Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie III

Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

Algebraische Topologie III

Homologiegruppen als Homotopiegruppen

Die Überschrift bezieht sich auf die folgende Tatsache. Einem Raum X kann man immer einen andern Raum $F(X)$ zuordnen ("F" für "funktorielle Konstruktion"), so daß

$$H_i(X) \;\cong\; \pi_i F(X) \ .$$

Die Beschreibung dessen, was es mit diesem "F" auf sich hat, ist besonders einfach, wenn man 'Raum' hier interpretiert als "kombinatorisch definierten CW-Komplex"; also *simpliziale Menge*. Diese Beschreibung soll jetzt gleich gegeben werden.

Daß die so konstruierten Homotopiegruppen wirklich die Homologiegruppen von dem ursprünglichen X ergeben, ist nicht ganz selbstverständlich. Für den Nachweis braucht man einige Dinge über simpliziale Mengen, die wir bisher noch nicht gemacht haben. Mit diesen Dingen wollen wir uns in Kürze befassen — aus dem gegebenen Anlaß und auch, weil die Dinge für sich genommen sehr interessant sind.

Nun zu der avisierten Beschreibung von "F".

Bezeichne, wie früher, Δ diejenige Kategorie, die man für die Buchführung bei den simplizialen Mengen benötigt. Die Objekte von Δ sind also die geordneten Mengen: $[0]$, $[1]$, $[2]$, ... ,

$$[n] \;=\; (\, 0 < 1 < \,\cdots\, < n{-}1 < n \,) \ ,$$

und die Morphismen sind die (schwach) monotonen Abbildungen; ein Morphismus in Δ, von $[m]$ zu $[n]$, ist also eine Abbildung

$$\alpha : \ [m] \longrightarrow [n] \quad , \qquad i \leq j \implies \alpha(i) \leq \alpha(j) \ .$$

Besonders prominente Beispiele von solchen Abbildungen sind (für jedes $n \geq 1$) die injektiven Abbildungen δ_i , $0 \leq i \leq n$,

$$\delta_i : \ [n{-}1] \longrightarrow [n] \qquad (i \text{ wird nicht getroffen}) \ ,$$

und (für jedes n) die surjektiven Abbildungen σ_i ,

$$\sigma_i : \ [n{+}1] \longrightarrow [n] \qquad (i \text{ wird zweimal getroffen}) \ .$$

Die simpliziale Menge X ist, nach Definition, ein kontravarianter Funktor von der Kategorie Δ in die Kategorie der Mengen,

$$X : \ \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \ .$$

Oder, ausgeschrieben: für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$, hat man eine Menge X_n, und für jede Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ hat man die induzierte Abbildung (Gegenrichtung!)

$\alpha^* : X_n \to X_m$. Prominente Beispiele für die Struktur-Abbildungen sind die *Rand-Abbildungen* d_i,

$$d_i := \delta_i^* \quad , \qquad d_i : X_n \longrightarrow X_{n-1} \ ,$$

und die *Ausartungs-Abbildungen* s_i,

$$s_i := \sigma_i^* \quad , \qquad s_i : X_n \longrightarrow X_{n+1} \ .$$

Für die Konstruktion der Homologie nun muß man die Mengen X_n "linearisieren": X_n ist zu ersetzen durch die davon erzeugte abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[X_n]$; und jede der Abbildungen $\alpha^* : X_n \longrightarrow X_m$ durch die "linearisierte" Abbildung $\mathbb{Z}[X_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[X_m]$.

Etwas prägnanter ausgedrückt: man ersetzt die *simpliziale Menge* X (den Funktor $X : \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen})$) durch die *simpliziale abelsche Gruppe* $\mathbb{Z}[X]$; d.h. den Funktor $\mathbb{Z}[X] : \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{abelsche Gruppen})$, der gegeben ist durch die Zusammensetzung

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} (\text{Mengen}) \xrightarrow{\mathbb{Z}[-]} (\text{abelsche Gruppen}) \ , \qquad [n] \longmapsto X_n \longmapsto \mathbb{Z}[X_n] \ .$$

Für die Konstruktion der Homologie müßte man nun noch zwei andere Dinge tun: Man müßte die simpliziale abelsche Gruppe, von der gerade die Rede war, weiter durch einen Kettenkomplex ersetzen und von dem dann die Homologiegruppen bilden. Von diesen beiden Schritten soll aber hier im Moment nicht die Rede sein.

Vielmehr notieren wir, daß eine simpliziale abelsche Guppe ihrerseits ja auch eine simpliziale Menge ist (per Vergessen der Addition); anders ausgedrückt: eine simpliziale abelsche Gruppe hat eine unterliegende simpliziale Menge. Es macht deshalb Sinn, von der *geometrischen Realisierung* einer simplizialen abelschen Gruppe zu reden (oder, wenn man es genau nehmen will: von der geometrischen Realisierung ihrer unterliegenden simplizialen Menge). Es existiert also der Raum

$$\big|\, \mathbb{Z}[X] \,\big| \ .$$

Satz. *Die Homotopiegruppen von* $|\,\mathbb{Z}[X]\,|$ *sind die Homologiegruppen von* X.

Den Satz wollen wir beweisen. Dazu müssen wir drei Dinge tun (die alle nicht-trivial sind):

(1) Die Homologiegruppen des $\mathbb{Z}[X]$ zugeordneten Kettenkomplexes vergleichen mit noch zu definierenden "Homotopiegruppen der simplizialen abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[X]$".

(2) Eine spezielle Eigenschaft von (gewissen) simplizialen Mengen studieren (die sogenannte *Erweiterungs-Eigenschaft*), die bei simplizialen abelschen Gruppen automatisch erfüllt ist (wie sich herausstellt) und bei deren Vorliegen es möglich ist, eine vernünftige *kombinatorische* Definition der Homotopiegruppen (*ohne* den Umweg über die geometrische Realisierung) anzugeben und zu studieren. Das hängt eng damit zusammen, eine Variante der *Faserungs-Theorie* für simpliziale Mengen zu entwickeln.

(3) Die kombinatorisch definierten Homotopiegruppen müssen verglichen werden mit den topologisch definierten Homotopiegruppen (d.h. den Homotopiegruppen der geometrischen Realisierung der simplizialen Menge).

Simpliziale abelsche Gruppen

Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe,

$$A:\ \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{abelsche Gruppen}) \ , \qquad [n] \longmapsto A_n \ .$$

Früher haben wir dem A einen Kettenkomplex CA zugeordnet, der so definiert war: die n-te Kettengruppe CA_n ist definiert als die abelsche Gruppe A_n, und die Rand-Abbildung $\partial:\ CA_n \longrightarrow CA_{n-1}$ ist definiert als die Wechselsumme $\partial = \sum(-1)^i d_i$.

Wir wollen jetzt dem A noch auf eine andere, etwas kompliziertere Weise einen Kettenkomplex zuordnen. Zunächst schadet diese Änderung nicht: Die Homologiegruppen von dem neuen Kettenkomplex sind dieselben wie vorher auch (wie wir nachprüfen werden). Es ist aber natürlich nicht nur die Unschädlichkeit, die uns veranlaßt, die neue Konstruktion zu machen. Sie hat auch Vorteile:

— Zunächst kann man die Homologiegruppen von dem neuen Kettenkomplex sehr leicht übersetzen in "Homotopiegruppen" von der simplizialen abelschen Gruppe selbst.

— Sodann besteht die etwas verblüffende Tatsache, daß man aus dem neuen Kettenkomplex die *gesamte*(!) *ursprüngliche simpliziale abelsche Gruppe* rekonstruieren kann (bis auf kanonische Isomorphie).

Der neue Kettenkomplex, MA, wird als der *Moore-Kettenkomplex* bezeichnet (nach dem Mathematiker John Moore). Es handelt sich dabei, mehr oder weniger nach Definition, um einen Unterkomplex von dem obigen "üblichen" Kettenkomplex CA.

Die abelsche Gruppe MA_n, d.h. die Kettengruppe von MA in der Dimension n, ist nach Definition diejenige Untergruppe von A_n, die gegeben ist durch das Verschwinden von allen Rand-Abbildungen bis auf die letzte:

$$MA_n \ := \ \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(d_i) \ = \ \ker(d_0:\ A_n \to A_{n-1}) \cap \ \ldots \ \cap \ker(d_{n-1}:\ A_n \to A_{n-1})$$

und der Rand-Operator $\partial_n : MA_n \to MA_{n-1}$ ist i.w. gegeben durch die letzte, nicht benutzte Rand-Abbildung der simplizialen abelschen Gruppe A in der Dimension n. Allerdings müssen wir noch ein Vorzeichen einbauen, um sicherzustellen, daß die Inklusionen $MA_n \to CA_n$ mit den Rand-Operatoren verträglich sind. Die Rand-Abbildung $\partial_n:\ MA_n \to MA_{n-1}$ wird also definiert als

$$\partial_n \ := \ (-1)^n \, d_n \ .$$

Lemma. *MA ist Kettenkomplex und ist Unterkomplex von CA.*

Beweis. MA ist Kettenkomplex. Denn $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ ist (bis aufs Vorzeichen) gleich

$$d_{n-1}^{n-1} \circ d_n^n \;=\; d_{n-1}^{n-1} \circ d_{n-1}^n \;,$$

was auf MA_n den Wert 0 annimmt, da d_{n-1}^n das tut (hier ist, der Deutlichkeit halber, die Nummer der Quelle als oberer Index mit notiert).

MA ist Unterkomplex von CA. Denn auf MA_n ist $\sum(-1)^i d_i \;=\; (-1)^n d_n$. □

Bemerkung (*Homotopiegruppen einer simplizialen abelschen Gruppe*). Sei A eine simpliziale abelsche Gruppe. Man definiert die Homotopiegruppen von A (oder besser: von der unterliegenden simplizialen Menge von A) in "naiver" Weise: Repräsentanten von Elementen von

$$\pi_n(A)$$

sind die Abbildungen, nach A hinein, vom "kombinatorischen Modell des n-dimensionalen Balles", der simplizialen Menge Δ^n (Standard-n-Simplex). Dabei wird verlangt (wenn $n > 0$), daß der gesamte Rand von Δ^n in den Basispunkt abgebildet wird. Das heißt, daß für jedes i, $0 \leq i \leq n$, die i-te Rand-Seite (die Unter-simpliziale-Menge $\delta_i(\Delta^{n-1})$) nach 0 in A abgebildet wird.

Ein solches Element wird als *null-homotop* bezeichnet (das ist vielleicht ein wenig künstlich, wird aber später deutlicher werden), wenn eine Abbildung von Δ^{n+1} nach A existiert, deren Einschränkung auf die letzte Seite $\delta_{n+1}(\Delta^n)$ das vorgegebene Element ist, während die Einschränkungen auf die anderen Seiten $\delta_i(\Delta^n)$, $0 \leq i \leq n$, alle trivial sind (Abbildungen nach 0 in A).

Die Addition in $\pi_n(A)$ ist durch die Addition in A gegeben. □

Satz. *Die Gruppen $\pi_n(A)$ und $H_n(MA)$ sind dieselben.*

Beweis. Die beiden Gruppen sind sogar durch dieselben Repräsentanten und dieselbe Äquivalenzrelation gegeben. Das liegt daran, daß (für simpliziale Mengen, also auch für simpliziale abelsche Gruppen) eine 1:1 Beziehung besteht (Yoneda lemma!)

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{s.Mengen})}(\Delta^n, A) \;\longrightarrow\; A_n \;, \qquad f \;\longmapsto\; f(\iota)$$

wo $\iota \in (\Delta^n)_n$ das erzeugende Simplex bezeichnet. Aufgrund dieser Beziehung entspricht ein Repräsentant eines Elementes von $\pi_n(A)$ einem Element von A_n, das erstens die Bedingung erfüllt, daß die Ränder Nr. 0 bis Nr. $n-1$ null sind, das also in MA_n liegt; und das zweitens die Bedingung erfüllt, daß auch der Rand Nr. n null ist; womit das Element ein *Zykel* in MA_n ist. Ebenso ist eine Abbildung 'null-homotop' im obigen Sinne genau dann, wenn das zugeordnete Element in MA_n ein Rand ist. □

Wir wollen jetzt den Moore-Kettenkomplex MA vergleichen mit dem gewöhnlichen Kettenkomplex CA. Dazu definieren wir, für jede Zahl $p = 0, 1, 2, \ldots$, einen Kettenkomplex $\mathrm{F}^p A$ zwischen MA und CA. Nämlich wir verlangen nicht, daß *alle* Rand-Abbildungen (außer der letzten) null sein sollen, sondern wir verlangen das nur für die Rand-Abbildungen unterhalb der Nummer p. Also:

$$x \in A_n \quad\Longrightarrow\quad \Big[\;\; x \in \mathrm{F}^p A_n \;\Longleftrightarrow\; d_i(x) = 0 \;, \quad \text{wenn} \;\; 0 \leq i < \min(p, n) \;\;\Big]$$

Es ist, demzufolge, $\mathrm{F}^0 A = CA$. Und es ist $\mathrm{F}^p A_n = MA_n$, wenn $p \geq n$.

Satz. (1) *Jedes der* $\mathrm{F}^p A$ *ist ein Unterkomplex.*
(2) *Jede der Inklusionen* $\mathrm{F}^{p+1} A \longrightarrow \mathrm{F}^p A$ *ist eine Ketten-Homotopie-Äquivalenz.*

Beweis. (1) Sei $x \in \mathrm{F}^p A_n$. Zu zeigen ist, daß $\partial(x) \in \mathrm{F}^p A_{n-1}$; daß also $d_i(\partial(x)) = 0$, wenn $i < \min(p, n{-}1)$. Es ist

$$d_i(\,\partial(x)\,) \;=\; d_i\Big(\,\sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, d_j(x)\,\Big) \;.$$

Wir behaupten, daß in dieser Summe sogar alle Summanden null sind: Wenn $i \geq j$, dann ist $d_j(x) = 0$ aufgrund der Annahme, daß $x \in \mathrm{F}^p A_n$. Wenn andererseits $i < j$, dann ist $d_i(d_j(x)) = d_{j-1}(d_i(x))$ was, aus demselben Grund, ebenfalls null ist.

