Mathematik — was, wie, wozu?

Dr. Dirk Frettlöh

24. Juni 2008

Zusammenfassung

Dieser Text versucht, einige der Fragen zu beantworten, die wohl jeder Mathematiker häufig gestellt bekommt: Was macht man da eigentlich? Gibt's da überhaupt noch was zu erforschen? Und wozu ist das gut? Das soll so allgemein verständlich wie möglich beantwortet werden.

1 Was ist Mathematik?

In diesem Kapitel soll erläutert werden, was Mathematik ausmacht. Zunächst wird der Unterschied zu anderen Wissenschaften beschrieben, dann wird versucht, das wichtigste Werkzeug der Mathematik zu erläutern: den Beweis. Das haben schon viele Leute getan, die klüger sind als ich. Das Anliegen dieses Textes ist, eine Erklärung zu liefern, die so allgemein verständlich ist wie möglich.

Was also macht Mathematik aus? Grob gesprochen: es ist pure Logik. Es ist eine exakte Wissenschaft. Etwas pathetischer: in der Mathematik gibt es universelle Wahrheiten. Was einmal als wahr bewiesen ist, wird immer wahr bleiben. Der Satz des Pythagoras ist vor über 2500 Jahren gefunden und bewiesen worden, und seitdem hat sich nichts an seinem Wahrheitsgehalt geändert. Seit 2000 Jahren wissen wir, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Das stimmt heute noch, und wird immer stimmen. Seit 250 Jahren wissen wir, dass man die Kreiszahl $\pi = 3,141592654...$ nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellen kann. Auch das stimmt heute noch, und auch in 1000 Jahren noch, und es stimmt weiter bis ans Ende aller Zeiten.

Vergleichen wir das mal mit anderen Wissenschaften. Beispiel eins: noch vor 200 Jahren stritten sich die Gelehrten, ob die Erde in ihrem Kern kalt und fest ist, oder heiß und flüssig. Viele Gelehrte vertraten die erste These, den "Neptunismus". Damals lehrte man an vielen Universitäten den Neptunismus. Führende Experten (unter anderem übrigens auch Goethe) erklärten, dass es im Erdinnern kalt sei. Vulkane entstünden durch Brände von Kohleflözen im Erdinnern. Heute wissen wir, dass der Erdkern aus einem 6000 Grad heißem flüssigen Eisen-Nickel-Gemisch besteht. Also lagen die Gelehrten von damals, zumindest viele von ihnen, falsch.

In der Medizin galt zu jener Zeit der Aderlass, also das Abzapfen von Blut des Kranken, als Allheilmittel. Fast jede Krankheit — sogar Blutarmut! — wurden mit dem Aderlass behandelt. Heute weiß man, dass der Aderlass bei den allermeisten Krankheiten nicht hilft.

Das sind Beispiele aus der Vergangenheit. Es ist aber nicht so, dass wir heute nicht mehr irren. Ein Beispiel: Als Kind habe ich gelernt, dass Kondore (geierähnliche Raubvögel in den Anden in Südamerika) zu den Greifvögeln gehören, wie Adler oder Bussarde. Das war damals Stand der Wissenschaft.

Jeder Biologe hätte Ihnen genau das gesagt. Wenn Sie aber heute in einem aktuellen Buch nachschlagen, dann stellen Sie fest, dass Kondore zu den Schreitvögeln gehören, und am engsten mit den Störchen verwandt sind.

Ein weiteres Beispiel dafür, dass sich auch heute noch Wissenschaftler massenhaft irren können: Helicobacter pylori ist ein Bakterium, dass im menschlichen Magen vorkommt. Es löst verschiedene Krankheiten aus, unter anderem drei Viertel aller Magengeschwüre. Vor der Entdeckung des H. pylori als Ursache von Magengeschwüren wurde die Theorie der Übersäuerung des Magens sowie Einfluss psychischer Faktoren als Grund für die Krankheiten angenommen. So wurde es Ärzten an der Uni beigebracht. So hat vermutlich auch ihr Hausarzt es noch gelernt. Daher wurden Magengeschwüre mit Mitteln bekämpft, die die Magensäure verringern oder neutralisieren.

Barry Marshall und John Robin Warren aus Perth in West-Australien, entdeckten H. pylori im Jahre 1983. Ihre Entdeckung wurde von der medizinischen Forschung lange Zeit nicht ernst genommen! Sie wurden von den renommierten Experten als Spinner abgetan. Erst später, nachdem Warren sich in einem Selbstversuch mit H. pylori infiziert hatte, darauf Magengeschwüre entwickelte und sich durch Antibiotika kurierte, die die H. pylori in seinem Magen vernichteten, kam es zum Durchbruch. Das Bakterium wurde weltweit als Ursache von Magen- und Zwölffingerdarmgeschwüren anerkannt. Im Dezember 2005 wurden Warren und Marshall für ihre Arbeiten zu H. pylori mit dem Nobelpreis für Medizin ausgezeichnet. Hoffen wir, dass Ihr Hausarzt davon gehört hat, falls Sie ein Magengeschwür bekommen sollten. Man sieht: Manchmal hat die Wahrheit es schwer, sich gegen althergebrachte Ansichten durchzusetzen. Das ist in der Mathematik anders.

