Dr. Dirk Frettlöh 27.5.2025

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 5

Aufgabe 1:
Es sei $A = \left(\begin{smallmatrix} c & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, mit $c \in \mathbb{R}$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{1-c}\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -c \end{smallmatrix}\right)$ für $c \neq 1$. Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa(A)$ von A, einmal für die Frobeniusnorm, einmal für die Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max\limits_i \left\{ \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right\}$. Für welche c wird $\kappa(A)$ besonders groß?

Aufgabe 2:
Was ist die orthogonale Projektion von $p = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ auf den Spann $\langle q \rangle$ von $q = \left(\begin{smallmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}6 \end{smallmatrix}\right)$?

Was ist die orthogonale Projektion von $p = (2, -2, -2, 2)^T$ auf auf den Spann $\langle q \rangle$ von $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

Und was ist die orthogonale Projektion von $p = (2, -2, -2, 2)^T$ auf auf den Spann $\langle q_1, q_2 \rangle$ der beiden Vektoren $q_1 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})^T$ und $q_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})^T$?

Aufgabe 3:
Es sei $q \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor der Länge 1 und $Q = qq^T$. Zeigen Sie:

1. Q ist symmetrisch.
2. $Q^2 = Q$.
3. Ist $p \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, dann ist Qp orthogonal zu $(E - Q)p$.
4. Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar, so ist die Pseudoinverse $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ gleich A^{-1}.
5. Mit $H = E - 2qq^T$ gilt:
   (a) H ist eine symmetrisch und orthogonale Matrix.
   (b) $H^2 = E$.
   (c) q ist Eigenvektor zum Eigenwert -1.
6. Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A. (Jetzt ist also Q anders als oben eine orthogonale Matrix.) Zeigen Sie: $A^+ = R^{-1} Q^T$.