(2) Zusätzlich zu der Inklusions-Abbildung $i^p : \mathrm{F}^{p+1} A \to \mathrm{F}^p A$ betrachten wir noch eine Abbildung in der anderen Richtung, $f^p : \mathrm{F}^p A \to \mathrm{F}^{p+1} A$. Sie wird definiert durch

$$f^p(x) \;=\; \begin{cases} x \;, & \text{wenn } x \in \mathrm{F}^p A_n \text{ und } n \leq p \;; \\ x - s_p(d_p(x)) \;, & \text{wenn } x \in \mathrm{F}^p A_n \text{ und } n > p \;. \end{cases}$$

Es ist richtig, daß die Abbildung ihre Werte in $\mathrm{F}^{p+1} A$ annimmt. Denn für $i < p$ ist

$$d_i(s_p(d_p(x))) \;=\; s_{p-1}(d_i(d_p(x))) \;=\; s_{p-1}(d_{p-1}(d_i(x))) \;,$$

was (für $n > p$ und $x \in \mathrm{F}^p A_n$) null ist, ebenso wie $d_i(x)$ auch. Und für $i = p$ (und wieder $n > p$ und $x \in \mathrm{F}^p A_n$) gilt $d_p \circ s_p = \mathrm{Id}$, und deshalb

$$d_p(f^p(x)) \;=\; d_p(x) - d_p(s_p(d_p(x))) \;=\; 0 \;.$$

Es ist auch richtig, daß die Abbildung eine Ketten-Abbildung ist, d.h. $\partial \circ f^p = f^p \circ \partial$. Um das einzusehen, betrachten wir zunächst die erste Abbildung, $\partial \circ f^p$, angewandt auf x aus $\mathrm{F}^p A_n$. Der Korrekturterm darin (die Differenz zu $\partial(x)$) ist null, wenn $n \leq p$, und ist ansonsten gegeben durch

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, d_i(\,-s_p(d_p(x))\,) \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} + \sum_{i=p}^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n} \;.$$

In der ersten der Teilsummen sind sämtliche Terme null, da für $i < p$ gilt

$$d_i \circ s_p \circ d_p \;=\; s_{p-1} \circ d_i \circ d_p \;=\; s_{p-1} \circ d_{p-1} \circ d_i$$

und $d_i(x) = 0$. Die beiden Terme in der zweiten Teilsumme heben sich weg, da

$$d_p \circ s_p \;=\; \mathrm{Id} \;=\; d_{p+1} \circ s_p \;.$$

Der gesamte Korrekturterm ist also durch die dritte Teilsumme gegeben, die wegen

$$d_i \circ s_p \circ d_p \;=\; s_p \circ d_{i-1} \circ d_p \;=\; s_p \circ d_p \circ d_i \qquad (\text{ für } i > p{+}1\ )$$

nun lautet

$$\sum_{i=p+2}^{n} -(-1)^i\, s_p(d_p(\,d_i(x)\,)) \;.$$

Auch bei der Abbildung $f^p \circ \partial$ ist der Korrekturterm wieder durch null gegeben, wenn $n \leq p$ (hier sogar, wenn $n \leq p{+}1$). Ansonsten lautet er

$$\sum_{i=0}^{n} -s_p(d_p(\,(-1)^i\, d_i(x)\,)) \;=\; \sum_{i=0}^{n} -(-1)^i\, s_p(d_p(\,d_i(x)\,)) \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} + \sum_{i=p}^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n} \quad .$$

Da $x \in \mathrm{F}^p A_n$, ist $d_i(x) = 0$ für $i < p$; die Terme in der ersten Teilsumme sind also alle null. Die Terme in der zweiten Teilsumme (wenn $n > p{+}1$) heben sich weg, wegen

$$d_p \circ d_p \;=\; d_p \circ d_{p+1} \ .$$

Also bleibt nur die dritte Teilsumme, und das ist dieselbe wie die von vorher.

Der Korrekturterm in der Definition von f^p hat offenbar die Eigenschaft, daß er auf $\mathrm{F}^{p+1}A$ null ist. Das bedeutet, daß die eine Komposition eine identische Abbildung ist,

$$f^p \circ i^p \;=\; \mathrm{Id}_{\mathrm{F}^{p+1}A} \ .$$

Wir zeigen, daß die andere Komposition zu einer identischen Abbildung homotop ist. Dazu geben wir eine Kettenhomotopie zwischen $i^p \circ f^p$ und der identischen Abbildung auf $\mathrm{F}^p A$ an. Die Homotopie ist definiert (für $x \in \mathrm{F}^p A_n$) durch

$$h^p(x) \;=\; \begin{cases} 0 \ , & \text{wenn } \ x \in \mathrm{F}^p A_n \ \text{ und } \ n < p \ ; \\ (-1)^p\, s_p(x) \ , & \text{wenn } \ x \in \mathrm{F}^p A_n \ \text{ und } \ n \geq p \ . \end{cases}$$

Es ist richtig, daß die Abbildung ihre Werte in $\mathrm{F}^p A$ hat; also x nach $\mathrm{F}^p A_{n+1}$ abbildet, wenn x in $\mathrm{F}^p A_n$ liegt. Denn für $i < p$ ist

$$d_i(s_p(x)) \;=\; s_{p-1}(d_i(x)) \ ,$$

was (für $n \geq p$ und $x \in \mathrm{F}^p A_n$) null ist. Und es ist dies auch die gewünschte Homotopie, d.h. für $x \in \mathrm{F}^p A_n$ (und vorausgesetzt, daß $n > p$) ist:

$$\partial(\,h^p(x)\,) + h^p(\,\partial(x)\,) \;\overset{!}{=}\; x - i^p(f^p(x)) \;=\; x - (\,x - s_p(d_p(x))\,) \ .$$

Wir rechnen das nach: Der erste Term auf der linken Seite ergibt (wenn $n \geq p$):

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, d_i(\,(-1)^p s_p(x)\,) \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} + \sum_{i=p}^{p+1} + \sum_{i=p+2}^{n+1} \quad .$$

In der ersten der drei Teilsummen sind alle Terme null, wegen $d_i(s_p(x)) \;=\; s_{p-1}(d_i(x))$ für $i < p$. In der zweiten Teilsumme heben, wegen $d_p(s_p(x)) \;=\; d_{p+1}(s_p(x))$, die beiden Terme sich weg. Es bleibt die dritte Teilsumme, die, wegen $d_i(s_p(x)) \;=\; s_p(d_{i-1}(x))$ (für $i > p{+}1$), nun lautet

$$\sum_{i=p+2}^{n+1} (-1)^i(-1)^p\, s_p(d_{i-1}(x)) \;=\; \sum_{i=p+1}^{n} (-1)^{i+1}(-1)^p\, s_p(d_i(x)) \ .$$

Der zweite Term auf der linken Seite ergibt (wenn $n > p$):

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^p\, s_p(\,(-1)^i\, d_i(x)\,) \;=\; \sum_{i=p}^{n} (-1)^i(-1)^p\, s_p(d_i(x)) \ .$$

Die beiden Terme auf der linken Seite geben als ihre Summe also $s_p(d_p(x))$ (sofern $n > p$). Das ist aber dasselbe wie das Ergebnis auf der rechten Seite. $\square$

Korollar. *Die Inklusion $MA \longrightarrow CA$ induziert einen Isomorphismus in der Homologie.*

Beweis. Sei $n \geq 0$ eine vorgegebene Zahl, sei $p > n$. Wie oben angemerkt, stimmen die Kettenkomplexe MA und F^pA in Dimension $\leq n{+}1$ überein. Sie haben deshalb dieselbe Homologiegruppe in der Dimension n. Nach dem Satz induzieren die Inklusionen

$$CA = \mathrm{F}^0A \longleftarrow \mathrm{F}^1A \longleftarrow \ \ldots\ldots \longleftarrow \mathrm{F}^{p-1}A \longleftarrow \mathrm{F}^pA$$

Isomorphismen auf der Homologie. Also ist $H_nCA \xleftarrow{\approx} H_nMA$. □

Ein n-Simplex in A_n (d.h. ein Element der abelschen Gruppe A_n) werde, wie üblich, als *ausgeartet* bezeichnet, wenn es im Bild einer der "Ausartungs-Abbildungen" $s_i : A_{n-1} \longrightarrow A_n$ liegt. Eine Summe von zwei ausgearteten Simplizes muß nicht unbedingt auch wieder ausgeartet sein (das kann vorkommen, wenn die beiden Simplizes im Bild *verschiedener* Ausartungs-Abbildungen liegen). Trotzdem macht es natürlich Sinn, die von den ausgearteten n-Simplizes *erzeugte* Untergruppe zu betrachten. Diese Untergruppe von A_n werde mit DA_n bezeichnet.

Satz. (1) *Die Untergruppen DA_n bilden einen Unterkomplex DA von CA.*
(2) *Die von den Inklusionen $MA \to CA$ und $DA \to CA$ induzierte Abbildung*

$$MA \oplus DA \longrightarrow CA$$

ist ein Isomorphismus.

Bemerkung. Der Isomorphismus des Satzes induziert einen Isomorphismus von dem Mooreschen Kettenkomplex MA zu dem Quotienten-Komplex CA/DA, dem sogenannten *normalisierten Kettenkomplex*. □

Beweis des Satzes. (1) Sei $x \in DA_n$. Es ist zu zeigen, daß $\partial(x)$ eine Summe von ausgearteten Simplizes in A_{n-1} ist. Nach Definition von DA_n läßt x sich darstellen in der Form $x = \sum_{j=0}^{n-1} s_j(y_j)$. Es wird deshalb genügen, zu zeigen, daß (für jedes j) $\partial(\, s_j(y_j)\,)$ eine Summe von ausgearteten Simplizes ist. Es ist

$$\partial(\, s_j(y_j)\,) \;=\; \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\, d_i(\, s_j(y_j)\,) \;=\; \sum_{i=0}^{j-1} + \sum_{i=j}^{j+1} + \sum_{i=j+2}^{n}$$

Die Terme in der ersten Teilsumme sind alle ausgeartet, wegen $d_i(s_j(y)) = s_{j-1}(d_i(y))$, für $i < j$; und die Terme in der dritten Teilsumme sind es auch, wegen $d_i(s_j(y)) = s_j(d_{i-1}(y))$, für $i > j{+}1$. Die beiden Terme in der zweiten Teilsumme heben sich weg, wegen $d_j \circ s_j = d_{j+1} \circ s_j$.

(2) Wir benutzen die Abbildungen $i^p : \mathrm{F}^{p+1}A \to \mathrm{F}^pA$ und $f^p : \mathrm{F}^pA \to \mathrm{F}^{p+1}A$ aus dem Beweis des vorigen Satzes . Durch Komposition bekommen wir aus ihnen Abbildungen $i = i^0 \circ \cdots \circ i^{n-1} : MA_n \longrightarrow CA_n$ und $f = f^{n-1} \circ \cdots \circ f^0 : CA_n \longrightarrow MA_n$. Die Komposition $f \circ i$ ist die identische Abbildung auf MA, deshalb zerfällt CA als eine direkte Summe, $CA \cong MA \oplus \ker(f)$. Wir werden den Satz bewiesen haben, sobald wir

gezeigt haben, daß $\ker(f)$ und DA übereinstimmen. Dazu zeigen wir, daß $\ker(f) \subset DA$ und daß $DA \subset \ker(f)$.

Nun bedeutet $x \in \ker(f_0)$, daß $x = s_0(d_0(x))$; insbesondere also, daß x in $\mathrm{Bild}(s_0)$ enthalten ist. Ähnlich auch für $\ker(f_p)$, $p = 1, 2, \ldots, n-1$. Es folgt, daß der Kern von $f = f^{n-1} \circ \cdots \circ f^0$ enthalten ist im Erzeugnis der Bilder der s_p, d.h., enthalten in DA.

Sei umgekehrt x ein Element von DA. Per Definition heißt das, daß x sich darstellen läßt in der Form $x = \sum_{i=0}^{n-1} s_i(y_i)$. Das Bild $f_0(x)$ hat dann die Darstellung

$$x - s_0(d_0(x)) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} s_i(y_i) \;-\; s_0\big(d_0\big(\sum_{i=0}^{n-1} s_i(y_i)\big)\big) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \big(\, s_i(y_i) - s_0(d_0(s_i(y_i)))\,\big).$$

Die beiden Terme für $i = 0$ heben sich weg, wegen $d_0 \circ s_0 = \mathrm{Id}$, und die anderen Terme lassen sich, wegen $s_0 \circ d_0 \circ s_i = s_0 \circ s_{i-1} \circ d_0 = s_i \circ s_0 \circ d_0$, zusammenfassen zu

$$\sum_{i=1}^{n-1} s_i\big(\; y_i - (s_0(d_0(y_i))\;\big) \;\;;$$

das heißt, $f_0(x)$ hat eine Darstellung der Art $\sum_{i=1}^{n-1} s_i(y_i^1)$. Es folgt nun, induktiv, daß das Bild von x unter $f^{j-1} \circ \cdots \circ f_0$ eine Darstellung der Art

$$\sum_{i=j}^{n-1} s_i(y_i^j)$$

hat: der Induktionsschritt von hier auf den nächsten Fall ist gegeben durch die analoge Umformung

$$f^j\big(\sum_{i=j}^{n-1} s_j(y_i^j)\big) \;=\; \sum_{i=j}^{n-1} \big(\, s_j(y_i^j) \;-\; s_j(d_j(\,s_i(y_i^j)))\,\big) \;=\; \sum_{i=j+1}^{n-1} s_i\big(\,y_i^j - s_j(d_j(y_i^j))\big)$$

(weil wieder $d_j \circ s_j = \mathrm{Id}$, und $s_j \circ d_j \circ s_i = s_j \circ s_{i-1} \circ d_j = s_i \circ s_j \circ d_j$ für $i > j$). Insbesondere, schließlich, ist $f^{n-1}(\,s_{n-1}^{n-1}(y_{n-1}^{n-1})\,) = 0$. Wir haben gezeigt, daß DA enthalten ist in $\ker(f)$. $\square$

Für simpliziale Mengen besteht eine wichtige Tatsache, die man oft benutzen muß (und die wir oft benutzt haben); nämlich die Simplizes lassen sich auf kanonische Weise darstellen mit Hilfe der nicht-ausgearteten Simplizes und mit Hilfe der Ausartungs-Abbildungen. Im Detail: Sei X eine simpliziale Menge, sei x darin ein Simplex; die Dimension von x sei n, d.h., es ist $x \in X_n$. Es existiert dann ein *nicht-ausgeartetes* Simplex y, von einer Dimension $m \leq n$, und es existiert eine *surjektive* Struktur-Abbildung $\sigma : [n] \to [m]$ (eine sogenannte Ausartungs-Abbildung, wenn $n > m$), so daß das Simplex x gegeben ist durch $\sigma^*(y)$. Und diese Daten sind *eindeutig*: sowohl das Simplex y als auch die surjektive Abbildung $\sigma\colon [n] \to [m]$ sind durch das Simplex x eindeutig bestimmt. Z.B. wird die surjektive Abbildung σ genau dann die identische Abbildung auf $[n]$ sein, wenn das Simplex x selbst nicht-ausgeartet ist.

