8 Überblick Analysis

I Zahlen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$ ✓

II Folgen & Reihen ✓ (≈ 1850?)

III Stetige Funktionen (≈ 1800?)

IV Ableitungen

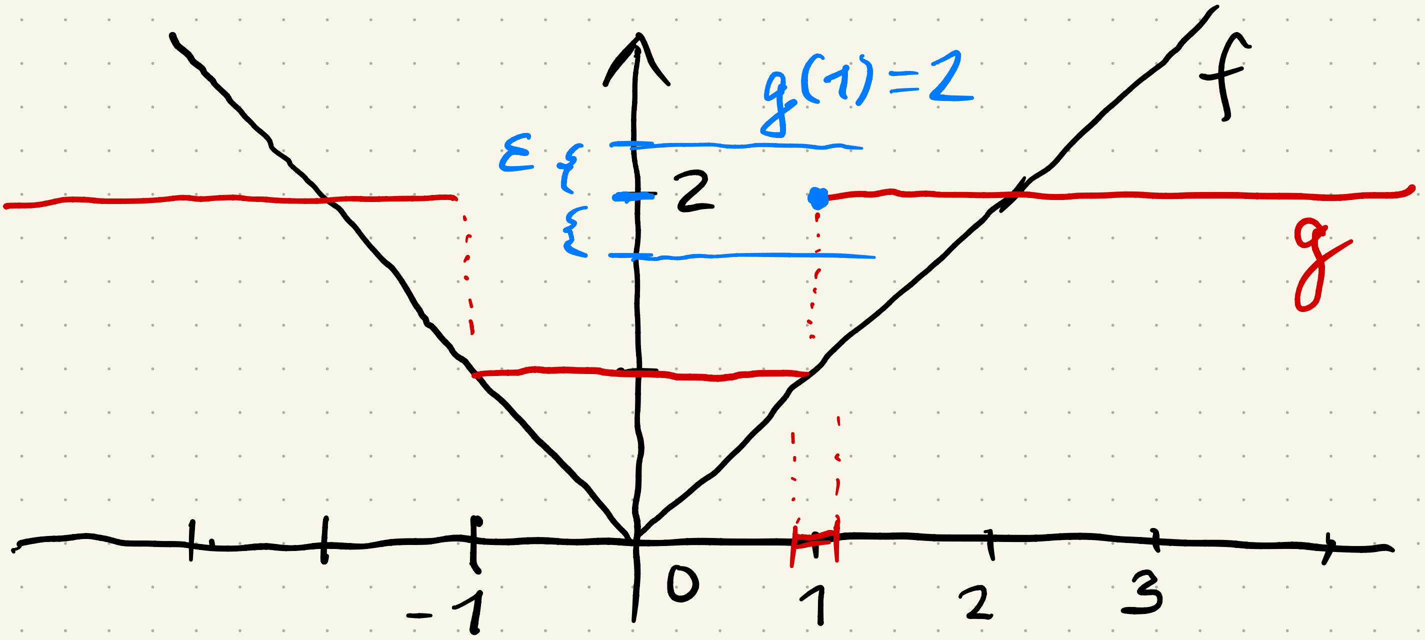
V Integrale

(≈ 1700 Newton & Leibniz)

Zu Stetigkeit:

<u>Bsp</u>

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = |x|$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = \begin{cases} 2 & : |x| \geq 1 \\ 1 & : |x| < 1 \end{cases}$



<u>Idee</u>: „stetig" soll heißen: man kann den Graphen malen, ohne den

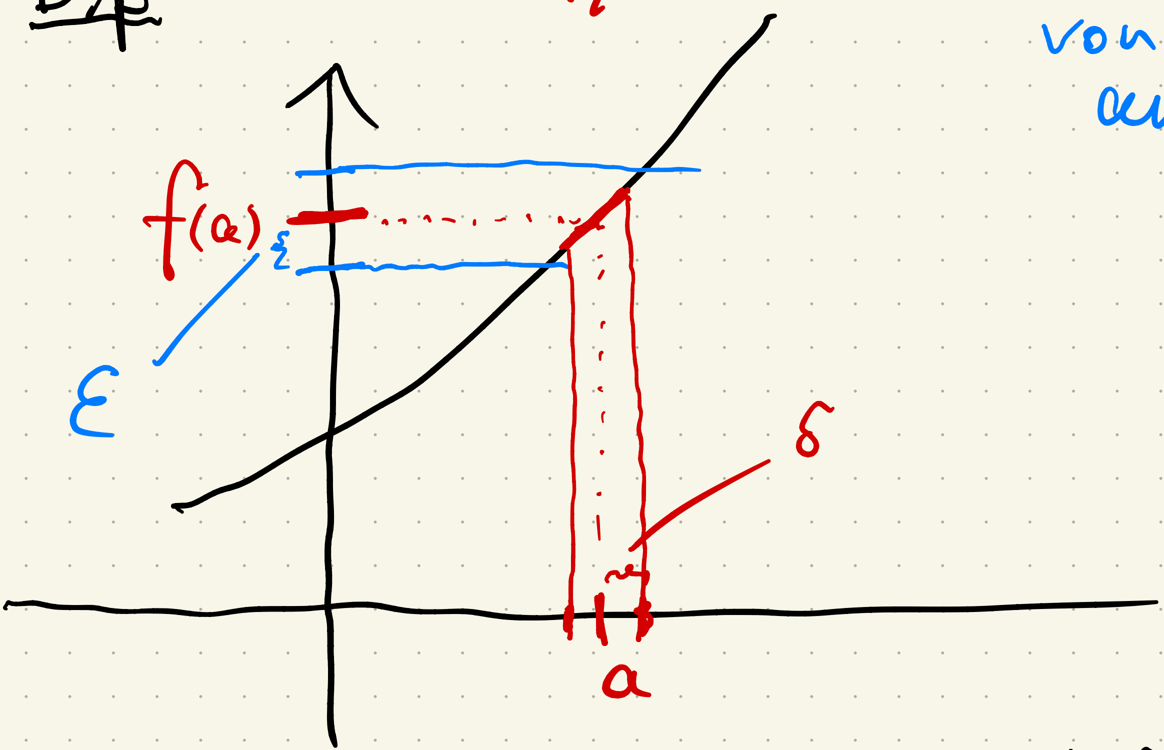
Stift abzusetzen.

Def 8.1: $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$.

f heißt stetig in a, falls

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{kleine Abweichung}} \; \underbrace{\exists \delta > 0}_{\text{gibt's kleinen Wert}} \; \forall x \in D: \overbrace{|x-a| < \delta}^{x \text{ nah an } a} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(a)| < \varepsilon}_{f \text{ in der Nähe von } a \text{ ist nah an } f(a)}$$

Bsp



Oben: f stetig, g nicht.

Def $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig falls f stetig in a ist für alle $a \in D$.

Folgenstetigkeit

Satz 8.4 $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in a, genau dann wenn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Differenzierbarkeit

Idee: $f'(x)$ ist die Steigung des Graphen von f an der Stelle x.

Def: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt <u>differenzierbar</u> in a, falls $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert.

Dann $f'(a) =$

f heißt <u>differenzierbar</u>, falls f in jedem $a \in D$ diff.-bar ist.

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2 - 2}{x - a}$$

$$= 0 \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{x - a} = 0$$

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} x + a = a + a = 2 \cdot a$$

$\square$