

Lemma 4.1 (Dreiecksungleichung)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

(d.h. $\forall x \in \mathbb{R} \, \forall y \in \mathbb{R} \ldots$)

4.1 Folgen

Def 4.2 Eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ heißt Folge (in $\mathbb{R}$)

Notation: a_n (statt $f(n)$ oder $f(x)$)

bzw $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_n$

ein Wert

die ganze Folge

Ein a_n heißt Folgenglied

Bsp

$a_n: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \to 0$

$b_n: -1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots \to \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$

$c_n: 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \ldots \to \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$d_n: -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots \frac{(-1)^n}{2^n} \ldots \to 0$

$e_n: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots \to 2$

$f_n: 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots \frac{(n+1)}{n}, \ldots \to 1$

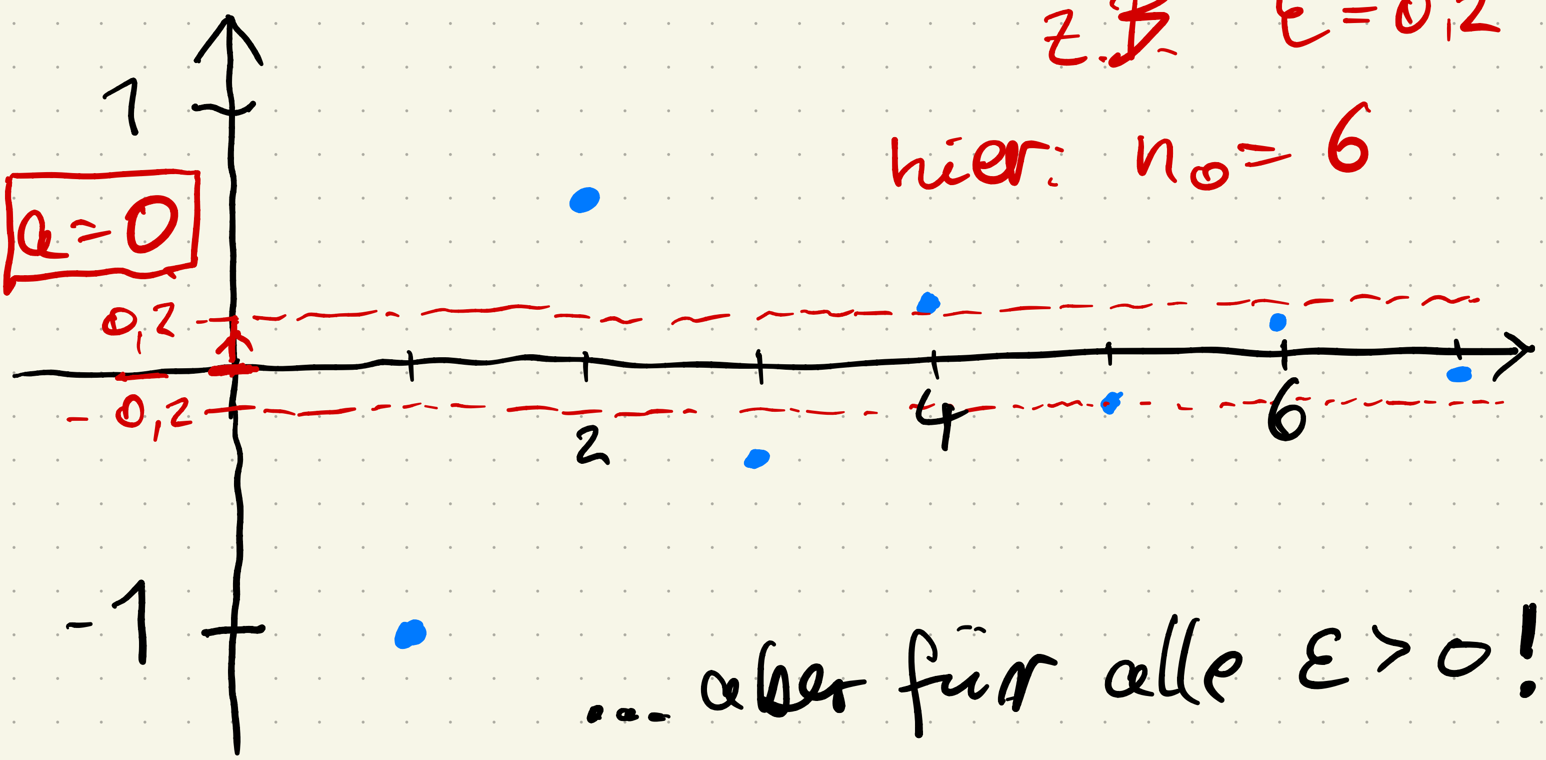
$g_n: 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n \ldots \rightarrow \infty$

Def. 4.3 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die heißt <u>konvergent</u> mit <u>Grenzwert</u> $a \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

---

z.B. $\varepsilon = 0{,}2$

hier: $n_0 = 6$



... aber für alle $\varepsilon > 0$!

z.B. $\varepsilon = 0{,}1$: $n_0 = 11$

$\varepsilon = 0{,}001$: $n_0 = 1001$

$\varepsilon = 0{,}000001$: $n_0 = 1000001$

<u>Notation</u>: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$.