Eine simpliziale abelsche Gruppe kann, per Vergessen der Addition, als eine simpliziale Menge aufgefaßt werden; deshalb gilt darin das vorgenannte.

Es gilt aber auch noch eine raffiniertere Aussage, die die Addition berücksichtigt, und die demgemäß mit weniger an nicht-ausgearteten Simplizes auskommt; nämlich nur mit denjenigen, die in dem Moore-Komplex liegen (wo also alle Ränder von einem solchen Simplex null sind, ausgenommen allenfalls den letzten Rand).

In engem Zusammenhang damit stehen die folgenden beiden Aussagen:

— Eine simpliziale abelsche Gruppe kann vollständig rekonstruiert werden aus ihrem Moore-Kettenkomplex (bis auf kanonische Isomorphie).

— Zu jedem Kettenkomplex (genauer: nicht-negativen Kettenkomplex) gibt es eine simpliziale abelsche Gruppe, die den Kettenkomplex als Moore-Kettenkomplex hat.

(Ein "nicht-negativer Kettenkomplex" bedeutet einen solchen, wo die Kettengruppen vorhanden sind [oder von null verschieden sind — das ist Geschmacksache] höchstens in den Dimensionen 0, 1, 2, ... , usw., und nicht etwa in negativen Dimensionen).

Satz. (1) *Zu einem Kettenkomplex K,*

$$\cdots \xrightarrow{\partial} K_2 \xrightarrow{\partial} K_1 \xrightarrow{\partial} K_0 \ ,$$

gibt es eine simpliziale abelsche Gruppe ΓK, mit K selbst als Moore-Komplex, wo

$$\Gamma K_n \ = \bigoplus_{\sigma\colon [n] \twoheadrightarrow [m]} K_m \ .$$

Die Konstruktion ist funktoriell.

(2) *Wenn K der Moore-Komplex einer simplizialen abelschen Gruppe A ist, dann gibt es eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen $\gamma\colon \Gamma K \longrightarrow A$. Diese Abbildung ist natürlich. Sie ist ein Isomorphismus von ΓK zu A.*

Beweis. Ein Element x von ΓK_n ist, nach Definition, eine Summe von Paaren (σ, z),

$$(\sigma, z) \ , \quad \sigma\colon [n] \longrightarrow [m] \ , \quad \sigma \text{ surjektiv} \ , \quad z \in K_m \ .$$

Dabei operieren die Struktur-Abbildungen wie folgt. Sei $\alpha\colon [n'] \to [n]$ eine Abbildung in der Kategorie Δ (also eine schwach monotone Abbildung von $[n']$ zu $[n]$). Dann ist $\alpha^*(\sigma, z)$ gegeben durch das Paar (σ', z'), das man wie folgt bekommt. Man schreibt die zusammengesetzte Abbildung $[n'] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{\sigma} [m]$ in ihre kanonische Form um: eine Surjektion gefolgt von einer Injektion, $[n'] \xrightarrow{\sigma'} [m'] \xrightarrow{\beta} [m]$. Man hat nun drei Fälle:

$$\alpha^*(\sigma, z) \ = \ \begin{cases} (\,\sigma'\,,\,z\,) \ , & \text{wenn } \beta = \mathrm{Id}_{[m]} \ ; \\ (\,\sigma'\,,\,\partial(z)\,) \ , & \text{wenn } \beta = \delta_n\colon [n{-}1] \to [n] \ ; \\ (\,-\,,\,0\,) \ , & \text{wenn } \beta = \text{sonst} \ ; \end{cases}$$

wobei im dritten Fall die Buchführung über σ' weder notwendig ist, noch erwünscht. Es ist klar (oder?), daß man auf die Weise eine simpliziale abelsche Gruppe bekommt (daß nämlich, wenn α ein Kompositum $\alpha_2 \circ \alpha_1$ ist, man ebensogut α auf die genannte Weise operieren lassen kann, wie auch erst α_1 und dann α_2).

Es ist auch klar (oder?), daß der Moore-Kettenkomplex dieser simplizialen abelschen Gruppe nicht größer ist als K selbst (wegen dem Satz: $C\Gamma K \approx M\Gamma K \oplus D\Gamma K$ — die hinzukommenden Dinge sind, nach Definition, ja Summen von Ausartungen).

Wenn K der Moore-Komplex einer simplizialen abelschen Gruppe A ist, und x wie oben, $x = \sum(\sigma, z)$, dann definiert jedes der σ eine Abbildung $\sigma^*\colon A_m \to A_n$, und das zu σ gehörige z ist Element von A_m. Die Abbildung $\gamma\colon \Gamma K \to A$ ist definiert durch

$$\gamma(x) \ := \ \textstyle\sum_\sigma \sigma^*(z) \ .$$

Es ist klar (oder?), daß dies eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen ist (nämlich, wenn $\alpha : [n'] \to [n]$ eine Abbildung ist, und (σ, z) ein Summand, dann besteht, in der obigen Notation, die Beziehung $\alpha^*(\gamma(\sigma, z)) = \alpha^*(\sigma^*(z)) = (\sigma \circ \alpha)^*(z) = (\beta \circ \sigma')^*(z) = \sigma'^*(\beta^*(z)) = \gamma(\sigma', \beta^*(z)) = \gamma(\alpha^*(\sigma, z))$).

Eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie erstens injektiv und zweitens surjektiv ist. Also wird es genügen, diese beiden Dinge für die Abbildung γ nachzuprüfen. Bei der Nachprüfung können wir, induktiv, annehmen, daß diese Dinge in kleineren Dimensionen bereits etabliert sind.

Sei x ein Element im Kern von γ. Da γ eine Abbildung von simplizialen abelschen Gruppen ist (d.h., mit den Struktur-Abbildungen verträglich), folgt aus $\gamma(x) = 0$ auch $\gamma(\, d_i(x)\,) = 0$. Wegen der induktiv vorausgesetzten Injektivität ist deshalb, für alle i, $d_i(x) = 0$; das heißt, x liegt im Moore-Komplex. Es ist aber klar (oder?), daß, im Falle $K = MA$, der Moore-Komplex von ΓK derselbe ist wie der von A auch; und daß die Abbildung γ darauf die identische Abbildung ist. Also ist $x = 0$.

Für die Diskussion der Surjektivität sei x' ein Element in A. Nach einem früher geklärten Sachverhalt (dem Satz, daß $A \approx MA \oplus DA$) ist x' eine Summe $x'_1 + x'_2$, wo x'_1 im Moore-Komplex liegt (also, wie gerade besprochen, auch im Bild von γ), und wo x'_2 in DA liegt, also darstellbar ist als eine Summe ausgearteter Elemente, $x'_2 = \sum s_i(y_i)$. Nach der Induktionsvoraussetzung nun liegen die y_i alle im Bild von γ. Da γ mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist, liegen folglich auch die $s_i(y_i)$ im Bild; und damit auch deren Summe. $\square$

Bemerkung. Zu dem beschriebenen Sachverhalt zweier Kategorien (hier: simpliziale abelsche Gruppen einerseits und [nicht-negative] Kettenkomplexe andererseits) mit einem Paar von Funktoren, die zueinander invers sind, bis auf natürliche Isomorphie, sagt man auch, daß es sich hier um eine *Äquivalenz von Kategorien handelt*. Diese Art von “Äquivalenz” bedeutet “Gleichheit für alle praktischen Zwecke”. Das vorliegende Beispiel zeigt, daß es sich dabei um einen sehr nicht-trivialen Sachverhalt handeln kann.

Bemerkung. Bei früherer Gelegenheit haben wir diskutiert, daß der zusammengesetzte Funktor (simpl. Mengen) $\longrightarrow$ (simpl. abelsche Gruppen) $\longrightarrow$ (Kettenkomplexe) simpliziale Homotopien in Kettenhomotopien überführt. Wir hätten hier die Gelegenheit, auch für simpliziale abelsche Gruppen den Begriff der simplizialen Homotopie einzuführen; und zu zeigen, daß der Funktor $A \to MA$ simpliziale Homotopien in Kettenhomotopien überführt, und umgekehrt der Funktor $K \to \Gamma K$ Kettenhomotopien in simpliziale Homotopien. Das lassen wir jetzt aber weg.

Die Erweiterungs-Bedingung

Bezeichne $E \to B$ eine Abbildung von topologischen Räumen, und D^m den m-dimensionalen Ball. Die HLE (Homotopie-Liftungs-Eigenschaft) für die Abbildung $E \to B$ ist eine Bedingung an kommutative Diagramme der Art:

$$\begin{array}{ccc} D^{n-1} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{n-1} \times D^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

Die linke vertikale Abbildung ist dabei gegeben durch die Inklusion der 0-ten Ecke im Intervall, $j_0 : D^0 \to D^1$,

$$D^{n-1} \approx D^{n-1} \times D^0 \xrightarrow{\mathrm{Id} \times j_0} D^{n-1} \times D^1 \ .$$

Das Diagramm beschreibt erstens eine Abbildung $D^{n-1} \to E$ und zweitens eine Homotopie der zusammengesetzten Abbildung $D^{n-1} \to E \to B$.

Die HLE fordert, daß zu einem solchen Diagramm immer eine *Liftung* existiert: eine Abbildung von links unten nach rechts oben,

$$D^{n-1} \times D^1 \ \longrightarrow \ E \ ,$$

mit der Eigenschaft, daß das resultierende Diagramm immer noch kommutativ ist.

Eine andere (äquivalente) Form der HLE macht den Test ein wenig raffinierter dadurch, daß in dem Test-Diagramm noch zusätzliche Daten spezifiziert werden: nämlich eine vorgegebene Liftung der Homotopie auf dem Rand ∂D^{n-1} von D^{n-1}. Das Diagramm ist also nun

$$\begin{array}{ccc} D^{n-1} \cup \partial D^{n-1} \times D^1 & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{n-1} \times D^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

und gefragt ist wieder nach einer Abbildung von links unten nach rechts oben, die das resultierende Diagramm kommutativ macht.

Für simpliziale Mengen kann man diese Art von Bedingung in ganz ähnlicher Form formulieren (und gegebenenfalls verlangen):

Es bezeichne dazu, wie üblich, Δ^m die simpliziale Menge *Standard-m-Simplex*; sie ist beschreibbar als der darstellbare Funktor,

$$\Delta^{\rm op} \xrightarrow{\ \Delta^m\ } (\text{Mengen}) \ , \qquad [k] \longmapsto (\Delta^m)_k \ = \ \mathrm{Hom}_\Delta(\ [k]\,,\,[m]\ ) \ .$$

Für jedes i zwischen 0 und m hat man die Inklusion $\delta_{i*} : \Delta^{m-1} \to \Delta^m$, die durch die Abbildung $\delta_i : \ [m{-}1] \to [m]$ gegeben ist. Ihr Bild heißt die *i-te Seite* von Δ^m. Die Vereinigung sämtlicher Seiten heißt der *Rand* von Δ^m, wir schreiben dafür $\partial\Delta^m$.

Wenn $E \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen ist, so können wir, in Analogie zu dem obigen, nun kommutative Diagramme von Abbildungen von simplizialen Mengen betrachten:

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^{n-1}\times\Delta^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

Dabei ist die linke vertikale Abbildung gegeben durch die Inklusion der 0-ten Ecke im 1-Simplex, $j_0 : \Delta^0 \to \Delta^1$,

$$\Delta^{n-1} \approx \Delta^{n-1}\times\Delta^0 \xrightarrow{\ \mathrm{Id}\times j_0\ } \Delta^{n-1}\times\Delta^1 \ ,$$

und gefragt ist wieder nach einer *Liftung*; einer Abbildung von links unten nach rechts oben, die das resultierende Diagramm kommutativ macht.

Die Interpretation dieser Dinge ist dieselbe wie vorher auch: Das Diagramm $(*)$ spezifiziert sowohl eine Abbildung $\Delta^{n-1} \to E$ als auch eine Homotopie der zusammengesetzten Abbildung $\Delta^{n-1} \to E \to B$; gesucht ist eine Liftung der Homotopie. — Unter der geometrischen Realisierung geht, wie wir wissen, Δ^{n-1} über in D^{n-1}, und $\Delta^{n-1}\times\Delta^1$ in $D^{n-1}\times D^1$. Folglich geht, unter der geometrischen Realisierung, das Diagramm $(*)$ über in das vorher betrachtete Diagramm von topologischen Räumen.

Auch in dem gegenwärtigen simplizialen Kontext ist es möglich, eine Liftung der Homotopie über dem Rand vorzugeben. Dazu betrachtet man Diagramme der Art:

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} \Delta^{n-1}\cup\partial\Delta^{n-1}\times\Delta^1 & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^{n-1}\times\Delta^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

Es ist aber hier nicht mehr klar, ob die Diagramme des Typs $(*)$ auf der einen Seite und die des Typs $(**)$ auf der anderen Seite *dieselbe* Bedingung definieren. Der Beweis der entsprechenden Tatsache aus dem topologischen Kontext überträgt sich jedenfalls nicht. Nämlich die Tatsache, daß es eine topologische Äquivalenz von $D^{n-1}\times D^1$ auf sich gibt, die D^{n-1} auf $D^{n-1}\cup\partial D^{n-1}\times D^1$ abbildet, hat kein simpliziales Analogon:

Bemerkung. Es gibt *keinen* Isomorphismus von $\Delta^{n-1}\times\Delta^1$ auf sich, der Δ^{n-1} abbildet auf $\Delta^{n-1}\cup\partial\Delta^{n-1}\times\Delta^1$. Denn diese beiden Unter-simplizialen-Mengen von

$\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ sind z.B. nicht einmal zueinander isomorph (die eine hat ein einziges nicht-ausgeartetes $(n-1)$-Simplex, die andere hat davon ganz viele).

