

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 6

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Singulärwerte von

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

(a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ und von $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mittels Gram-Schmidt.

(b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mittels des Householderverfahrens.

Zusatzaufgabe 3:

Sei $v \in \mathbb{R}^m$. Was ist der Rang von vv^T ?

Aufgabe 4:

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, und $q \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor der Länge 1. Zeigen Sie:

1. Falls $A \cdot B = B \cdot A$, dann ist $B^{-1}AB = A$.
2. Ist λ Eigenwert von A , dann ist λ^n Eigenwert von A^n .
3. Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A . (Jetzt ist also Q eine orthogonale Matrix.) Zeigen Sie: $A^+ = R^{-1}Q^T$.
4. Sei $A = U\Sigma V^T$ die SVD von A . Seien alle Singulärwerte ungleich 0. Zeigen Sie: $A^+ = V\Sigma^{-1}U^T$.
5. Sei $H = E - 2qq^T$. Zeigen Sie: $Hq = -q$.
6. Sei wieder $H = E - 2qq^T$ und sei v orthogonal zu q . Zeigen Sie: $Hv = v$.