

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen**Blatt 3****Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie, ob die folgenden Matrizen jeweils positiv definit sind, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit, oder indefinit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie $\min\{\|Ax - b\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ sowie das zugehörige x für

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \text{ (zeichnerisch oder irgendwie).}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ (über die Normalengleichung)}$$

Aufgabe 3: *(Eventuell gemeinsam besprechen?)*

- Falls $p > p'$, gilt dann immer $\|x\|_p \geq \|x\|_{p'}$, oder immer $\|x\|_p \leq \|x\|_{p'}$, oder nichts von beidem?
- Wie sieht wohl der Graph von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_p$ aus? ($p = 1, p = 2, p = \infty$)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}^m$:

$$1. \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1,$$

$$2. \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2,$$

$$3. \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

Zusatzaufgabe:

Sie $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix. Zeigen Sie:

$$1. \quad a_{jj} > 0 \text{ für } j = 1, \dots, m.$$

$$2. \quad a_{jk}^2 < a_{jj}a_{kk} \text{ für } j = 1, \dots, m, j \neq k.$$

$$3. \quad \text{Der betragsmäßig größte Eintrag von } A \text{ liegt auf der Hauptdiagonalen.}$$