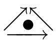
Wegen solcher Dinge ist es angebracht, eine zusätzliche, neue Formulierung einer Liftungs-Bedingung einzuführen. Wie wir sehen werden, ist diese Bedingung stark genug, um alle anderen gewünschten Formulierungen zu implizieren; insbesondere auch diejenigen, die durch die obigen Diagramme $(*)$ und $(**)$ gegeben sind.

Die neue Bedingung kommt daher, daß man sich anschaut, wie das Prisma $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ aus seinen Einzelteilen aufgebaut ist:

In einer gleich zu klärenden Sprache ist es so, daß man $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ bekommen kann, ausgehend von $\Delta^{n-1} \cup \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^1$, durch sukzessive "Trichter-Füllungen". Dabei bedeutet eine *Trichter-Füllung*, daß ein einzelnes Simplex in einer ganz speziellen Weise an den vorher schon vorhandenen Teil angeheftet wird (das ist, wenn man so will, die kombinatorische Version von einer "elementaren Erweiterung"). Eine ähnliche Sprache wird auch für Abbildungen verwendet werden; die (noch zu formulierende) neue Liftungs-Bedingung wird dann eine Bedingung sein, die das Liften von Trichter-Füllungen betrifft.

Definition. Sei $0 \leq i \leq n$. Der *i-te Trichter* (englisch: "*i-th horn*") ist diejenige Unter-simpliziale-Menge Λ_i^n von Δ^n, die gegeben ist durch die Vereinigung von allen Seiten von Δ^n, bis auf die i-te.

(Es bedeutet dasselbe, zu sagen, daß Λ_i^n die Vereinigung derjenigen Seiten von Δ^n ist, die die i-te Ecke von Δ^n enthalten.)

Beispiel. Im 2-Simplex Δ^2 :  gibt es die drei Trichter Λ_0^2, Λ_1^2, Λ_2^2 , wie folgt:

Λ_0^2 :  , Λ_1^2 :  , Λ_2^2 : 

(diese sind *nicht* zueinander isomorph).

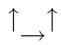
Definition. Eine simpliziale Menge, X', entsteht aus einer anderen, X, durch eine *Trichter-Füllung*, wenn $X' \approx X \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$ (für geeignetes n und geeignetes i).

Die geometrische Realisierung ist, wie wir wissen, mit Verklebe-Konstruktionen verträglich. Man hat also in dieser Situation einen Isomorphismus:

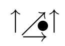
$$|X'| \ \approx \ |X| \cup_{|\Lambda_i^n|} |\Delta^n|$$

Das heißt, $|X'|$ entsteht aus $|X|$ durch das Anheften von zwei neuen Zellen: einer $(n-1)$-Zelle und einer n-Zelle. Dabei kommt die $(n-1)$-Zelle her von der in Λ_i^n nicht vorhandenen i-ten Seite von Δ^n, und die n-Zelle kommt von Δ^n selbst. Insbesondere ist es auch richtig, daß $|X'|$ zu $|X|$ homotopie-äquivalent ist (in sehr spezieller Weise).

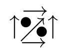
Beispiel. $\Delta^1 \times \Delta^1$ entsteht aus

$$\Delta^1 \times 0 \;\cup\; \partial\Delta^1 \times \Delta^1 \quad : $$ 

durch das Füllen von zwei Trichtern. Zuerst wird ein Trichter Λ^2_1 gefüllt:

$$(\,\Delta^1 \cup \partial\Delta^1 \times \Delta^1\,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2 \quad : $$ 

danach wird ein Trichter Λ^2_0 gefüllt:

$$(\,(\,\Delta^1 \cup \partial\Delta^1 \times \Delta^1\,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2\,) \cup_{\Lambda^2_0} \Delta^2 \quad : $$ 

$\square$

Die allgemeine Form dieses Beispiels lautet:

Satz. *$\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ entsteht aus $\Delta^{n-1} \times 0 \cup \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ durch Füllen von n Trichtern:*

$$\Lambda^n_{n-1}\ ,\quad \Lambda^n_{n-2}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\quad \Lambda^n_1\ ,\quad \Lambda^n_0\ .$$

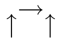
Beweis. Das kommt von der (bei früherer Gelegenheit schon betrachteten) Zerlegung von dem Prisma $\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ in n-Simplizes, n an der Zahl. Das *letzte* von diesen n-Simplizes hat als seine "freie Seite" den Deckel des Prismas. Im Simplex ist das die Seite, die nicht die 0-te Ecke enthält, also die 0-te Seite; das Hinzufügen des letzten unter den n-Simplizes entspricht einer Trichter-Füllung vom Typ Λ^n_0.

Das letzte und das vorletzte unter den n-Simplizes haben als gemeinsame Seite diejenige, die nicht die 1-te Ecke (in beiden von ihnen) enthält. Wenn man sich also vorstellt, daß das letzte Simplex nicht da ist, so hat das vorletzte Simplex als seine freie Seite diejenige mit der Nummer 1. Hinzufügen des vorletzten n-Simplexes entspricht einer Trichter-Füllung vom Typ Λ^n_1.

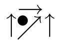
Und so weiter. $\square$

Wegen der Unsymmetrie des simplizialen "Intervalls" Δ^1 gibt es von dem Beispiel eine (davon verschiedene!) Variante. Nämlich statt ein Prisma von unten nach oben mit Hilfe von Trichtern zu füllen, kann man dies auch in umgekehrter Richtung veranstalten: von oben nach unten. Die erwähnte Unsymmetrie wird unter anderem dadurch deutlich, daß im obigen Fall der Trichter Λ^n_n nicht Verwendung findet; dagegen in der nun folgenden Variante der Trichter Λ^n_0 nicht.

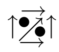
Beispiel. $\Delta^1 \times \Delta^1$ entsteht aus

$$\Delta^1 \times 1 \ \cup\ \partial\Delta^1 \times \Delta^1 \quad :$$ 

durch das Füllen von zwei Trichtern. Zuerst wird ein Trichter Λ^2_1 gefüllt:

$$(\, \Delta^1 \cup \partial\Delta^1 {\times} \Delta^1 \,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2 \quad :$$ 

danach wird ein Trichter Λ^2_2 gefüllt:

$$(\, (\, \Delta^1 \cup \partial\Delta^1 {\times} \Delta^1 \,) \cup_{\Lambda^2_1} \Delta^2 \,) \cup_{\Lambda^2_2} \Delta^2 \quad :$$ 

□

Die allgemeine Form dieses Beispiels lautet:

Satz. $\Delta^{n-1}{\times}\Delta^1$ *entsteht aus* $\Delta^{n-1}{\times}1 \cup \partial\Delta^{n-1}{\times}\Delta^1$ *durch Füllen von* n *Trichtern*:

$$\Lambda^n_1 \ , \quad \Lambda^n_2 \ , \ \ldots\ldots \ , \quad \Lambda^n_{n-1} \ , \quad \Lambda^n_n \ .$$

□

Wir kommen nun zur Formulierung der Erweiterungs-Bedingung. Diese wird gelegentlich auch als “Ausfüllungs-Bedingung” bezeichnet; oder, nach dem Mathematiker Daniel Kan, der sie eingeführt hat, als “Kan-Erweiterungs-Bedingung” oder kurz “Kan-Bedingung”.

Eine Abbildung, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, wird auch als “Faserung im Sinne von Kan” bezeichnet oder kurz “Kan-Faserung”.

Definition. Sei $E \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Die *Erweiterungs-Bedingung* sagt: Für jedes n, jedes i (wo $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$) und jedes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ \Delta^n \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

existiert eine Abbildung $\Delta^n \to E$, die das Diagramm kommutativ macht.

Es gibt den Spezialfall der Erweiterungs-Bedingung, wo B ein "Punkt" ist, $B = \Delta^0$ (oder, was auf dasselbe hinausläuft, "wo B eigentlich gar nicht da ist"). In dem Fall reduziert die Bedingung sich zu einer solchen, die nur die simpliziale Menge E betrifft. Diese Bedingung ist ganz und gar nicht-trivial. Ihrer Wichtigkeit wegen soll sie noch einmal gesondert formuliert werden. — Eine simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, wird manchmal auch als "Kan-Komplex" bezeichnet.

Definition. Sei E eine simpliziale Menge. Die *Erweiterungs-Bedingung* für E sagt: Für jedes n, jedes i (wo $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$) und jede Abbildung

$$\Lambda_i^n \longrightarrow E \ ,$$

existiert eine Erweiterung davon zu einer Abbildung $\Delta^n \to E$.

Die Abbildung $\Lambda_i^n \longrightarrow E$ in dieser Definition wird als ein *Trichter in* E bezeichnet; und die Abbildung $\Delta^n \to E$ als eine *Füllung* dieses Trichters.

(Die Abbildung $\Delta^n \to E$ in der vorigen Definition wird dementsprechend auch als eine *Füllung über der vorgegebenen Füllung in* B bezeichnet.)

Der nun folgende Satz sagt insbesondere, daß die Kan-Erweiterungs-Bedingung die oben betrachteten Liftungs-Bedingungen $(*)$ und $(**)$ impliziert: diese beiden Liftungs-Bedingungen sind die Spezialfälle des Satzes, wo $L = \Delta^{n-1}$, und wo entweder $K = \emptyset$ ist oder $K = \partial\Delta^{n-1}$.

Satz (Homotopie-Liftungs-Eigenschaft). *Sei* $E \to B$ *eine Abbildung. Es gelte die Kan-Bedingung für diese Abbildung. Sei* L *eine simpliziale Menge und* $K \subset L$ *eine Unter-simpliziale-Menge. Bezeichne* $L \times 0 \ \cup \ K \times \Delta^1$ *die Unter-simpliziale-Menge in* $L \times \Delta^1$, *die von* $L \times 0$ *und* $K \times \Delta^1$ *erzeugt ist. Es existiert für jedes kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} L\times 0 \ \cup \ K\times\Delta^1 & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ L \times \Delta^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

eine Liftung (d.h. eine Abbildung $L \times \Delta^1 \to E$, die das Diagramm kommutativ macht).

Bemerkungen. (1) Es gibt eine (nicht-identische!) Variante von dem Satz, wo $L \times 0$ ersetzt ist durch $L \times 1$.

(2) Auch im Fall $B = \Delta^0$ macht der Satz eine durchaus nicht-triviale Aussage: Die *Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft* gilt für eine injektive Abbildung von simplizialen Mengen, *insofern als nur Abbildungen in Kan-Komplexe betrachtet werden.*

Beweis des Satzes. Wir klären zunächst den Spezialfall, wo L das $(n-1)$-Simplex Δ^{n-1} ist, und K dessen Rand $\partial\Delta^{n-1}$. Wie oben festgehalten wurde, so entsteht

$\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ aus $\Delta^{n-1} \times 0 \, \cup \, \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^1$ durch das Füllen von Trichtern, n an der Zahl. Die gewünschte Abbildung $\Delta^{n-1} \times \Delta^1 \longrightarrow E$ entsteht, folglich, durch die n-malige Anwendung der Hypothese des gegenwärtigen Satzes; nämlich der Hypothese, daß Trichter-Füllungen bei der Abbildung $E \to B$ möglich sind.

Für den allgemeinen Fall wollen wir diesen Spezialfall als Hilfsmittel verwenden. Dazu benutzen wir die Skelett-Filtrierung von L, relativ zu K,

$$K = L^{-1} \subset L^0 \subset \ldots \subset L^m \subset \ldots .$$

Das m-Skelett L^m ist dabei definiert als die kleinste Unter-simpliziale-Menge in L, die sowohl K enthält als auch sämtliche Simplizes der Dimension m (oder, was auf dasselbe hinausläuft: sämtliche Simplizes der Dimensionen $\leq m$). Es besteht, wie wir wissen, die Beziehung, daß

$$L^m \;=\; L^{m-1} \cup_{J_m \times \partial\Delta^m} J_m \times \Delta^m \;,$$

wo die Indexmenge J_m die Menge der *nicht-ausgearteten* m-Simplizes von L ist (wobei wir allerdings von diesen noch diejenigen ausnehmen müssen, die in K liegen).

Die gewünschte Abbildung $L \times \Delta^1 \to E$ zu konstruieren, ist nun gleichbedeutend mit der Konstruktion eines kompatiblen Systems von Abbildungen $L^m \times \Delta^1 \to E$ (wo “kompatibel” bedeuten soll, daß die m-te Abbildung der Serie als ihre Restriktion auf $L^{m-1} \times \Delta^1$ die $(m{-}1)$-te Abbildung hat).

Dies System wird induktiv konstruiert. Für den Schritt von $m{-}1$ auf m werden wir benutzen, daß, nach dem Spezialfall, eine Abbildung von $\Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1$ auf $\Delta^m \times \Delta^1$ erweitert werden kann. Wir betrachten dazu, für jedes Element j aus der Indexmenge J_m, das zugehörige Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & L^m \cup L^{m-1} \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\Delta^m \times \Delta^1 \arrow[r, "\chi_j \times \mathrm{Id}"] & L^m \times \Delta^1 \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

wo $\chi_j \colon \Delta^m \to L^m$ die charakteristische Abbildung von j ist, und $\partial\Delta^m \to L^{m-1}$ ihre Einschränkung (die Anhefte-Abbildung). Nach dem Spezialfall bekommen wir ein durch J_m indiziertes System von Abbildungen, kompatibel mit den vorhandenen Abbildungen; oder, was dasselbe bedeutet, eine Abbildung

$$J_m \times \Delta^m \times \Delta^1 \;\longrightarrow\; E \;,$$

die die Abbildung $J_m \times (\, \Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1 \,) \longrightarrow E$ erweitert. Zusammenkleben ergibt nun die gewünschte Abbildung auf

$$L^m \cup L^{m-1} \times \Delta^1 \;\cup_{J_m \times (\Delta^m \cup \partial\Delta^m \times \Delta^1)}\; J_m \times \Delta^m \times \Delta^1 \;=\; L^m \times \Delta^1 \;.$$

$\square$

Die Homotopie-Relation

Seien X, Y simpliziale Mengen und f_0, f_1 Abbildungen von X zu Y. Wie früher auch, so bedeutet eine *Homotopie von f_0 zu f_1* eine Abbildung

$$F : X \times \Delta^1 \longrightarrow Y ,$$

deren Einschränkung über die beiden Inklusionen $j_0 : \Delta^0 \to \Delta^1$ und $j_1 : \Delta^0 \to \Delta^1$,

$$X \approx X \times \Delta^0 \xrightarrow{\mathrm{Id} \times j_i} X \times \Delta^1 ,$$

die Abbildungen f_0 und f_1 ergibt.