Im Gegensatz zu den genannten Beispielen, und im Gegensatz zu fast jeder anderen Wissenschaft, ist also Mathematik eine exakte Wissenschaft, eine, in der jede Aussage, die bewiesen werden kann, auch wahr ist, und zwar für alle Zeiten. Ob diese Aussage jemanden interessiert, ist ein anderes Thema, dazu später.

Übrigens sind meine Erachtens die einzig anderen exakten Wissenschaften die Informatik, die ja ein Kind der Mathematik ist, und die katholische Theologie. In der letzteren gilt ja: was der Papst sagt, zumindest in Glaubens- und Sittenfragen, ist wahr. Auch hier gibt es also eine Instanz, die über allen Zweifel erhaben ist. Was der Papst in der katholischen Kirche, das ist in der Mathematik der Beweis.

1.1 Was macht man da eigentlich?

Was ist nun ein Beweis? Ein bisschen ist es wie im Tatort: Man sammelt die Fakten, zieht Schlussfolgerungen, und erhält so Beweise für eine Kriminaltat. Allerdings sind die Kriterien in der Mathematik etwas strenger. Vom Prinzip her gleicht ein mathematischer Beweis einer Schachaufgabe: Matt in 3 Zügen. Es müssen die richtigen Züge gefunden werden, und egal, wie der Gegner zieht, auf alle seine Züge muss ich eine Antwort geben, die zum Matt führt.

Das sind nur Vergleiche. Was ist nun ein mathematischer Beweis? Das ist eine Kette von einfachen Schlussfolgerungen, die den Regeln genügen, auf die man sich geeinigt hat. Insofern ähnlich dem Schach, aber in der Mathematik gibt es viel, viel mehr Regeln. Das schränkt uns aber nicht ein, im Gegenteil: Es ist viel mehr erlaubt als im Schach. Solche Regeln sind etwa 1+1=2, oder: wenn $a = b$ und $b = c$ ist, dann ist auch $a = c$, oder: wenn $a = b$ ist, dann ist auch $3 \cdot a = 3 \cdot b$. In einem Beweis geht man oft von einer bekannten, wahren Tatsache aus, und folgert mittels dieser Regeln die zu beweisende Aussage. Das soll hier an drei Beispielen geschildert werden.

Erste Frage: Ist $1 = 0,999999.....$? Behauptung: Ja. Fangen wir so an: Es ist $\frac{1}{3} = 0,333333.....$ Das kann man glauben, so geht es aber nicht. Wir wollen nicht glauben, wir wollen wissen. Also so: wenn man 1 durch 3 dividiert, schriftlich, so merkt man schnell:

$$\begin{array}{l} 1 \quad : 3 = 0,3333... \\ \underline{0} \\ 10 \\ \underline{\ 9} \\ \ \ 10 \\ \ \ \underline{\ 9} \\ \ \ \ 10 \quad \cdots \end{array}$$

dass es immer auf die gleiche Weise weiter geht, bis zur 100sten und 1000sten und zillionsten Nachkommastelle. Also gilt $\frac{1}{3} = 0,333333.....$ Und wenn $a = b$ ist, dann ist auch $3 \cdot a = 3 \cdot b$. Also gilt

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,33333...$$

Was ist $3 \cdot 0,33333...$? Ähnlich wie eben kann man schriftlich multiplizieren und sieht: $3 \cdot 0,33333... = 0,99999....$ Also gilt insgesamt

$$1 = 0,999999....$$

Fertig. Wir haben nur ganz einfache, erlaubte Schlussfolgerungen gezogen und damit die Behauptung gefolgert, also bewiesen.

Zweite Frage: Ist 1003 eine Primzahl? (Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, ohne dass ein Rest bleibt. 12 ist keine Primzahl: 12 lässt sich glatt durch 2 teilen, auch durch 3 und 4 und 6. Aber 13 ist eine Primzahl: man kann 13 nur durch 13 und durch 1 teilen, ohne dass ein Rest bleibt. Teilt man 13 durch eine andere Zahl, etwa 2, so kommt etwas Krummes raus, zum Beispiel $13 : 2 = 6,5$) Es ist nicht auf Anhieb ersichtlich, ob 1003 eine Primzahl ist. 1003 ist weder durch 2 teilbar, noch durch 5 oder 10, auch nicht durch 3. Behauptung: 1003 ist keine Primzahl. Beweis: Schriftliche Multiplikation:

$$\begin{array}{r} \underline{17 \cdot 59} \\ 590 \\ \underline{413} \\ 1003 \end{array}$$

Also ist $1003 : 17 = 59$ und somit ist 1003 keine Primzahl.

Dritte Frage: Auf einem Tisch stehen zwei Karaffen. Eine enthält genau einen Liter Rotwein, die andere genau einen Liter Weißwein. Wir geben einen Esslöffel Rotwein in die Weißweinkaraffe, rühren gut um, und geben einen Esslöffel des Gemischs aus der Weißweinkaraffe zurück in die Rotweinkaraffe. Ist nun mehr Rotwein im Weißwein als Weißwein im Rotwein, oder weniger, oder gleich viel?

