

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen**Blatt 3****Aufgabe 1:** (*Gemeinsam besprechen*)

- Wie sieht die Einheitskreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ aus für $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$, $p = \infty$?
- Falls $p > p'$, gilt dann immer $\|x\|_p \geq \|x\|_{p'}$, oder immer $\|x\|_p \leq \|x\|_{p'}$, oder nichts von beidem?
- Wie sieht also wohl die Einheitskreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ aus für $p = \frac{1}{2}$?
Ist $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ eine Norm?
- Wie sieht wohl der Graph von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_p$ aus? ($p = 1, p = 2, p = \infty$)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie, ob die folgenden Matrizen jeweils positiv definit sind, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit, oder indefinit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zusatz: Finden Sie selbst eine weitere positiv definite Matrix in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, einmal mit Nullen, einmal ganz ohne Nullen.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie $\min\{\|Ax - b\|_2 \mid x \in \mathbb{R}^m\}$ sowie ein zugehöriges x für

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{zeichnerisch oder irgendwie}).$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{über die Normalengleichung})$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie mit der *least squares*-Methode die Gerade, die die Punkte $(0, 1)^T$, $(1, 1)^T$, $(2, 2)^T$ am besten approximiert (bzgl. der 2-Norm natürlich).

Aufgabe 5:

Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 8 \\ -1 & 8 & 14 \end{pmatrix}$ symmetrisch positiv definit. Berechnen Sie die Choleskyzerlegung LL^T von A .