Die Relation "Es gibt eine Homotopie von f_0 zu f_1" ist keine Äquivalenzrelation. Dies haben wir früher zur Kenntnis genommen an Beispielen wie den beiden folgenden (fehlende Symmetrie bzw. fehlende Transitivität):

— die beiden Inklusionen $\Delta^0 \to \Delta^1$ sind in der einen Richtung homotop, in der andern aber nicht. Denn eine Homotopie zwischen ihnen ist eine Abbildung $\Delta^1 \to \Delta^1$, und von solchen Abbildungen gibt es genau drei (die Identität und zwei konstante Abbildungen), entsprechend (Yoneda-Lemma) den drei Elementen von $(\Delta^1)_1$.

— die beiden Inklusionen der "äußeren" Punkte Δ^0 in $\Delta^1 \cup_{\Delta^0} \Delta^1$ sind beide homotop zum "mittleren" Punkt (genauer: homotop entweder in der einen oder in der andern Richtung), sie sind aber nicht zueinander homotop. Eine Homotopie zwischen ihnen entspräche einer Abbildung $\Delta^1 \to \Delta^1 \cup_{\Delta^0} \Delta^1$. Von solchen Abbildungen gibt es fünf: die beiden Inklusionen $\Delta^1 \to \Delta^1 \cup_{\Delta^0} \Delta^1$ und drei konstante Abbildungen.

Die Situation ist anders, wenn die Erweiterungs-Bedingung erfüllt ist:

Satz. *Y sei Kan-Komplex. X sei simpliziale Menge. Die Relation "es existiert eine Homotopie" ist eine Äquivalenzrelation für Abbildungen $X \to Y$.*
— Ähnlich auch die Relation "*es existiert eine Homotopie relativ zu $A \subset X$*".

Ähnlich auch für Abbildungen über B:

Satz. *$p : E \to B$ sei eine Kan-Faserung. X sei simpliziale Menge. Die Relation "es existiert eine Homotopie über B" ist eine Äquivalenzrelation für Abbildungen $X \to E$* (eine Homotopie ist "über B", wenn die nach B projizierte Homotopie konstant ist).
— Ähnlich auch die Relation "*es existiert eine Homotopie über B, relativ zu $A \subset X$*".

Beweis dieser Sätze. Es ist zu zeigen, daß die Relation "es existiert eine Homotopie von f_0 zu f_1" *reflexiv* ist (was klar ist: Existenz *konstanter* Homotopien), sowie auch *symmetrisch* und *transitiv*. Es bleibt somit zu zeigen:

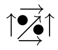
— wenn f_0 zu f_1 homotop ist, dann ist auch f_1 zu f_0 homotop; und:

— wenn f_0 zu f_1 homotop ist, und f_1 zu f_2, dann ist auch f_0 zu f_2 homotop.

Im folgenden Argument stellen wir uns zunächst vor, daß A und B eigentlich gar nicht da sind (der erste Teil des ersten Satzes).

Beide Behauptungen werden wir mit einem Um-Schreibe-Trick aus dem gerade vorher behandelten Liftungs-Satz herleiten. Die vorgegebene simpliziale Menge L wird dabei durch $X \times \Delta^1$ gegeben sein. Die zu konstruierende Homotopie ist demgemäß dann eine Abbildung auf $(X \times \Delta^1) \times \Delta^1$. — Um uns ein Bild zu machen, stellen wir uns X als einen Punkt vor, und demgemäß dann $X \times \Delta^1 \times \Delta^1$ als ein Quadrat: $\uparrow\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}}\uparrow$

Für den Beweis der Transitivität stellen wir uns vor, daß von diesem Quadrat die linke Kante (die Homotopie von f_0 zu f_1) und die obere Kante (die Homotopie von f_1 zu f_2) schon gegeben sind, $\uparrow\overset{\rightarrow}{}$. Die linke Kante repräsentiert also die Abbildung (von der die Homotopie zu liften ist) mit Definitionsbereich $(X \times \Delta^1) \times 0$). Und die obere Kante repräsentiert die schon geliftete Homotopie auf dem Teil $(X \times 1)$, also eine Abbildung mit Definitionsbereich $(X \times 1) \times \Delta^1$. Die Liftung, die der Satz liefert, ist eine Abbildung auf dem ganzen Quadrat:



Die Einschränkung auf " $\nearrow$ ", die Diagonale $X \times \Delta^1 \subset X \times \Delta^1 \times \Delta^1$, ist Homotopie von f_0 zu f_2.

Für den Beweis der Symmetrie stellen wir uns vor, daß von dem Quadrat schon drei Kanten vorliegen, $\uparrow\overset{\rightarrow}{\underset{\rightarrow}{}}$. Dabei soll die untere Kante die Homotopie von f_0 zu f_1 repräsentieren. Andererseits soll sowohl die linke Kante als auch die obere Kante jeweils eine konstante Homotopie repräsentieren; nämlich diejenige konstante Homotopie, die durch die Abbildung f_0 gegeben ist. Das gefüllte Quadrat hat dann als seine rechte Kante eine Homotopie von f_1 zu f_0.

Im allgemeinen Fall benötigt man noch die folgende Modifikationen. Wenn ein B da ist, dann sind alle Liftungen als "über B" zu nehmen. Und wenn ein A da ist, dann baut man die durch A spezifizierte Konstanz der Homotopie auch mit ein: die durch Liftung zu erhaltende "Homotopie", d.h. Abbildung auf $X \times \Delta^1 \times \Delta^1$, ist auf dem Teil $A \times \Delta^1 \times \Delta^1$ schon vorgegeben als die Projektion auf den Faktor A, gefolgt von der auf A vorhandenen Abbildung. $\square$

Beispiele und Nicht-Beispiele

Die Erweiterungs-Bedingung ist eine drastische Forderung. Es ist eine sehr spezielle Eigenschaft, wenn sie für eine simpliziale Menge erfüllt ist (bzw. auch, in ihrer relativen Form, für eine Abbildung von simplizialen Mengen). So werden wir weiter unten die Tatsache zur Kenntnis nehmen, daß eine simpliziale Menge, die die Kan-Bedingung erfüllt und die nicht "diskret" ist (d.h., es gibt mindestens ein nicht-ausgeartetes Simplex in Dimension > 0) notwendigerweise "unendlich-dimensional" sein muß (d.h., es gibt nicht-ausgeartete Simplizes in beliebig hohen Dimensionen). Insbesondere kann eine solche simpliziale Menge nicht *endlich* sein ("endlich" heißt, es gibt darin nur endlich viele nicht-ausgeartete Simplizes — das Standard-Simplex Δ^n z.B. ist endlich).

Einige Konstruktionen simplizialer Mengen führen automatisch auf solche, die die Kan-Bedingung erfüllen (wie wir weiter unten nachprüfen werden); so:
— der singuläre Komplex eines topologischen Raumes,
— die unterliegende simpliziale Menge einer simplizialen Gruppe.
Ebenso, als Variante von letzterem, hat man noch, daß ein 'Prinzipalbündel' Anlaß gibt zu einer Kan-Faserung.

Vor allen Dingen auch interessant ist die Tatsache, daß es zu jeder simplizialen Menge eine dazu (schwach-) homotopie-äquivalente gibt, für die die Kan-Bedingung erfüllt ist. Wie wir später diskutieren werden, besteht die wichtige Tatsache, daß der singuläre Komplex der geometrischen Realisierung diese Eigenschaft hat. Es gibt aber auch eine einfachere, direkte Konstruktion, die wir jetzt anschauen wollen. Grob gesprochen ist es so, daß man einfach alle die Simplizes dazutut, "die man braucht"; und anschließend prüft man dann nach, daß das Verfahren funktioniert:

Konstruktion (*Trichter-Füllen*). (a) Sei Y eine simpliziale Menge. Man betrachtet die Menge T, deren Elemente die Trichter in Y sind. Ein Element von T ist also ein Tripel

$$(n, i, f) \ ; \qquad \text{wo} \qquad n \geq 1 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \qquad f : \ \Lambda_i^n \longrightarrow Y \ .$$

Einen solchen Trichter zu *füllen*, bedeutet, daß man, unter Benutzung des Klebe-Diagramms $Y \xleftarrow{f} \Lambda_i^n \to \Delta^n$, eine Verklebe-Konstruktion macht; also übergeht zu:

$$Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n \ .$$

Nun kann man aber auch *alle diese Trichter gleichzeitig füllen*: dazu benutzt man das Klebe-Diagramm, das durch das Zusammenpacken all der Daten entsteht:

$$Y \xleftarrow{\coprod_{t\in T} f(t)} \coprod_{t\in T} \Lambda^{n(t)}_{i(t)} \xrightarrow{\text{Inkl}} \coprod_{t\in T} \Delta^{n(t)}$$

Es bezeichne $\Phi(Y)$ die durch das Zusammenkleben entstehende simpliziale Menge:

$$\Phi(Y) \ = \ Y \cup_{\coprod_{t\in T} \Lambda^{n(t)}_{i(t)}} \coprod\nolimits_{t\in T} \Delta^{n(t)}$$

(b) Sei X eine simpliziale Menge. Man definiert eine aufsteigende Folge von simplizialen Mengen durch *iteriertes Trichter-Füllen*:

$$\Phi^0(X) = X \ , \ \Phi^1(X) = \Phi(\Phi^0(X)) \ , \ \dots \ , \ \Phi^n(X) = \Phi(\Phi^{n-1}(X)) \ , \ \dots$$

und nimmt die Vereinigung von all diesen, $\Psi(X) = \bigcup_n \Phi^n(X)$.

Satz. (1) $\Psi(X)$ *erfüllt die Erweiterungs-Bedingung.* (2) *Die Inklusion* $X \to \Psi(X)$ *induziert eine Homotopie-Äquivalenz der geometrischen Realisierungen,* $|X| \to |\Psi(X)|$.

Beweis. (1) Sei $g : \Lambda^m_j \to \Psi(X)$ ein Trichter. Es ist zu zeigen, daß man diesen füllen kann. Nun ist jedes Simplex von $\Psi(X)$ in einer der Unter-simplizialen-Mengen $\Phi^k(X)$ enthalten, da ja $\Psi(X)$ die aufsteigende Vereinigung von diesen ist. Dieselbe Aussage gilt auch für eine Kollektion von Simplizes, *vorausgesetzt*, diese Kollektion ist endlich. Insbesondere gilt die Aussage deshalb für die Bilder, unter g, von den (endlich vielen!) nicht-ausgearteten Simplizes in Λ^m_j. Es gibt also ein n, so daß $\Phi^n(X)$ die Bilder sämtlicher nicht-ausgearteter Simplizes von Λ^m_j enthält; und damit auch schon das ganze Bild $g(\Lambda^m_j)$, da ja Λ^m_j (wie jede andere simpliziale Menge auch) von seinen nicht-ausgearteten Simplizes erzeugt ist. — Das Resultat der Betrachtung ist, daß der vorgegebene Trichter aufgefaßt werden kann als ein Trichter in $\Phi^n(X)$ (für geeignetes n). Der Trichter kann deshalb gefüllt werden in der nächst-größeren simplizialen Menge in der Folge, $\Phi^{n+1}(X)$, nach der Definition von dieser.

(2) Eine einzelne Trichter-Füllung ergibt, wie früher schon einmal notiert wurde, eine Homotopie-Äquivalenz der geometrischen Realisierungen:

$$|Y| \xrightarrow{\simeq} |Y| \cup_{|\Lambda^n_i|} |\Delta^n_i| \ \approx \ |\, Y \cup_{\Lambda^n_i} \Delta^n_i \,|$$

Mit endlich vielen ist es deshalb genauso, per Induktion. Um von hier auf den allgemeinen Fall zu kommen, wenden wir den Whitehead-Satz an. Dazu prüfen wir nach, daß die von der Inklusion $|Y| \to |\Phi(Y)|$ auf den Homotopiegruppen induzierte Abbildung ein Isomorphismus ist; also erstens surjektiv und zweitens injektiv:

Zur Surjektivität: sei $f : S^k \to |\Phi(Y)|$ ein Repräsentant eines Elements (die Basispunkte lassen wir in der Notation fort):

$$f : \ S^k \ \longrightarrow \ |Y| \ \cup_{\coprod_{t\in T} |\Lambda^{n(t)}_{i(t)}|} \ \coprod\nolimits_{t\in T} |\Delta^{n(t)}|$$

Wegen der Kompaktheit von S^k liegt das Bild $f(S^k)$ in einem *endlichen Unterkomplex* des CW-Komplexes $|\Phi(Y)|$. Es gibt deshalb eine *endliche* Teilmenge U von T, so daß dieses Bild schon enthalten ist in dem Unterraum:

$$|Y| \ \cup_{\coprod_{t\in U} |\Lambda^{n(t)}_{i(t)}|} \ \coprod_{t\in U} |\Delta^{n(t)}|$$

Wegen dem, was wir über *endliche* Trichterfüllungen schon wissen, können wir deshalb schließen, daß die Klasse von f herkommt aus $|Y|$, wie gewünscht.

Zur Injektivität: sind $f_0 : S^k \to |Y|$ und $f_1 : S^k \to |Y|$ zwei Repräsentanten, deren Äquivalenzklassen dasselbe Bild haben, so ist die Relation zwischen ihnen durch eine Homotopie beschreibbar, also eine Abbildung $S^k \times [0,1] \to |\Phi(Y)|$ mit gewissen Eigenschaften. Wie vorher können wir nun wieder auf den endlichen Fall zurückführen, da ja $S^k \times [0,1]$ ebenfalls kompakt ist.