Erfahrungsgemäß sind die Ansichten darüber geteilt. Wir wollen nun beweisen, dass die richtige Antwort 'gleich viel' lautet. Dazu arbeiten wir mit *Variablen*, mit Werten, die wir mit Buchstaben bezeichnen, weil wir die Werte noch nicht genau kennen, aber einige ihrer Eigenschaften. Bezeichne also R die Menge an Rotwein, die am Ende in der Rotweinkaraffe ist, und r die Menge an Rotwein, die am Ende in der Weißweinkaraffe ist. Entsprechend bezeichne W die Menge an Weißwein, die am Ende in der Weißweinkaraffe ist, und w die Menge an Weißwein, die am Ende in der Rotweinkaraffe ist. Wir wissen auf jeden Fall, dass insgesamt 1 Liter von jeder Weinsorte da ist, also

$$R+r=1, \quad W+w=1$$

Wir wissen auch, dass am Ende die Rotweinkaraffe wieder einen Liter Wein enthält, da wir ja einen Esslöffel Wein entnommen und wieder hinzugefügt haben:

$$R+w=1$$

Es folgt $R+r=R+w$, also auch $r=w$. Also ist gleichviel Weißwein im Rotwein wie Rotwein im Weißwein. Fertig. Oder q.e.d., wie der Lateiner sagt, 'quod erat demonstrandum', was zu beweisen war.

An dem letzten Beweis sehen wir ein Prinzip der Mathematik: Wir kennen zwar nicht die Werte von R,W,r und w, aber wir wissen dennoch etwas über sie. Alles was wir über sie wissen, sammeln wir erstmal und versuchen dann daraus zu folgern, was wir wissen möchten.

Diese Beispiele sind natürlich extrem einfach. Die meisten Beweise sind länger und viel schwieriger zu verstehen. Außerdem wird typischerweise vorausgesetzt, dass der Leser sich sehr gut in dem entsprechenden Gebiet auskennt. Es gibt nämlich innerhalb der Mathematik viele verschiedene Teilgebiete.

1.2 Gibt es da überhaupt noch etwas zu erforschen?

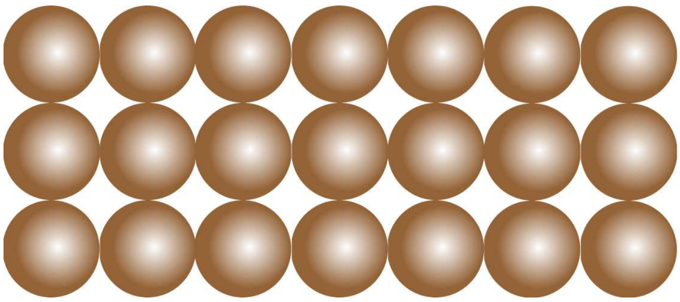
Teilgebiete innerhalb der Mathematik sind zum Beispiel Wahrscheinlichkeitstheorie, Zahlentheorie oder Geometrie. Oft gibt es sogar innerhalb dieser Gebiete weitere Aufteilungen in spezielle Teilgebiete, etwa algebraische Zahlentheorie oder diskrete Geometrie. Manche Gebiete, und manche Fragen, sind so kompliziert, dass man erstmal ein paar Jahre studieren müsste, um zu verstehen, worum es überhaupt geht. Wenn ich zum Beispiel von meinem Büro in der Uni ein paar Türen weitergehe, dann sitzen hinter diesen Türen Mathematiker, deren Spezialgebiet ist algebraische Geometrie. Sie erforschen p-adische L-Funktionen und Shimura-Varietäten. Ich selbst habe keine Ahnung, was die genau tun. Ich weiß, was p-adisch heißt, habe eine Ahnung davon, was eine L-Funktion ist und keinen blassen Schimmer, was eine Shimura-Varietät sein mag. Um das richtig zu verstehen bräuchte ich Tage oder Wochen. Um da etwas beizutragen bräuchte ich Jahre. Mein Spezialgebiet ist diskrete Geometrie. Ich kann sagen, was es in meinem Teilgebiet zu erforschen gibt, und in ein paar anderen, aber bei vielen Teilgebieten kann ich es nicht.

Im Folgenden werden einige Beispiele aus der mathematischen Forschung der letzten Jahre und Jahrzehnte geschildert. Diese sind so gewählt, dass wenigstens die Problemstellung und die Antwort leicht verständlich sind.

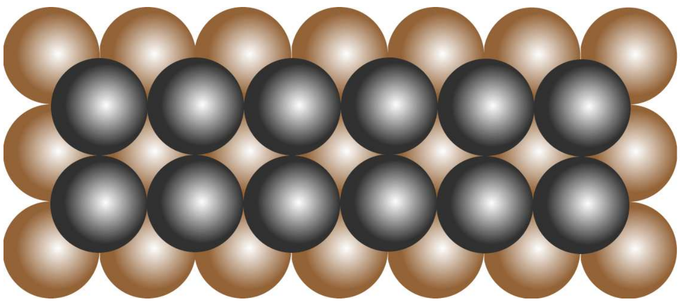
Die Catalansche Vermutung: Es geht um Potenzen von ganzen Zahlen. 2^3 ("2 hoch 3") heißt $2\cdot 2\cdot 2$, also $2^3=8$. Entsprechend ist $3^2=3\cdot 3=9$. Im Jahr 1844 äußerte der belgische Mathematiker Catalan die Vermutung, dass 2^3 und 3^2 die einzigen Potenzen sind, die sich nur um 1 unterscheiden. (Wobei 1 und 0 nicht vorkommen sollen, sonst geht ja zum Beispiel $5^1=4^1+1$, oder $1^1=0^1+1$.) Was immer man sonst probiert, so Catalan, immer unterscheiden sich die Werte um mehr als 1, oder um 0. Zum Beispiel: $4^3=64$ und $3^4=81$ unterscheiden sich um 17. $13^3=2197$ und $3^7=2187$ unterscheiden sich um 10. $128^4=16384$ und $4^7=16384$ sind genau gleich, unterscheiden sich also um 0, nicht um 1. Egal, wie lange man suche, vermutete Catalan, nie finde man zwei Potenzen (außer 2^3 und 3^2), die sich genau um 1 unterscheiden. Er konnte es aber nicht beweisen. Das gelang erst 2002 einem rumänischen Mathematiker, Professor Mihailescu, von der Uni Paderborn. Seitdem ist die Vermutung wahr. Herr Mihailescu ist berühmt (naja, zumindest unter Mathematikern auf der ganzen Welt) und trat 2005 eine Stelle in Göttingen an.

