7 Überblick Lineare Algebra

I Vektorräume
Gruppe, Körper, Vektor, Basis, linear unabhängig ...

II $\mathbb{C}$

III Lineare Abbildungen

IV " " & Matrizen

Zu linearen Gleichungssystemen:

<u>Def</u> Ein lin. Gl-system, wo rechts vom "=" nur Nullen stehen, heißt <u>homogenes</u> lin. Gl-system. Sonst heißt es <u>inhomogenes</u> lin. Gl-system.

$$2x + y = 3$$
$$\wedge\ 4x + 2y = 7$$

keine Lösung

inhomogen

$$7x + 5y = 0$$
$$\wedge\ -3x + 4y = 0$$

mindestens eine Lösung: $x = y = 0$

homogen

<u>Satz 7.1</u> Ein homogenes lin. Gl-system hat immer mindestens eine Lösung:

$x = y = \ldots = 0$. (evtl. ∞ viele)
Ein inhomogenes hat keine, eine, oder unendlich viele Lösungen. (in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{C}$)

Bsp

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \quad \cdot(-2) \\ \wedge\ 4x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ \wedge\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Matrizen

Eine Tabelle mit n Zeilen und m Spalten: z.B.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 23 \end{pmatrix}$ (bzw $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 23 \end{bmatrix}$ auf englisch)

$\begin{pmatrix} 5 & \pi \\ 3 & 0 \\ 2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ usw.

Bezeichnung: • $\mathbb{R}^{n \times m}$

oder • $Mat_{\mathbb{R}}(n,m)$ oder ...

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 12 & 23 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$; $\begin{pmatrix} 5 & \pi \\ 3 & 0 \\ 2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Rechnen:

plus/minus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mal: $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$, dann klappt's. Das Ergebnis $A \cdot B$ ist in $\mathbb{R}^{n \times k}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & -1+2 & 2 \\ 1\cdot 3 + 2\cdot 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp. $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ldots \quad A^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(Fibonaccizahlen: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1,$
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$)
$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$

<u>Fakt</u>: Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$

<u>Def</u> <u>Transponierte</u> einer Matrix
$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
die Zeilen von A sind die
Spalten von A^T.

<u>Bsp</u>
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>geteilt</u>: hm... es gibt $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
(zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) manchmal.
Dann
$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} =: E$$

E: <u>Einheitsmatrix</u> $\quad E \cdot A = A = A \cdot E$