Wir haben erhalten, daß in der aufsteigenden Folge von CW-Komplexen,

$$|X| = |\Phi^0(X)| \ \subset \ |\Phi^1(X)| \ \subset \ \cdots \ \subset \ |\Phi^n(X)| \ \subset \ \cdots$$

jede der Inklusions-Abbildungen eine Homotopie-Äquivalenz ist. Daraus folgt aber, wie wir wissen, daß auch die Inklusions-Abbildung $|X| \longrightarrow |\Psi(X)| = \bigcup_n |\Phi^n(X)|$ eine Homotopie-Äquivalenz ist (der Beweis dafür ging übrigens mit derselben Anwendung des Whitehead-Satzes, die gerade eben auch verwendet wurde). $\square$

Variante der Konstruktion (*Trichter-Füllen über* B). (a) Sei $p : Y \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Man betrachtet die Menge T, deren Elemente die Trichter *in* Y *über* B sind. Ein Element von T ist also ein Tupel

$$(n,i,f,g) \ ; \quad \text{wo} \quad n \geq 1 \ , \quad 0 \leq i \leq n \ , \quad f : \ \Lambda^n_i \longrightarrow Y \ , \quad g : \ \Delta^n \longrightarrow B \ ,$$

derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{Inkl}"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert. Einen solchen Trichter zu *füllen*, bedeutet, daß man, unter Benutzung des Klebe-Diagramms $Y \xleftarrow{f} \Lambda^n_i \to \Delta^n$, eine Verklebe-Konstruktion macht; also übergeht zu:

$$Y \cup_{\Lambda^n_i} \Delta^n \ ;$$

wobei man, gleichzeitig, die Abbildung p auf $Y \cup_{\Lambda^n_i} \Delta^n$ erweitert, mit Hilfe von g .

Wieder kann man die Trichter alle gleichzeitig füllen. Man bekommt die simpliziale Menge

$$\Phi(Y) \ = \ Y \ \cup_{\coprod_{t\in T} \Lambda^{n(t)}_{i(t)}} \ \coprod\nolimits_{t\in T} \Delta^{n(t)}$$

zusammen mit einer Abbildung davon nach B.

(b) Sei X eine simpliziale Menge über B. Man definiert eine aufsteigende Folge von simplizialen Mengen, über B, durch *iteriertes Trichter-Füllen*:

$$\Phi^0(X) \ = \ X \ , \ \Phi^1(X) \ = \ \Phi(\,\Phi^0(X)\,) \ , \ \ldots \ , \ \Phi^n(X) \ = \ \Phi(\,\Phi^{n-1}(X)\,) \ , \ \ldots$$

und nimmt die Vereinigung von all diesen, $\Psi(X) \ = \ \bigcup_n \Phi^n(X)$.

Satz. (1) *Die Abbildung* $\Psi(X) \ \to \ B$ *erfüllt die Erweiterungs-Bedingung.* (2) *Die Inklusion* $X \ \to \ \Psi(X)$ *induziert eine Homotopie-Äquivalenz der geometrischen Realisierungen,* $|X| \to |\Psi(X)|$.

Beweis. Wie vorher. □

Nun zum Vorkommen der Erweiterungs-Bedingung "in der Natur":

Beispiel. Der singuläre Komplex $\mathrm{S}(W)$ eines topologischen Raumes W ist ein Beispiel für eine simpliziale Menge, in der die Erweiterungs-Bedingung *erfüllt* ist. Denn wegen der Adjungiertheit der Funktoren $\mathrm{S}(-)$ und $|-|$ (der Funktor "geometrische Realisierung" ist links-adjungiert zum Funktor "singulärer Komplex") kann man einen Trichter in $\mathrm{S}(W)$, $\Lambda^n_i \to \mathrm{S}(W)$, identifizieren mit einer stetigen Abbildung $|\Lambda^n_i| \to W$. Es ist aber klar (oder?), daß $|\Lambda^n_i|$ ein Retrakt von $|\Delta^n|$ ist. Dies ergibt eine Abbildung $|\Delta^n| \ \to \ W$ und, per Adjunktion, damit auch eine Abbildung $\Delta^n \ \to \ \mathrm{S}(W)$. Es ist plausibel, daß das die gewünschte Trichter-Füllung sein wird. Das (leichte) Nachprüfen davon lassen wir weg. □

Für unsere nächste Betrachtung benötigen wir eine alternative Beschreibung von Trichtern; nämlich eine Beschreibung durch Systeme von Simplizes:

Lemma (Alternative Beschreibung von Trichtern). (1) *Es läuft auf dasselbe hinaus*:
(i) *einen Trichter* $f : \Lambda^n_i \to E$ *anzugeben* oder
(ii) *ein System von* $(n{-}1)$*-Simplizes* x_j *in* E, $0 \leq j \leq n$, $j \neq i$, *mit der Bedingung, daß* $d_j(x_k) \ = \ d_{k-1}(x_j)$ *für* $j < k$ *und* $j \neq i \neq k$.

(2) *Es läuft auf dasselbe hinaus*:
(i) *eine Füllung des Trichters* $f : \Lambda^n_i \to E$ *anzugeben* (eine Abbildung $\Delta^n \to E$, die die Abbildung f erweitert) oder
(ii) *ein* n*-Simplex* $y \in E$, *mit* $d_j(y) \ = \ x_j$ (*für* $j \neq i$).

Beweis. Dies beruht auf der 1:1 Beziehung (Yoneda-Lemma) zwischen Abbildungen $g : \Delta^m \to E$ einerseits und Elementen $y \in E_m$ andererseits: die 1:1 Beziehung ist dadurch gegeben, daß der Abbildung g das Simplex $y \ = \ g(\iota_m)$ zugeordnet wird, wo ι_m das erzeugende Simplex $\iota_m = \mathrm{Id}_{[m]}$ in $(\Delta^m)_m \ = \ \mathrm{Hom}_\Delta(\,[m]\,,\,[m]\,)$ bezeichnet. Die angegebenen Relationen für die x_j und ihre Ränder erklären sich durch die Definition von x_j als $f(d_j(\iota_n))$ und die Beziehung (in Δ^n, für $j < k$)

$$d_j(d_k(\iota_n)) \ = \ d_{k-1}(d_j(\iota_n)) \ .$$

Umgekehrt ist der Trichter aus dem System der Simplizes x_j auch (re-)konstruierbar. Das liegt daran, daß in einer Unter-simplizialen-Menge von Δ^n, die von Simplizes der Art $d_j(\iota_n)$ erzeugt ist, *jede* Relation aus den oben angegebenen Relationen folgt.

(Für letzteres benutzt man die Normalform für Morphismen in der Kategorie Δ. Nämlich jeder Morphismus ist auf kanonische Weise die Komposition von einer Surjektion, gefolgt von einer Injektion; die Injektionen lassen sich auf spezielle Weise mit Hilfe der δ_i darstellen; und die Surjektionen auf spezielle Weise mit Hilfe der σ_i). □

Eine *simpliziale Gruppe* ist ein "simpliziales Objekt in der Kategorie der Gruppen", also ein Funktor

$$G : \ \Delta^{\mathrm{op}} \ \longrightarrow \ (\text{Gruppen}) \ .$$

Es bedeutet dasselbe, daß man für jedes $[n]$ in der Kategorie Δ eine Gruppe G_n hat, und für jede Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ in Δ einen Homomorphismus $\alpha^* : G_n \to G_m$. (Bei solcher "Zu-Fuß-Beschreibung" sollte man allerdings explizit darauf verweisen, daß die üblichen "simplizialen Identitäten" für die Abbildungen α^* erfüllt sein sollen.)

Satz. *Sei G eine simpliziale Gruppe. Die unterliegende simpliziale Menge von G erfüllt die Kan-Bedingung.*

Beweis. Sei ein Trichter $\Lambda^n_i \to G$ gegeben. Wie im vorangegangenen Lemma erläutert, so entspricht diesem Trichter ein Tupel von $(n{-}1)$-Simplizes in G:

$$x_0 \, , \ldots , \, x_{i-1} \, , \ - \ , \, x_{i+1}, \ldots , \, x_n \ ;$$

und gesucht ist, als Trichter-Füllung, ein n-Simplex y, mit

$$d_j(y) \ = \ x_j \quad (\text{für } j \neq i \,) \, .$$

Dazu konstruieren wir eine Folge von Simplizes, so daß diese Simplizes mehr und mehr von den gewünschten Eigenschaften haben.

Die Konstruktion geht in zwei Schritten. Zuerst wird eine Folge $y_0 , \ldots , y_{i-1}$ konstruiert mit der Eigenschaft, daß für jedes k zwischen 0 und $i{-}1$ gilt: für $j \leq k$ ist $d_j(y_k) = x_j$. Im zweiten Schritt wird in analoger Weise eine Folge konstruiert, die sich (zusätzlich) um die Indizes $> i$ kümmert.

Es sei y_{-1} irgendein Element von G_n, zum Beispiel das neutrale Element $1_n \in G_n$. Für den Induktions-Schritt nehmen wir nun an, daß y_{k-1} schon konstruiert ist.

Sei g_k dasjenige Element der Gruppe G_{n-1}, das definiert ist durch die Gleichung

$$g_k \ \cdot \ d_k(y_{k-1}) \ = \ x_k \ ,$$

und sei danach dann definiert (mit Hilfe des 'ausgearteten' Elements $s_k(g_k)$ in G_n):

$$y_k \ := \ s_k(g_k) \ \cdot \ y_{k-1} \ .$$

Es gilt dann die gewünschte neue Beziehung

$$d_k(y_k) \ = \ d_k(\, s_k(g_k) \ \cdot \ y_{k-1} \,) \ = \ d_k(s_k(g_k)) \ \cdot \ d_k(y_{k-1}) \ = \ g_k \ \cdot \ d_k(y_{k-1}) \ = \ x_k \ ,$$

und von den früheren Relationen ist auch nichts verlorengegangen. Denn für $j < k$ bekommen wir, wegen der "Trichter-Bedingung" $d_j(x_k) = d_{k-1}(x_j)$, daß

$$d_j(x_k) \;=\; d_{k-1}(x_j) \;=\; d_{k-1}(d_j(y_{k-1})) \;=\; d_j(d_k(y_{k-1}))$$

und folglich

$$d_j(g_k) \cdot d_j(x_k) \;=\; d_j(g_k) \cdot d_j(d_k(y_{k-1})) \;=\; d_j(\, g_k \cdot d_k(y_{k-1})\,) \;=\; d_j(x_k)\;,$$

woraus wir schließen, daß $d_j(g_k) = 1_{n-2}$, da es sich um eine Gleichung in einer *Gruppe* handelt. Es folgt, daß $s_{k-1}(d_j(g_k)) = s_{k-1}(1_{n-2}) = 1_{n-1}$ und deshalb (für $j < k$):

$$d_j(y_k) \;=\; d_j(\, s_k(g_k) \cdot y_{k-1}\,) \;=\; d_j(s_k(g_k)) \cdot d_j(y_{k-1}) \;=\; s_{k-1}(d_j(g_k)) \cdot x_j \;=\; x_j\;.$$

Im nun folgenden zweiten Schritt wird die (restliche) Folge $y_n, \ldots, y_{i+1}$ konstruiert mit der Eigenschaft, daß $d_j(y_k) = x_j$, für $j \geq k$ (wo $k > i$); und daß außerdem noch gilt $d_j(y_k) = x_j$, für $j < i$.

Es sei y_{n+1} definiert als y_{i-1}. Für den Induktions-Schritt (Induktion von oben nach unten) nehmen wir an, daß y_{k+1} schon definiert ist. $g_k \in G_{n-1}$ werde definiert durch

$$g_k \cdot d_k(y_{k+1}) \;=\; x_k\;,$$

und danach $y_k \in G_n$ als

$$y_k \;:=\; s_{k-1}(g_k) \cdot y_{k+1}\;.$$

Es gilt die gewünschte neue Beziehung

$$d_k(y_k) \;=\; d_k(s_{k-1}(g_k)) \cdot d_k(y_{k+1}) \;=\; g_k \cdot d_k(y_{k+1}) \;=\; x_k\;.$$

Was die weiteren Relationen angeht, so wird es genügen, wegen

$$d_j(y_k) \;=\; d_j(s_{k-1}(g_k)) \cdot d_j(y_{k+1}) \;=\; s_{k-1}(d_{j-1}(g_k)) \cdot x_j \;\stackrel{?!}{=}\; x_j \qquad (\text{für } j > k)$$

und

$$d_j(y_k) \;=\; d_j(s_{k-1}(g_k)) \cdot d_j(y_{k+1}) \;=\; s_{k-2}(d_j(g_k)) \cdot x_j \;\stackrel{?!}{=}\; x_j \qquad (\text{für } j < i)$$

zu zeigen, daß die Terme $d_{j-1}(g_k)$, $j > k$, und $d_j(g_k)$, $j < i$, beide gleich 1_{n-2} sind.

Im zweiten Falle, $j < i \leq k-1$, folgt das aus

$$d_j(x_k) \;=\; d_{k-1}(x_j) \;=\; d_{k-1}(d_j(y_{k+1})) \;=\; d_j(d_k(y_{k+1}))$$

und, folglich,

$$d_j(g_k) \cdot d_j(x_k) \;=\; d_j(g_k) \cdot d_j(d_k(y_{k+1})) \;=\; d_j(\, g_k \cdot d_k(y_{k+1})\,) \;=\; d_j(x_k)\;;$$

im ersten Falle, $j > k$, ähnlich aus

$$d_{j-1}(x_k) \;=\; d_k(x_j) \;=\; d_k(d_j(y_{k+1})) \;=\; d_{j-1}(d_k(y_{k+1}))$$

und, folglich,

$$d_{j-1}(g_k) \cdot d_{j-1}(x_k) \;=\; d_{j-1}(g_k) \cdot d_{j-1}(d_k(y_{k+1})) \;=\; d_{j-1}(\, g_k \cdot d_k(y_{k+1})\,) \;=\; d_{j-1}(x_k)\;.$$

□

Nicht-diskrete endliche simpliziale Mengen, wie zum Beispiel Δ^n, $n > 0$, erfüllen sicherlich nicht die Kan-Bedingung. Das sagt der folgende Satz.