Das Vier-Farben-Problem: Im Jahre 1852 fragte Francis Guthrie, ein Mathematikstudent am University College in London, seinen Professor Augustus de Morgan, warum man jede Landkarte mit vier Farben färben kann, ohne dass gleichfarbige Länder aneinandergrenzen. Der Professor schrieb später: “Ein Student von mir fragte mich heute nach einem Grund für eine Tatsache, von der ich nicht wusste, dass es eine Tatsache ist — und es immer noch nicht weiß.” Beachten Sie, wie vorsichtig er ist, etwas als Tatsache zu bezeichnen. Er weiß noch nicht, ob es wirklich stimmt, dass man jede Landkarte mit vier Farben färben kann, denn es ist noch nicht bewiesen. Er hat es sicher probiert, und alle möglichen Landkarten ausprobiert, aber nicht geschafft, es zu beweisen. Also ist es bisher nur eine Vermutung, die wahr oder falsch sein kann. Heute wissen wir, dass es wahr ist: Jede Landkarte kann mit nur vier Farben so gefärbt werden, dass keine gleichfarbigen Länder aneinandergrenzen. Damals konnte lange Zeit niemand einen — korrekten! — Beweis liefern. Es gab viele falsche Beweise, aber hier zeigt sich ein weiteres Prinzip der Mathematik: Man kann alles nachprüfen. Auch wenn es manchmal etwas länger dauert. 1879 und 1880 wurden zwei Beweise zur Vier-Farben-Vermutung veröffentlicht. Erst 1890 und 1891 wurden diese widerlegt: Beide enthielten Fehler. Das Problem blieb lange ungelöst. Erst mit Hilfe von Computern konnte es 1976 bewiesen werden. Dieser Computerbeweis stieß übrigens auf Kritik: Nun musste man dem Computer trauen. Darf man das? Gilt das wirklich als Beweis? Mittlerweile haben andere Mathematiker den Beweis auf verschiedene Weise nachvollzogen (allerdings jedesmal mit Computern), und heute ist er allgemein akzeptiert.

Die Keplervermutung: Wie kann man Kugeln am platzsparendsten stapeln? Vor fast 400 Jahren vermutete Johannes Kepler (der, der auch die Planetenbahnen berechnete), dass es nicht besser geht als auf die folgende Weise. Man lege eine Schicht Kugeln nach einem quadratischen Schema, so:



Dann lege man eine weitere Schicht Kugeln so darauf, dass die neuen Kugeln jeweils in den Vertiefungen liegen:



Darauf kommt die nächste Schicht, wieder so, dass die neuen Kugeln jeweils in den Vertiefungen liegen. Füllt man eine sehr große Kiste auf diese Weise mit sehr kleinen Kugeln, so enthält die Kiste etwa 74% Kugeln und 26% Luft. Kepler vermutete, besser geht's nicht. Jeder glaubte ihm, dass das stimmt. Aber das reicht dem Mathematiker nicht: Ein Beweis muss her. Viele Mathematiker beschäftigten sich mit diesem Thema und lieferten Teilergebnisse. Ein kompletter Beweis ließ lange auf sich warten. 1975 veröffentlichte das Multitalent Buckminster Fuller einen Beweis, aber dieser stellte sich bald als falsch heraus. 1993 veröffentlichte der Mathematiker Wu-Yi Hsiang einen Beweis, der über 100 Seiten lang ist. Dieser wurde von Experten überprüft und nicht akzeptiert. Sie fanden zwar keinen Fehler, aber bewerteten den Beweis als unvollständig. Thomas Hales fand 1996 eine Methode, die Vermutung zu beweisen. Diese Methode war wieder mal stark auf Computerberechnungen angewiesen. Diese Berechnungen dauerten mehr als zwei Jahre. Wegen der ungewöhnlichen Form des Beweises wurde ein Rat von 12 Experten gebildet, die den Beweis prüften. Nach fünf Jahren sagten diese, sie seien zu 99% sicher, dass der Beweis stimmt. Im Moment arbeiten Hales und seine Gruppe daran, den Beweis zu vereinfachen, so dass er leichter überprüft werden kann. Hales schätzt, dass das etwa 20 Jahre dauern wird.

