

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

## Blatt 5

**Aufgabe 1:**

Was ist die orthogonale Projektion von  $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$  auf den Spann  $\langle q \rangle$  von  $q = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ ..

**Aufgabe 2:**

Es sei  $A = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Es ist  $A^{-1} = \frac{1}{1-c} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie die Konditionszahl  $\kappa(A)$  von  $A$ , einmal für die Frobeniusnorm, einmal für die Zeilensummennorm  $\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{i,k}| \right\}$ .

Für welche  $c$  wird  $\kappa(A)$  besonders groß?

**Aufgabe 3:**

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $q \in \mathbb{R}^m$  ein Vektor der Länge 1 und  $Q = qq^T$ . Zeigen Sie:

1. Ist  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  invertierbar, so ist die Pseudoinverse  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  gleich  $A^{-1}$ .
2.  $Q$  ist symmetrisch.
3.  $Q^2 = Q$ .
4. Ist  $p \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , dann ist  $Qp$  orthogonal zu  $(E - Q)p$ .
5. Sei  $A = QR$  die QR-Zerlegung von  $A$ . Zeigen Sie:  $A^+ = R^{-1}Q^T$ .
6. Mit  $H = E - 2qq^T$  gilt:
  - (a)  $H$  ist symmetrisch und orthogonal.
  - (b)  $H^2 = E$ .
  - (c)  $q$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $-1$ .