Satz. *Sei X eine simpliziale Menge, die die Kan-Bedingung erfüllt. X sei nicht diskret* (d.h. es gebe mindestens ein nicht-ausgeartetes Simplex in einer Dimension > 0). *Dann ist X nicht endlich-dimensional* (insbesondere also auch nicht endlich).

Beweis. Sei $x_0 \in X_n$ ein nicht-ausgeartetes Simplex. Seine Dimension, n, sei > 0. Für den Beweis des Satzes wird es genügen, zu zeigen, daß dann auch ein nicht-ausgeartetes Simplex in der nächsten Dimension, $n{+}1$, existiert.

Sei x_1 definiert als $x_1 := s_0(d_0(x_0))$ (das geht, weil die Dimension nicht 0 ist). Die beiden Simplizes x_0 und x_1 erfüllen die Bedingung, daß $d_0(x_0) = d_0(x_1)$, sie bilden also einen "verallgemeinerten Trichter" im Sinne des folgenden Lemmas. Nach diesem Lemma folgt aus der Kan-Bedingung die Existenz einer "verallgemeinerten Füllung"; also die Existenz von einem $(n{+}1)$-Simplex y, mit $d_0(y) = x_0$ und $d_1(y) = x_1$.

Das Simplex y nun ist automatisch nicht-ausgeartet. Denn andernfalls wäre es entweder von der Form $s_i(z)$, wo $i > 0$, oder von der Form $s_0(z)$. Beides geht nicht. Denn im ersten Fall ($y = s_i(z)$, $i > 0$) würde folgen

$$x_0 \;=\; d_0(s_i(z)) \;=\; s_{i-1}(d_0(z)) \;\; ;$$

und im zweiten Fall ($y = s_0(z)$),

$$x_0 \;=\; d_0(y) \;=\; d_0(s_0(z)) \;=\; d_1(s_0(z)) \;=\; d_1(y) \;=\; x_1 \;=\; s_0(d_0(x_0)) \;\; ;$$

beidemal im Widerspruch zu der Annahme, daß x_0 nicht-ausgeartet ist. □

Für den Satz müssen wir noch das folgende Lemma nachtragen. Wir definieren dazu, daß ein *verallgemeinerter Trichter, vom Typ V^m_h*, eine Unter-simpliziale-Menge Υ in Δ^m von der folgenden Art sein soll: Υ ist nicht leer, und ist aufgespannt von Teil-Simplexen von Δ^m, deren jedes die h-te Ecke von Δ^m enthält. Ein *Teil-Simplex von* Δ^m soll dabei das Bild irgendeiner injektiven Abbildung $\Delta^n \to \Delta^m$ bezeichnen (wo $n \le m$).

Ein *verallgemeinerter Trichter in X* besteht aus einem solchen Υ zusammen mit einer Abbildung $\Upsilon \to X$; und eine *Füllung* davon ist eine Abbildung $\Delta^m \to X$, die die Abbildung $\Upsilon \to X$ erweitert.

Lemma. *X erfülle die Kan-Bedingung. Jeder verallgemeinerte Trichter in X hat eine Füllung.*

Für die Situation des Satzes ist dabei das folgende Beispiel relevant: Sei $0 \le h \le m$. Sei $j < k$, wo $j \neq h \neq k$ (für den Satz: $j = 0$ und $k = 1$). Die j-te und die k-te Seite von Δ^m spannen zusammen einen verallgemeinerten Trichter, Υ', vom Typ V^m_h auf. Die Angabe einer Abbildung $\Upsilon' \to X$ ist gleichbedeutend mit der Angabe von zwei $(m{-}1)$-Simplizes x_j und x_k in X mit $d_j(x_k) = d_{k-1}(x_j)$. Und eine Füllung davon entspricht einem m-Simplex y in X mit $d_j(y) = x_j$ und $d_k(y) = x_k$.

Beweis des Lemmas. Wenn $\Upsilon = \Delta^m$, dann ist nichts zu zeigen. Ansonsten gibt es eine injektive Abbildung $\Delta^n \to \Delta^m$, deren Bild zum einen die h-te Ecke von Δ^m enthält, zum andern aber seinerseits nicht ganz in Υ enthalten ist. Diese Abbildung sei so gewählt, daß n möglichst klein ist. *Das Urbild von Υ in Δ^n ist dann ein Trichter Λ_i^n*. Die zusammengesetzte Abbildung $\Lambda_i^n \to X$ ist nun ein Trichter, den man, nach Voraussetzung über X, füllen kann. Das heißt, die Abbildung von Λ_i^n kann auf Δ^n erweitert werden. Folglich, per Zusammenkleben, kann auch die Abbildung $\Upsilon \to X$ erweitert werden zu einer Abbildung auf $\Upsilon'' = \Upsilon \cup \mathrm{Bild}(\Delta^n)$. Wenn Υ'' noch nicht ganz Δ^m ist, dann wiederholt man diesen Schritt. Und so weiter. $\square$

Bündel und Kan-Faserungen

Sei G eine simpliziale Gruppe. Eine *Operation* von G auf einer simplizialen Menge X besteht aus einer Abbildung

$$G \times X \longrightarrow X \ ;$$

wobei noch verlangt ist, daß gewisse vertraute Bedingungen erfüllt sein sollen:

Eine Möglichkeit, diese Bedingungen zu formulieren, kommt von der Tatsache, daß man in jeder Dimension n eine Gruppe G_n und eine Menge X_n hat; und mit diesen eine Abbildung $G_n \times X_n \to X_n$; und daß man demgemäß nun verlangen kann, daß, für jedes n, letztere Abbildung eine Operation der Gruppe G_n auf der Menge X_n definiert: das neutrale Element 1_n von G_n operiert in trivialer Weise, $1_n \cdot x = x$, und es besteht Verträglichkeit mit dem Kompositionsgesetz in der Gruppe, $g_2 \cdot (g_1 \cdot x) = (g_2 \cdot g_1) \cdot x$.

Eine andere Möglichkeit, die aber auf dasselbe hinausläuft, ist, von der Abbildung $G \times X \xrightarrow{a} X$ zu verlangen, daß die beiden folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "\mathrm{Id} \times a"] \arrow[d, "\mathrm{mult} \times \mathrm{Id}"'] & G \times X \arrow[d, "a"] \\ G \times X \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "a"] & X \\ \Delta^0 \times X \arrow[u, "1 \times \mathrm{Id}"] \arrow[r, "\approx"'] & X \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

Die Operation von G auf X heißt *frei*, wenn, für jedes n, die Operation der Gruppe G_n auf der Menge X_n eine freie Operation ist: es kann $g \cdot x = x$ nur dann vorkommen, wenn das Element g das neutrale Element der Gruppe ist.

Definition. Sei G simpliziale Gruppe. Ein G-*Prinzipalbündel* besteht aus
— einer simplizialen Menge E ;
— einer freien Operation von G auf E.

Die *Basis* von dem G-Prinzipalbündel ist definiert als die simpliziale Menge der Bahnen,

$$B = E/G \ .$$

Dabei ist, in jeder Dimension n, $B_n = E_n/G_n$, die Menge der Bahnen von E_n nach G_n ; d.h., die Menge der Äquivalenzklassen von E_n bezüglich der Operation von G_n.

Offenbar gibt es, für jede Dimension n, einen Isomorphismus $E_n \approx G_n \times B_n$ (eine allgemeine Tatsache betreffend eine Menge mit einer freien Operation von einer Gruppe darauf). Es ist im allgemeinen aber *nicht* möglich, solche Isomorphismen in einer Weise zu wählen, daß sie mit den simplizialen Struktur-Abbildungen verträglich wären.

Abkürzend werden wir sagen, daß E ein G-Prinzipalbündel "ist", wenn gemeint ist, daß E in bestimmter Weise mit der Struktur eines G-Prinzipalbündels versehen ist.

Lemma. *Sei E ein G-Prinzipalbündel, mit Basis B. Sei $B' \to B$ eine Abbildung. Der Pullback $E' = E \times_B B'$ ist wieder ein G-Prinzipalbündel.*

Beweis. Die Operation wird definiert als die Abbildung

$$G \times (E \times_B B') \;\approx\; (G \times E) \times_B B' \;\longrightarrow\; E \times_B B' \;.$$

Wir müssen uns davon überzeugen, daß diese Abbildung
— den oben genannten beiden Bedingungen für eine Operation genügt;
— *frei* ist.

Offenbar nun genügt es für diese beiden Dinge, sie *dimensionsweise* nachzuprüfen (ein Diagramm von Abbildungen von simplizialen Mengen ist dann [und nur dann] kommutativ, wenn das in jeder Dimension der Fall ist; und "Freiheit" einer Operation ist ohnehin dimensionsweise definiert).

In Dimension n aber können wir schreiben $E_n \approx G_n \times B_n$, und unter diesem Isomorphismus entspricht die Operation von G_n derjenigen Operation, die auf dem Faktor B_n die triviale Operation ist, und auf dem Faktor G_n die "Translations-Operation" (die Operation von G_n auf seiner unterliegenden Menge, die durch die Gruppen-Multiplikation gegeben ist).

Die Pullback-Konstruktion $(G_n \times B_n) \times_{B_n} B'_n$ nun ergibt $G_n \times B'_n$, und die obige Abbildung ist gerade die, die die analoge Operation auf $G_n \times B'_n$ definiert (die triviale Operation auf dem zweiten Faktor und die Translations-Operation auf dem ersten Faktor). $\square$

Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung. Ein *Schnitt* von p ist eine Abbildung $s\colon B \to E$ mit der Eigenschaft, daß $p \circ s = \mathrm{Id}_B$.

Sei E ein G-Prinzipalbündel, mit Basis B. Eine *Trivialisierung* davon ist ein Isomorphismus $E \longrightarrow G \times B$, der mit der Operation verträglich ist (wobei $G \times B$ mit der schon genannten Operation versehen sei; derjenigen, die auf dem Faktor B trivial ist und auf dem Faktor G die Translations-Operation).

Lemma. *Sei E ein G-Prinzipalbündel, mit Basis B. Ein Schnitt von $E \to B$ induziert eine Trivialisierung von E.*

Beweis. Aus einem Schnitt $B \to E$ bekommt man eine Abbildung $G \times B \to E$ als die Komposition $G \times B \to G \times E \to E$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus: in jeder Dimension n ist sie beschreibbar als

$$G_n \times B_n \longrightarrow G_n \times (G_n \times B_n) \;\approx\; (G_n \times G_n) \times B_n \longrightarrow G_n \times B_n \;.$$

$\square$

Sei $p\colon E \to B$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Diese heißt ein *lokal-triviales Bündel, mit Faser* F, wenn die folgende Bedingung der “lokalen Trivialität” erfüllt ist: Für jedes n und jedes n-Simplex von B betrachtet man die zugehörige Abbildung $f\colon \Delta^n \to B$ und bildet damit den Pullback $E \times_B \Delta^n$. Die Bedingung ist, daß (für jedes n und jedes n-Simplex von B) dieser Pullback isomorph zum trivialen Bündel über Δ^n mit Faser F ist; das heißt, daß es einen Isomorphismus gibt, *über* Δ^n :

$$\begin{array}{ccc}
E \times_B \Delta^n & \xrightarrow{\approx} & F \times \Delta^n \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Delta^n & \xrightarrow{=} & \Delta^n
\end{array}$$

Satz. (1) *Ein G-Prinzipalbündel ist ein lokal-triviales Bündel mit Faser G.*

(2) *Ein lokal-triviales Bündel mit Faser F ist eine Kan-Faserung, sofern die Faser F die Erweiterungs-Bedingung erfüllt.*

Korollar. *Ein G-Prinzipalbündel ist eine Kan-Faserung.*

Beweis. Das folgt aus dem Satz wegen der früher gezeigten Tatsache, daß die unterliegende simpliziale Menge der simplizialen Gruppe G die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. — Das Korollar kann man auch direkter zeigen: Der Beweis dafür, daß die unterliegende simpliziale Menge einer simplizialen Gruppe G die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, läßt sich (fast wörtlich!) übertragen zu einem Beweis des Korollars; das steht so in den Büchern, die das Thema behandeln. □

Beweis des Satzes. (1) Die Abbildung $E \to B$ werde mit $p\colon E \to B$ bezeichnet. Sei $f\colon \Delta^n \to B$ eine Abbildung. Wir zeigen, daß (für den mit f gebildeten Pullback) die Abbildung $E \times_B \Delta^n \to \Delta^n$ einen *Schnitt* besitzt, also (nach dem obigen Lemma) auch eine Trivialisierung.

Es sei dazu $\iota_n \in \Delta^n$ das erzeugende Simplex von Δ^n; unter der Identifikation $(\Delta^n)_n = \mathrm{Hom}_\Delta([n], [n])$ entspricht es der identischen Abbildung auf $[n]$. Die Abbildung $p_n\colon E_n \to B_n$ ist, nach Definition, die Quotienten-Abbildung von E_n zu der Menge der Äquivalenzklassen E_n/G_n; die Abbildung ist also *surjektiv*. Sei $\kappa \in E_n$ irgendein Element, das über $f_n(\iota)$ liegt (also $f_n(\iota) = p_n(\kappa)$). Es existiert eine Abbildung $g\colon \Delta^n \to E$ mit $g_n(\iota) = \kappa$ (nach dem Yoneda-Lemma). Da, nach Konstruktion, $f_n(\iota) = p_n(g_n(\iota))$, gilt, wieder nach dem Yoneda-Lemma, daß $f = p \circ g$ (Gleichheit von Abbildungen $\Delta^n \to B$). Das resultierende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n & \xrightarrow{g} & E \\
\| & & \downarrow \\
\Delta^n & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

liefert den gewünschten Schnitt $\Delta^n \to E \times_B \Delta^n$.