Dies ist ein extremes Beispiel. Meine eigenen Beweise sind kürzer. Ein Beweis von mir und einem russischen Kollegen, Alexey Glazyrin, löst folgendes Problem: Stellen sie sich irgendwelche Fliesen vor, dreieckig oder sechseckig oder viereckig, egal, und ein lückenloses Muster aus diesen Fliesen. Kann es passieren, dass in diesem Muster die Ecke einer Fliese an keine weitere stößt? Und wie ist das in drei Dimensionen, also wenn man die Fliesen durch Bauklötze ersetzt, und damit eine Kiste füllt? Kann es sein, dass die Ecke eines Bauklotzes an keine weitere Ecke eines anderen Bauklotzes stößt? Und wie ist das in noch höheren Dimensionen?

Für Fliesen, also für Dimension zwei, ist es einfach. Es geht nicht. Das sieht man leicht durch Ausprobieren. Aber für drei und mehr Dimensionen ist das schwierig. Alexey und ich konnten beweisen, dass es in keiner Dimension geht. Jede Ecke eines Bauklotzes stößt an mindestens eine weitere Ecke eines anderen Bauklotzes. Der Beweis ist etwa zwei Seiten lang, und ganz einfach zu verstehen, zumindest für Mathematiker. Nun fragen Sie sich sicher, zu Recht, wozu so was denn bitte gut sein soll. Ob 17-dimensionale Bauklötze so oder so liegen, oder ob die Differenz von zwei Potenzen genau eins ist, oder wie man Landkarten färbt. Gute Frage.

2 Wozu ist Mathe gut?

Die Antworten auf die Frage, wozu Mathematik nützt, fallen in zwei Kategorien. Zum einen nützt Mathematik mir selbst. Zum anderen nützt es der Allgemeinheit.

2.1 Was nützt Mathe mir selbst?

Einfache Antwort: Es macht mir Spaß, und ich bekomme auch noch Geld dafür. Das empfinde ich als großes Glück. Ich glaube, wenige Leute können ihr Hobby zu einem einträglichen Beruf machen. Profisportler zum Beispiel, und manche Künstler. So wie andere in ihrer Freizeit Fußball oder Gitarre spielen, so würde ich in meiner Freizeit Mathematik treiben, wenn ich einen anderen Beruf hätte als den, den ich jetzt habe.

Ein weiterer Nutzen ist, dass ich durch meine Ausbildung, in der es ja viel um strenge Logik und rationales Schließen geht, viele Dinge verstehe, womit ich mich sonst schwerer täte. Bedienungsanleitungen von elektronischen Geräten sind ein Beispiel. Linienpläne von Bahnen und Bussen in fremden Städten ein anderes.

Auch hilft mir meine Ausbildung oft, Schwachsinn von seriösen Dingen zu unterscheiden. Oft werden ja Statistiken oder Berechnungen präsentiert, die uns von etwas überzeugen wollen. Mir hilft Mathe, in diesen Fällen Schwachsinn von Fakten zu unterscheiden. Vielleicht erinnern Sie sich an eine Reihe von Beiträgen in stern TV mit Günther Jauch, die im Frühjahr 2006 liefen: Ein Herr Karl-Heinz Grotelaers behauptet, ein System zu kennen, mit dem er beim Roulette immer gewinnt. Er erzählte dazu etwas von "Auswertung von Permanenzen". Er wettete, er könne an 10 Abenden den Roulettetisch mit Gewinn verlassen. Das wurde groß inszeniert, in der Berliner Spielbank, die zu diesem Zwecke extra für das allgemeine Publikum geschlossen wurde, und in mehreren Beiträgen in stern TV ausgestrahlt, mit dem entsprechenden Rummel. Dabei ist es jedem Mathematiker sofort klar: Natürlich gibt es ein System, bei dem man beim Roulette (fast) immer Gewinn macht. Das geht so: Man setze 5 Euro auf Rot. Wenn Rot kommt, hat man 5 Euro Gewinn gemacht. Wenn nicht, setze man 10 Euro auf Rot. Wenn Rot kommt, hat man 5 Euro Gewinn gemacht. Wenn nicht, setze man 20 Euro auf Rot. Wenn Rot kommt, hat man 5 Euro Gewinn gemacht. Wenn nicht, setze man 40 Euro auf Rot. Und so weiter. Irgendwann kommt Rot, und man hat 5 Euro Gewinn gemacht. Oder aber man hat sehr viel Pech, und es fällt immer Schwarz, solange bis man Pleite ist. Das ist aber sehr unwahrscheinlich. Spielt man obiges System, und hat man 50.000 Euro in der Tasche, so ist die Wahrscheinlichkeit nur 0,01%, dass man Pleite geht. Das passiert nur sehr, sehr selten.

In dem Fernsehbeitrag spielte Herr Grotelaers eine Variante dieser Strategie, des so genannten Verdoppelns. Sein Gerede über "Auswertung von Permanenzen" ist Mumpitz. Aber natürlich nützt es allen Beteiligten, wenn Sie diese Tatsache ignorieren: Herr Grotelaers wollte sein "System" vermarkten und verschaffte sich so eine Werbeplattform. Casinos leiden allgemein über Umsatzrückgang, also hatte auch die Spielbank Berlin etwas von dem Rummel. Die Fernsehleute erhoffen sich eine hohe Einschaltquote. Die wird natürlich nicht erreicht, wenn Günther Jauch ehrlich sagen würde: Dieses "System" ist ein alter Hut, sondern eher, indem er die Zuschauer im Unklaren lässt. Sei's Ihnen gegönnt. Ich habe nicht eingeschaltet.

