Präsenzübungen zur Vorlesung Wissenschaftliches Rechnen

Blatt 5

Aufgabe 1:
Was ist die orthogonale Projektion von $p = \binom{1}{7}$ auf den Spann $\langle q \rangle$ von $q = \binom{0{,}8}{0{,}6}$?

Was ist die orthogonale Projektion von $p = (2, -2, -2, 2)^T$ auf auf den Spann $\langle q \rangle$ von $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

Und was ist die orthogonale Projektion von $p = (2, -2, -2, 2)^T$ auf auf den Spann $\langle q_1, q_2 \rangle$ der beiden Vektoren $q_1 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})^T$ und $q_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})^T$?

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die Singulärwerte von

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ und von $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ mittels Gram-Schmidt.

Zusatz: Berechnen Sie die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mittels des Householderverfahrens.

Aufgabe 4:
Seien $p \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor der Länge 1, und $P = pp^T$. Zeigen Sie:

P ist symmetrisch.
$P^2 = P$.
Ist $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, dann ist Pv orthogonal zu $(E - P)v$.
Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar, so ist die Pseudoinverse $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ gleich A^{-1}.
Mit $H = E - 2pp^T$ gilt:
- H ist eine symmetrische und orthogonale Matrix.
- $H^2 = E$.
- p ist Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Sei $A = QR$ die QR-Zerlegung von A. (Für Q gilt also $Q^T Q = E$.) Zeigen Sie: $A^+ = R^{-1} Q^T$.
Sei $A = U \Sigma V^T$ die SVD von A. Seien alle Singulärwerte ungleich 0. Zeigen Sie: $A^+ = V \Sigma^{-1} U^T$.

Zusatzaufgabe:
Sei $v \in \mathbb{R}^m$. Was ist der Rang von vv^T?