

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 4

Aufgabe 1:

Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 14 \end{pmatrix}$ symmetrisch positiv definit. Berechnen Sie die Choleskyzerlegung LL^T von A .

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Konditionszahlen der folgenden Funktionen an der Stelle $x = 1$. Also für

$$f_1(x) = (1 - x)^6, \quad f_2(x) = (3 - 2x)^3, \quad f_3(x) = 99 - 70x, \quad f_4(x) = \frac{1}{99 + 70x}.$$

Der Witz hier ist: es ist $f_i(\sqrt{2}) = f_j(\sqrt{2})$ für alle $i, j = 1, 2, 3, 4$. Wenn man also $(1 - \sqrt{2})^6$ näherungsweise berechnen möchte, kann man (wegen $\sqrt{2} \approx 1,4$) ja $f_i(1,4)$ berechnen, für verschiedene i . Die Ergebnisse unterscheiden sich teilweise deutlich. Eigentlich müssten wir ja die Konditionszahlen für $x = 1,4$ bzw. $x = \sqrt{2}$ berechnen, da kommen aber krumme Werte raus. Also hier für $x = 1$.

Aufgabe 3:

Es sei $A = \begin{pmatrix} c & 100c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $c > 0$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{99} \begin{pmatrix} -1/c & 100 \\ 1/c & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Konditionszahl von A bezüglich der Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max\{\sum_{i=1}^m |a_{ik}|\}$. Für welche c wird $\kappa(A)$ minimal?

(Zusatz: berechnen Sie die Frobeniusnorm von A .)

Zusatzfrage: Wenn wir bei der Choleskyzerlegung auf die Forderung $\ell_{ii} > 0$ verzichten, wieviele Möglichkeiten gibt es dann für L mit $LL^T = A$?