Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 6

Aufgabe 1:

Die ersten drei *Legendrepolynome* sind $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Berechnen Sie:

(a) $\int_{-1}^1 P_0(x) \cdot P_0(x) dx$

(b) $\int_{-1}^1 P_1(x) \cdot P_1(x) dx$

(c) $\int_{-1}^1 P_i(x) \cdot P_j(x) dx$ für $i \neq j$.

Aufgabe 2:

Welche dieser Funktionen sind gerade, welche ungerade, welche weder-noch?

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$,
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x^3$,
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$,
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$,
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (e^x)^2$,
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Für die weder-noch: stellen Sie die als Summe je einer geraden und einer ungeraden Funktion dar.

Zusatz: Zeigen Sie: ist f eine gerade Funktion und g eine ungerade Funktion, dann ist $f \cdot g$ ungerade.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \sin(t) dt$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt \quad (m, n \in \mathbb{N})$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt \quad (m, n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 der Fourierreihe von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{10} \sin(10x)$ mittels der Formel aus dem Skript (Kasten vor Definition 7.1). (Sie dürfen die Formeln (7.2), (7.3) und (7.4) benutzen.)