Oder Zaubertricks: Denken Sie sich eine zweistellige Zahl. Multiplizieren Sie diese mit 9. Zählen sie nun die Ziffern der Zahl zusammen, die Sie erhalten haben. Falls Sie jetzt immer noch eine zweistellige Zahl haben, zählen Sie nochmals die Ziffern dieser letzten Zahl zusammen, usw., bis Sie eine einstellige Zahl haben. Ziehen Sie davon 5 ab. Und nun übersetzen Sie diese Zahl in einen Buchstaben, so: A=1, B=2, C=3, D=4, E=5 usw. Denken Sie sich nun eine Frucht aus, die mit diesem Buchstaben beginnt. Und außerdem ein Land in Europa, das mit diesem Buchstaben beginnt, aber das nicht an die Schweiz grenzt. Und nun sage ich Ihnen: Sie haben Datteln und Dänemark gewählt.

Viele Zaubertricks haben einen mathematischen Hintergrund. Tatsächlich sind sogar viele Mathematiker Amateurzauberer. Und daher hilft mir persönlich die Mathematik, Scharlatanerie zu entlarven, seien es Wahrsager, Börsengurus, Statistiken, Erich von Däniken, Astrologen oder "The next Uri Geller".

Ein weiterer Vorteil ist, dass man als Mathematiker praktisch immer einen guten Job bekommt. Wäre ich nicht an der Uni geblieben, so hätte ich zum Beispiel bei einer Versicherung anfangen können, oder bei einem Softwareunternehmen. Viele Mitstudenten, die mit mir zusammen das Diplom oder den Doktor gemacht ("promoviert") haben, haben danach nur drei bis acht Bewerbungen geschrieben und mehr als ein Jobangebot bekommen. Sie programmieren oder pflegen nun Software oder rechnen die Versicherungsprämien für die Kfz-Vollkaskoversicherung für nächstes Jahr aus.

Gerne werden Mathematiker auch als Unternehmensberater eingestellt. Ein sehr anstrengender und in meinen Augen sinnloser Job, aber man verdient sehr gut, und es ist eine gute Ausgangsposition für eine Topkarriere. Vielleicht kennen Sie noch Ron Sommer, Ex-Chef der Telekom. Er ist promovierter Mathematiker. Wenn Sie bei google eingeben "promovierte Mathematiker", dann finden Sie haufenweise Verweise auf Mathematiker, die Abteilungsleiter oder Vorstandsmitglieder in großen Firmen sind. Bill Gates ist zwar kein Mathematiker, aber er studierte in Harvard Mathe und Naturwissenschaften. Dort verbrachte er allerdings seine ganze Zeit im Computerraum und brach 1975 das Studium ab, um sich ganz seiner Firma zu widmen. Heute ist Bill Gates einer der reichsten Menschen der Erde. Die Chefs von google, Sergey Brin und Larry Page, studierten Informatik. Während ihrer Promotion entwickelten sie eine mathematische Methode, die die Wichtigkeit von Internetseiten misst. Diese Methode ist einer der Gründe für den Erfolg von google: die wichtigesten Seiten werden zuerst angezeigt. Alle Suchmaschinen benutzen mittlerweile diese oder eine ähnliche Methode, um die Wichtigkeit von Internetseiten zu bewerten. Heute sind Brin und Page unter den 40 reichsten Menschen der Welt. Zwar noch hinter den Aldibrüdern, aber vor allen anderen Deutschen. Mathe kann also sogar reich machen.

Übrigens gibt es auch immer zu wenige Mathelehrer. Angehende Deutschlehrer oder Geschichtslehrer oder Biolehrer können sich die Stelle oft nicht aussuchen. Je nach Lage bekommen sie überhaupt keine Stelle. (Im Moment ist die Lage entspannt, die meisten Lehrer bekommen eine Stelle.) Aber an Mathelehrern herrscht immer Mangel. Ich habe mich erkundigt: Wenn ich wollte, könnte ich sofort als Mathelehrer anfangen (Stand 2007). Warum? Ich habe Lehrerfahrung, von der Uni her. Ich kann auch Informatik und Physik unterrichten. Aber das wichtigste: Ich habe Mathe studiert. Wenn nun eine Schule in NRW eine Mathelehrerstelle nicht besetzen kann, und ich mich dort bewerbe, darf die Schule mich sofort einstellen. Von Beginn an dürfte ich unterrichten, das Referendariat darf ich nebenher machen, und verbeamtet würde ich auch, da ich noch jung genug bin. Wäre ich Doktor der Philosophie, oder der Geschichte, oder der Soziologie, so ginge das nicht.

