Dr. Dirk Frettlöh 19.5.2026

Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 4

Aufgabe 1:
Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 14 \end{pmatrix}$ symmetrisch positiv definit. Berechnen Sie die Choleskyzerlegung LL^T von A.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Konditionszahlen der folgenden Funktionen an der Stelle $x = 1$. Also für

$$f_1(x) = \frac{1}{99+70x}, \quad f_2(x) = (3-2x)^3, \quad f_3(x) = 99 - 70x, \quad f_4(x) = (1-x)^6.$$

Der Witz hier ist: es ist $f_i(\sqrt{2}) = f_j(\sqrt{2})$ für alle $i, j = 1,2,3,4$. Wenn man also $(1-\sqrt{2})^6$ näherungsweise berechnen möchte, kann man (wegen $\sqrt{2} \approx 1,4$) ja $f_i(1,4)$ berechnen, für verschiedene i. Die Ergebnisse unterscheiden sich teilweise deutlich. Eigentlich müssten wir ja die Konditionszahlen für $x = 1,4$ bzw. $x = \sqrt{2}$ berechnen, da kommen aber zu krumme Werte raus. Also hier für $x = 1$.

Aufgabe 3:
(a) Bestimmen Sie die Konditionszahl der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, und zwar auf drei Weisen: einmal bezüglich der Zeilensummennorm $\| \, \|_\infty$, einmal bezüglich der Spaltensummennorm $\| \, \|_1$, und einmal bezüglich der Spektralnorm $\| \, \|_2$.

(b) Es sei $A = \begin{pmatrix} c & 100c \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, wobei $c > 0$. Es ist $A^{-1} = \frac{1}{99}\begin{pmatrix} -1/c & 100 \\ 1/c & -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Konditionszahl $\kappa(A)$ von A bezüglich der Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max_i \{\sum_{j=1}^m |a_{ij}|\}$, in Abhängigkei von c.

Für welches c wird $\kappa(A)$ minimal?

Zusatzfrage: (Zum Miniprojekt 2:) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{pmatrix}.$$

Überlegen Sie sich, was passieren muss, damit A vollen Rang hat. Und was passieren muss, damit A keinen vollen Rang hat. Wie also sollte man im C++-Code prüfen, ob A vollen Rang hat?

Das war für $m \times m$-Matrizen in der Vorlesung dran. Das kann man also im Prinzip im Skript nachlesen. Es soll nur hier aus aktuellem Anlass drauf hingewiesen werden.)

Zusatzfrage: Wenn wir bei der Choleskyzerlegung auf die Forderung $\ell_{ii} > 0$ verzichten, wieviele Möglichkeiten gibt es dann für L mit $LL^T = A$?