<u>Lemma 4.4</u> $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$. Wähle

$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon = 0{,}07 \\ \frac{1}{0{,}07} \notin \mathbb{N} \end{array}}$

$n_0 = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ aufgerundet.

(also $n_0 \leq \frac{1}{\varepsilon} + 1$)

z.z. $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$,

es ist $\frac{1}{\varepsilon} \geq n_0 - 1$, und $n \geq n_0$,

also $n \geq n_0 > n_0 - 1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$,

also $n > \frac{1}{\varepsilon}$ wahr, fertig. □

<u>Lemma 4.5</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$.

Überlegung: $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n}{n} + \frac{1}{n} - 1\right|$

$= \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$. ⊛

Wähle $n_0 = \frac{1}{\varepsilon} + 1$ aufgerundet.

Für $n \geq n_0$: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \cancel{\leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1}} < \varepsilon$

⊛ also $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{n_0}$

Damit $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. $\square$

Regeln: Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$

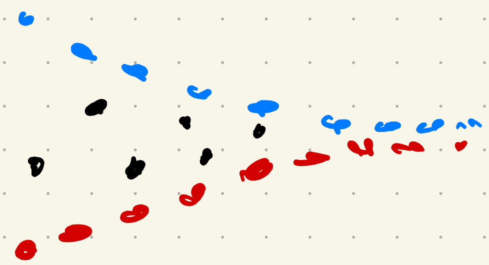
Einschnürungssatz:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq b_n \leq c_n$

Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Bsp $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^2-1}{n+1}}_{=: b_n} = ?$



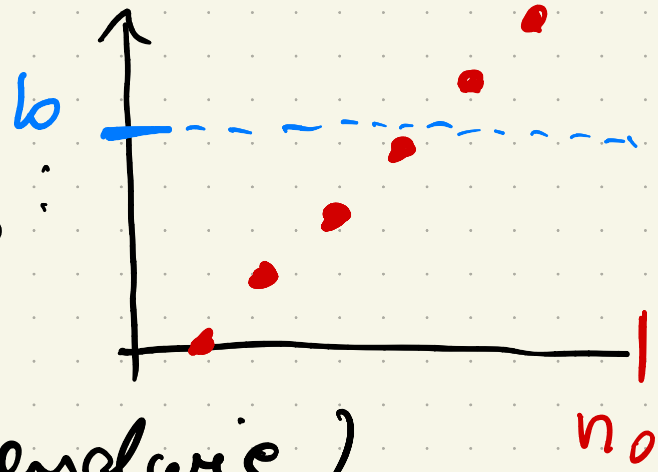
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0: |b_n - b| < \varepsilon$

wegen $\frac{n^2-1}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} = \underline{\underline{n-1}} = b_n$

Also zeige:

$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq n_0 :$

$|b_n - b| \geq \varepsilon$



Wähle $\varepsilon = 1$. (b irgendwie)

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ (irgendwie)

Wähle $n = \max\{n_0, b+2\} \leftarrow$

Damit $|b_n - b| = |n - 1 - b| \quad (n \geq b+2)$

$= n - 1 - b \geq b + 2 - 1 - b = 1 \quad \square$

4.2 Unendliche Summen

1. $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \infty$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$ ✓

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \cancel{2}\,\infty$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \cancel{2}$

$= \frac{\pi^2}{6}$

(Masterstudium)

Zu 2: • $\underbrace{-1+1}-1 \underbrace{+1-1} \underbrace{+1-1} \dots = -1$

• $\underbrace{-1+1} \underbrace{-1+1} \underbrace{-1+1} -1 \dots = 0$

• $-1 +1 -1 +1 -1 + 1 -1 +1$
$= 1$

Zu 4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent („Harmonische Reihe")

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$= \infty$

• $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent? Grenzwert?

Def. Setze $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ← Partialsumme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Also wird $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ zu $-1, 0, -1, 0, \dots$

nicht konvergent. („divergent")

Satz: („geometrische Reihe"). $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{falls } |q|<1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q}.$$

(divergent: $q=-1$ ✓ $q=1$ ✓ ...) $\square$

Im 1. Semester kommen hier:

- Werkzeuge zum Konvergenz zeigen (Quotientenkriterium, ...)

<u>Hier</u>: Konvergenz zeigen viel einfacher als Grenzwert berechnen!
(außer in wenigen Ausnahmen, z. B. geometrische Reihe)

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} - 1 = \frac{1}{1/2} - 1 = 2-1$
$(q = 1/2)$
$= \underline{\underline{1}}$

(Für Knobler: Aufg. 4.6* & 4.7*)

Das führt zu <u>Potenzreihen</u>:

Funktionen können als Potenzreihen geschrieben werden.

z. B. $$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sinh(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (\text{für } -1 < x < 1)$$