2.2 Was nützt Mathe der Allgemeinheit?

Ein naheliegender Nutzen der Mathematik ist ihre Nützlichkeit in Bereichen wie Maschinenbau, Computern und Betriebswirtschaft. Ein Matheprofessor an einer Uni bildet nicht nur Mathematiker aus, sondern auch Wirtschaftler und Ingenieure. Wenn ich über eine Brücke fahre, finde ich persönlich es beruhigend zu wissen, dass der Ingenieur, der die Brücke geplant hat, Integralrechnung kann. Das hat er an der Uni bei einem Matheprofessor lernen müssen, sonst darf er sich nicht Diplomingenieur nennen. Wenn ich den Verdacht hätte, dass der entsprechende Ingenieur keine Integralrechnung kann, so würde ich die Brücke nicht benutzen. Dasselbe gilt für Autos, Flugzeuge, Hochhäuser usw. Ähnliches gilt für meine Bank und meine Versicherungen. Gut, die Leute hinter dem Bankschalter mögen nur geringe Ahnung von Mathe haben, aber irgendwo sitzt jemand, der Ahnung von Mathe hat. Sonst würde ich denen nicht vertrauen.

Außerdem bilden Mathematikprofessoren ja auch Mathelehrer aus. Ich möchte auch, dass der Mathelehrer meiner Nichten (und vielleicht mal der meiner Kinder) Ahnung von Mathematik hat. Meine Erfahrungen an der Uni geben mir leider Anlass zu Zweifeln, aber das möchte ich hier nicht ausführen. Ein Kind, das bei einem guten Mathelehrer lernt, lernt wichtige Dinge fürs Leben.

Ein weiterer Nutzen der Mathematik liegt nach dem ersten Kapitel nahe: Mathematik liefert wahre Antworten. Oft auf Fragen, die keinen interessieren. Aber falls es gelingt, eine Frage aus der realen Welt in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, so gelingt es manchmal bis oft, diese Frage zu beantworten. Ein Beispiel ist die Optimierung. Das Standardbeispiel dazu ist folgendes: Eine Firma kann drei (oder 5 oder 17...) verschiedene Produkte herstellen: A, B, C. Jedes Produkt hat seine Produktionskosten, und jedes wirft einen gewissen Gewinn ab. Es kann aber nicht beliebig viel produziert werden, es gibt Beschränkungen für die Gesamtkapazität, die hergestellt werden kann. Das Problem gab es schon vor 100 oder vielleicht auch 1000 Jahren. Je nach Situation kann es sehr knifflig sein, das optimale Produktionsschema zu finden. Früher wurde das ad hoc gemacht, Erfahrung, gutes Raten, Beispielrechnung. Heute gibt es mathematische Methoden, die immer das optimale Produktionsschema liefern, also dass, das den maximalen Gewinn erzielt, oder die maximale Auslastung, oder was immer man maximieren möchte. (Wenn dann allerdings eine Maschine kaputtgeht, hat die Realität der Mathematik mal wieder einen Streich gespielt, wie so oft. Der Praktiker dreht uns dann eine Nase: Ätsch, das habt ihr nicht ausrechnen können. Der Mathematiker erwidert ihm dann: Realität ist mir doch egal. Realität ist auf Mathematik angewiesen, aber Mathematik nicht auf Realität.)

Ein weiteres großes Beispiel sind die Naturwissenschaften, speziell die Physik. Naturwissenschaften wollen erforschen, wie die Welt um uns funktioniert, wie Leben entsteht, wie die Erde aufgebaut ist und ob die Sonne eines Tages explodieren wird. Obwohl nun Mathematik ein völlig abstraktes Gebilde ist, ist es ganz oft so, dass Dinge in der Natur mathematisch beschrieben werden können, oder mathematischen Gesetzen gehorchen. Mathematik ist die Sprache der Physik. Ohne Mathematik keine Naturwissenschaften. Dabei tritt die Mathematik ihren Siegeszug gerade erst an: In der Physik war sie schon immer wichtig. In der Biologie dagegen kaum. Stark vereinfacht gesagt: Früher reichte es einem Biologen, Arten zu bestimmen, die Systematik der Arten zu kennen und Tiere zu beobachten. Mittlerweile hat die Mathematik Einzug gehalten: Gensequenzen und Abstammungslinien werden mit mathematischen Methoden untersucht und verglichen. Es werden mathematische Modelle zur Beschreibung von Populationsgrößen und zur Entwicklung von Embryos aufgestellt. Und diese Herangehensweise ist sehr erfolgreich. Neue Erkenntnisse werden gewonnen, und einige alte Erkenntnisse als falsch entlarvt. Ich bin aber der Falsche, um darüber genau zu berichten, dazu weiß ich zu wenig von Biologie.

Aber betrachten wir mal ein praktischeres Beispiel, wozu Mathematik nützlich sein kann. Vielleicht kennen Sie die Geschichte der Enigma. Das war eine Maschine zum Verschlüsseln von Botschaften, die das deutsche Militär im zweiten Weltkrieg nutzte. Sie war höllisch schwer zu knacken. Die Briten und Amerikaner konnten zwar deutsche Funkrufe abhören, aber sie konnten sie nicht entschlüsseln. Um dieses Problem zu lösen versammelte man die besten Spezialisten in Bletchley Park: Linguisten, Codeknacker, Wortakrobaten, Militärs, Schachspieler und Mathematiker. Letztendlich waren es die Mathematiker, allen voran Alan Turing, die den Code (besser: die Codes) knacken konnten. Nebenher erfanden sie den elektronischen Computer. (Zwar baute Konrad Zuse in Deutschland den ersten elektronischen Computer schon eher, 1941, aber den kannten die Briten nicht.) In der Folge wussten Engländer und US-Amerikaner immer, wo die deutschen U-Boote lagen, oder welche englische Stadt als nächstes bombardiert werden sollte. Vermutlich konnten so viele Menschen vor dem Tod bewahrt werden. Mathematik kann also durchaus sehr wichtigen direkten Nutzen haben.

