

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 5

Aufgabe 1:

Es sei $A = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{1-c} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa(A)$ von A , einmal für die Frobeniusnorm, einmal für die Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{i,k}| \right\}$. Für welche c wird $\kappa(A)$ besonders groß?

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mittels Gram-Schmidt.

Aufgabe 3:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $q \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor der Länge 1 und $Q = qq^T$. Zeigen Sie:

1. Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar, so ist die Pseudoinverse $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ gleich A^{-1} .
2. Q ist symmetrisch.
3. $Q^2 = Q$.
4. Ist $p \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, dann ist Qp orthogonal zu $(E - Q)p$.
5. Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A . Zeigen Sie: $A^+ = R^{-1}Q^T$.
6. Mit $H = E - 2qq^T$ gilt:
 - (a) H ist symmetrisch und orthogonal.
 - (b) $H^2 = E$.
 - (c) q ist Eigenvektor zum Eigenwert -1 .