Es gibt aber noch einen weiteren, weniger offensichtlichen Nutzen der Mathematik. Mathematiker arbeiten oft an Problemen, die keinen offensichtlichen Nutzen haben. Die man für Spielerei halten könnte. Denken Sie an die Catalansche Vermutung, oder das Vier-Farben-Problem. Sicher ist es sehr oft so, dass Mathematik keinen praktischen Nutzen hat. Das stimmt für die Mehrzahl der Fälle. Mich würde wundern, wenn etwas meiner eigenen Ergebnisse jemals außerhalb der Mathematik zu etwas Nutze ist. Aber: Der Rest, die Mathematik, die praktischen Nutzen hat, ist so wertvoll, dass man nicht darauf verzichten sollte.

Das soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Der Franzose Evariste Galois studierte im Jahre 1832 Mathematik. Er war zwar erst 20 Jahre, aber ein Genie. Er untersuchte Nullstellen von bestimmten Funktionen (Polynomen) und entwickelte davon ausgehend eine abstrakte algebraische Theorie, die Galoistheorie. Galois starb schon mit 20 Jahren in einem politisch motivierten Duell. In den Monaten und Wochen vor diesem Duell schrieb er soviel zu seiner Theorie auf, wie es ihm möglich war. Heute lernt jeder Mathestudent in seinem Studium Galoistheorie. 1960 veröffentlichten die amerikanischen Mathematiker und Ingenieure Irving Reed und Gustave Solomon einen mathematischen Artikel zu fehlerkorrigierenden Codes, der starken Gebrauch von Galoistheorie macht. Ein fehlerkorrigierender Code beruht auf folgender Idee: Wenn man ein Signal empfängt, von dem man weiß, dass es zu Fehlern kommt, wie kann man trotz der Fehler die komplette Information ermitteln, die gesendet wurde? Stellen Sie sich vor, Sie müßten eine Telefonnummer übermitteln, etwa 02587 555. Und jedes vierte Zeichen ginge bei der Übertragung verloren. Senden sie einfach die Zahlenfolge 02587555, so kommt an 025x755x, und der Empfänger kann nichts damit anfangen. Senden Sie aber die Zeichenfolge NullZweiFünfAchtSiebenFünfFünfFünf, so kommt folgendes an: NulxZwexFünxAchxSiexenFxnfFxnfFxnf. Sieht zwar kaputt aus, aber man kann recht einfach die Telefonnummer daraus schließen. Diese Methode, statt der Ziffern die Worte für die Ziffern zu senden, wäre ein sehr einfaches Beispiel für einen fehlerkorrigierenden Code. Reed und Solomon entwickelten einen fehlerkorrigierenden Code, der sehr schnell arbeitet, und der so gut ist, dass er auch funktioniert, wenn mal 1000 aufeinanderfolgende Signalzeichen falsch sind. Dieser Code ist eine direkte Anwendung der Galoistheorie. Dieser Code wird heute in CD-Spielern und DVD-Spielern verwendet, in DSL-Anschlüssen und vielem mehr. Bei einer CD werden sehr viele Signale gelesen, 4 Millionen pro Sekunde, und einige werden halt falsch gelesen. Ohne den Reed-Solomon-Code, und somit ohne Galoistheorie, würde sich eine CD anhören wie eine zerkratzte Langspielplatte. Das hat 1832 natürlich niemand vorhersehen können. Damals hätte niemand geahnt, dass Galoistheorie mal einen praktischen Nutzen haben kann.

Diese Beispiele illustrieren hoffentlich ein wenig, warum Mathematik, und sei sie noch so theoretisch, der Allgemeinheit nutzen kann.

Ich denke, ich habe die Mathematik nun genug bejubelt: Absolute Wahrheiten, Jobchancen, weitreichender Nutzen. Dabei ist mir immer bewusst, dass Mathematik nicht alles ist, sondern nur ein kleiner und für die meisten Menschen unbedeutender Teil des Lebens. Die wichtigsten Tugenden im Leben sind meines Erachtens Wahrheit, Liebe und Tatkraft. Daran ordne ich Dinge ein. Mathe hat dabei nur mit dem ersten von den dreien zu tun, und das nur zu einem kleinen Teil.

Mathematiker benehmen sich genauso schlau oder doof wie alle anderen. Nur wo, das unterscheidet sich. Es gibt Leute, die sind Kommunikationsgenies. Oder clever im Umgang mit Geld. Andere sind gut darin, zu helfen und zu trösten. Ich selbst bin in den letztgenannten Dingen nicht gut. Ich könnte in der Sahara keinen Kühlschrank verkaufen. Es gibt Leute, die können in der Sahara sogar Heizungen verkaufen. Jeder hat eine Gabe, etwas, worin er oder sie gut ist. Bei mir ist das eben Mathe. Wir sollten uns halt gegenseitig mit unseren Stärken ergänzen, so gut es geht.