(2) Sei $p\colon E \to B$ ein lokal-triviales Bündel, mit Faser F. Sei

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_i & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & B \end{array}$$

ein Trichter. Wir können das Diagramm ergänzen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^n_i & \longrightarrow & \Delta^n \times_B E & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{=} & \Delta^n & \longrightarrow & B \end{array}$$

und es wird deshalb genügen, den durch den linken Teil dieses Diagramms gegebenen Trichter zu füllen. Wegen der vorausgesetzten Existenz von lokalen Trivialisierungen, läßt sich dieses linke Quadrat umschreiben in die Form:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n_i & \longrightarrow & F \times \Delta^n \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{pr}_2 \\ \Delta^n & \xrightarrow{=} & \Delta^n \end{array}$$

Die Daten in diesem Diagramm sind äquivalent zu der Angabe einer Abbildung $\Lambda^n_i \to F$. Wegen der für die Faser F vorausgesetzten Erweiterungs-Eigenschaft, hat diese Abbildung eine Erweiterung auf ganz Δ^n. Das liefert die gewünschte Liftung in letzterem Quadrat: eine Abbildung von links unten nach rechts oben, die das resultierende Diagramm kommutativ macht. □

Satz. *Geometrische Realisierung respektiert lokal-triviale Bündel.*

Beweis (Skizze). Die gegenwärtige Skizze ist in mehrfacher Hinsicht ungenau; oder, um es höflicher auszudrücken: unvollständig. Insbesondere bedarf auch die Behauptung selbst ein wenig der Interpretation.

Ein lokal-triviales Bündel ist etwas, das, nach seiner Definition, "lokal" ein "triviales Bündel" ist; also ein *Produkt*. Es ist also hier *auch* behauptet (mehr oder weniger), daß die geometrische Realisierung Produkte respektiert: $|X \times Y| \approx |X| \times |Y|$.

Diese Behauptung ist richtig, wenn man sie mit einem Körnchen Salz nimmt. Von der Behauptung haben wir seinerzeit einen Spezialfall behandelt (weil wir ihn brauchten für die Aussage "geometrische Realisierung respektiert Homotopien"); das ist der Spezialfall $|X \times \Delta^1| \approx |X| \times |\Delta^1|$. Zwar ist dieser Spezialfall, was die erforderliche Technik angeht, schon sehr dicht daran am allgemeinen Fall. Aber es gibt im allgemeinen Fall ein Phänomen, das in dem Spezialfall noch keinen Ärger macht:

Das Phänomen haben wir kennengelernt beim Thema "Produkte von CW-Komplexen". Das Phänomen ist, daß die Konstruktion von Verklebungen einerseits und die von Produkten andererseits im allgemeinen nicht miteinander kompatibel sind, wenn man nicht eine Bedingung der Art hat, daß mindestens einer der Faktoren im Produkt kompakt ist (oder zumindest lokal-kompakt).

Es gibt eine elegante Methode, dies Problem zu umgehen (die wir nicht behandelt haben). Nämlich man führt den Begriff des *kompakt-erzeugten Raumes* ein: das ist ein topologischer Raum, in dem eine Menge W schon dann eine offene Menge ist, wenn für jedes Kompaktum K in dem Raum gilt, daß der Durchschnitt $W \cap K$ eine offene Menge in K ist. Zum Beispiel haben CW-Komplexe diese Eigenschaft.

Man kann nun die übliche Produkt-Topologie ersetzen durch das "Produkt in der Kategorie der kompakt-erzeugten Räume"; was schlicht darauf hinausläuft, daß man in dem Produktraum, soweit nötig, einige weitere Mengen als 'offen' deklariert (s. oben). Mit dieser Modifikation ist es dann richtig, daß, generell, das Produkt von zwei CW-Komplexen wieder ein CW-Komplex ist. Und ebenso, daß, für simpliziale Mengen X und Y, gilt: $|X \times Y| \approx |X| \times |Y|$.

Zur Interpretation des Satzes nun: Wenn man sich nicht auf spezielle Fälle beschränken will (etwa den, wo $|F|$ kompakt ist oder zumindest lokal-kompakt), so wird es angebracht sein, den Satz so zu lesen, daß er sich auf eben die "kompakt-erzeugte Topologie" bezieht. — Wir kommen jetzt zur Begründung des Satzes.

Sei $p : E \to B$ eine Abbildung simplizialer Mengen, die ein lokal-triviales Bündel ist; wo also, nach Definition, für jede Abbildung $\Delta^n \to B$ das "Urbild" $E \times_B \Delta^n$ ein Produkt ist, $E \times_B \Delta^n \approx F \times \Delta^n$. Wenn wir für allgemeines n hier jetzt das akzeptieren, was wir für $n = 1$ früher nachgeprüft haben: $|F \times \Delta^n| \approx |F| \times |\Delta^n|$, so sehen wir, daß für die geometrische Realisierung die analoge Produkt-Struktur vorliegt: $|E \times_B \Delta^n| \approx |F| \times |\Delta^n|$. Dies sieht fast wie "lokale Trivialität" aus. Die Sache hat nur einen Haken: im allgemeinen wird das Bild von $|\Delta^n|$ in $|B|$ keine offene Menge sein.

Es ist auch nicht so, daß man erwarten könnte, zu einem vorgegebenen Punkt eine "vernünftige" offene Umgebung zu finden, die eine Vereinigung von (offenen) Zellen wäre. Zum Beispiel bei dem Kreis mit einer 0-Zelle und einer 1-Zelle, , gibt es nur eine einzige Umgebung der 0-Zelle, die auch eine Vereinigung von offenen Zellen ist; nämlich den ganzen Kreis selbst. Andererseits ist der ganze Kreis aber denkbar ungeeignet für die Bereitstellung von lokaken Trivialisierungen, da es über dem Kreis ja nicht-triviale Bündel wirklich gibt (z.B. die universelle Überlagerung von dem Kreis). Die benötigten offenen Mengen in $|B|$ werden wir uns also mit ein wenig Arbeit beschaffen müssen.

Bezeichne B^n das n-Skelett von B. Es entsteht also $|B^n|$ aus $|B^{n-1}|$ durch das Anheften von n-Zellen (je eine n-Zelle für jedes nicht-ausgeartete n-Simplex von B).

Sei $x \in |B|$, und zwar $x \in |B^m|$ aber nicht $\in |B^{m-1}|$. Es liegt dann x im Innern einer der offenen m-Zellen. Als offene Umgebung von x in $|B^m|$ wählen wir eine offene Teilmenge in der betreffenden Zelle; z.B. die Zelle selbst.

Induktiv nehmen wir nun an, daß schon eine offene Umgebung U^{n-1} von x in $|B^{n-1}|$ konstruiert ist, zusammen mit einer Trivialisierung der Einschränkung $U^{n-1} \times_{|B|} |E|$. Wir wollen U^{n-1} vergrößern zu einer offenen Umgebung U^n von x in $|B^n|$, und zwar wollen wir das in der Weise tun, daß wir auch die Trivialisierung fortsetzen können.

Das neue U^n wird aus dem alten U^{n-1} bestehen zusammen mit Teilen der daran anstoßenden n-Zellen. Diese Teile bekommen wir wie folgt.

Im n-Simplex $|\Delta^n|$ wählen wir eine offene Umgebung V von dem Rand $|\partial\Delta^n|$; und zwar soll V die Eigenschaft haben, daß eine Retraktion $r : V \to |\partial\Delta^n|$ existiert. Ein solches V bekommt man etwa, wenn man aus dem Simplex ein konzentrisches kleineres herausnimmt.

Zu dem Simplex $\in B_n$ mit der Nummer j (einem nicht-ausgearteten Simplex; die anderen sind hier nicht interessant) gehört eine Abbildung $\chi_j : \Delta^n \to B^n$ (die charakteristische Abbildung). Ihre geometrische Realisierung $|\chi_j| : |\Delta^n| \to |B^n|$ hat als Einschränkung die Abbildung $|\chi_j'| : |\partial\Delta^n| \to |B^{n-1}|$, die Anhefte-Abbildung für die betreffende Zelle.

Sei U_j definiert als $U_j = (\,|\chi_j| \circ r\,)^{-1}(U^{n-1})$, der Teilraum von V, der gegeben ist durch das Urbild von U^{n-1} unter der Abbildung

$$V \xrightarrow{r} |\partial\Delta^n| \xrightarrow{|\chi_j'|} |B^{n-1}| \ ;$$

und sei sein "Rand" ∂U_j definiert als $\partial U_j = U_j \cap |\partial\Delta^n|$, der Durchschnitt von U_j mit dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$ von V. Die Retraktion $r : V \to |\partial\Delta^n|$ ergibt dann, per Einschränkung, eine Retraktion

$$r_j : U_j \to \partial U_j \ .$$

Und die Anhefte-Abbildung $|\chi_j'| : |\partial\Delta^n| \to |B^{n-1}|$ ergibt, ebenfalls per Einschränkung, eine Anhefte-Abbildung

$$q_j : \partial U_j \to U^{n-1} \ .$$

Mit diesen Anhefte-Abbildungen kann die Teilmenge U^n in $|B^n|$ definiert werden als

$$U^n \ := \ U^{n-1} \cup_{\coprod_j \partial U_j} \coprod\nolimits_j U_j \ ;$$

es ist klar (oder?), daß dies eine *offene* Teilmenge von $|B^n|$ ist.

Über all den hier zusammengeklebten Teilräumen haben wir Trivialisierungen des Bündels:

$$|E| \times_{|B|} U^{n-1} \xrightarrow{\approx} |F| \times U^{n-1}$$

(nach der Induktionsvoraussetzung); und

$$|E| \times_{|B|} U_j \xrightarrow{\approx} |F| \times U_j$$

(per Einschränkung von der Trivialisierung $|E| \times_{|B|} |\Delta^n| \xrightarrow{\approx} |F| \times |\Delta^n|$).

Um diese Trivialisierungen zu kombinieren, machen wir zunächst die zusätzliche Annahme, daß die Anhefte-Abbildungen $q_j : \partial U_j \to U^{n-1}$ mit den Trivialisierungen kompatibel sind in dem Sinne, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
|E| \times_{|B|} \partial U_j & \xrightarrow{(q_j)_*} & |E| \times_{|B|} U^{n-1} \\
\approx \big\downarrow & & \big\downarrow \approx \\
|F| \times \partial U_j & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times q_j} & |F| \times U^{n-1}
\end{array}$$

(wo $(q_j)_*$ die Abbildung der zurückgezogenen 'Bündel' über der Abbildung q_j ist).

Als Konsequenz von dieser zusätzlichen Annahme erhalten wir die gewünschte Trivialisierung über U^n :

$$|E| \times_{|B|} U^n \;=\; |E| \times_{|B|} U^{n-1} \cup_{\coprod_j |E| \times_{|B|} \partial U_j} \coprod_j |E| \times_{|B|} U_j$$
$$\approx\; |E| \times \big(U^{n-1} \cup_{\coprod_j \partial U_j} \coprod_j U_j \big)$$

(wobei anzumerken ist, daß wir hier eine Verklebe-Konstruktion mit einer Produkt-Konstruktion vertauscht haben, *ohne* die Hypothese "lokal-kompakt" erwähnt zu haben: dies setzt die Verwendung der kompakt-erzeugten Topologie voraus).

Da die zusätzliche Annahme im allgemeinen nicht erfüllt sein wird (jedenfalls haben wir keinen Grund, derartiges zu glauben), werden wir eine zusätzliche Konstruktion machen müssen, um sie zu rechtfertigen. Das geht so.

Die zusammengesetzte Abbildung in dem Diagramm (unten links nach unten rechts über den langen Weg),

$$|F| \times \partial U_j \xleftarrow{\;\approx\;} |E| \times_{|B|} \partial U_j \xrightarrow{(q_j)_*} |E| \times_{|B|} U^{n-1} \xrightarrow{\;\approx\;} |F| \times U^{n-1} \quad ,$$

bildet für jeden Punkt $z \in \partial U_j$ die Faser $|F|$ über diesem Punkt z isomorph ab auf die Faser $|F|$ über dem Bildpunkt $q_j(z)$ in U^{n-1}. (Das "$|F|$" hier ist in beiden Fällen *dasselbe*, da es sich ja nicht einfach um Bündel handelt, sondern um Bündel mit einer gewählten Trivialisierung!)

Diese Abbildung muß nicht die Identität sein, wir hätten nur gern, daß sie es wäre. Wir hoffen, dies zu erreichen, indem wir die ganze Trivialisierung

$$|F| \times U_j \xleftarrow{\;\approx\;} |E| \times_{|B|} U_j$$

durch eine andere ersetzen.

Nun können wir die Tatsache, daß wir für jeden Punkt $z \in \partial U_j$ einen Isomorphismus von $|F|$ auf sich haben, auch so ausdrücken, per Exponentialgesetz für Abbildungen, daß wir eine Abbildung haben von ∂U_j in den Raum der Automorphismen von $|F|$:

$$\partial U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}(|F|)$$

(wobei anzumerken ist, daß wir hier das Exponentialgesetz zitieren *ohne* die Hypothese "lokal-kompakt" für einen der beteiligten Räume gefordert zu haben: dies setzt die Verwendung der kompakt-erzeugten Topologie voraus).

Die gewünschte Änderung der Trivialisierung über U_j können wir deshalb erreichen, indem wir die Abbildung von ∂U_j zu $\mathrm{Aut}(|F|)$ fortsetzen zu einer Abbildung von U_j zu $\mathrm{Aut}(|F|)$. Das ist aber ganz leicht: wir nehmen einfach die Komposition mit der Retraktion r_j ,

$$U_j \xrightarrow{r_j} \partial U_j \longrightarrow \mathrm{Aut}(|F|) \quad .$$

Die Behandlung des Induktions-Schritts ist damit abgeschlossen.

Der Rest des Beweises besteht aus der Bemerkung, daß die Vereinigung der konstruierten U^n eine Umgebung in dem Raum $|B|$ sein wird; und daß die kompatiblen Trivialisierungen über den U^n sich zusammensetzen zu einer Trivialisierung über der Vereinigung. □

Korollar. *Sei $p : E \to B$ eine Abbildung simplizialer Mengen, die ein lokal-triviales Bündel ist. Die geometrische Realisierung $|p| : |E| \to |B|$ ist eine Serre-Faserung* (d.h., sie hat die Homotopie-Liftungs-Eigenschaft für Polyeder).

Beweis. Das kennen wir von früher, bis auf ein Detail. Nämlich der Begriff der “lokalen Trivialisierung” hat hier jetzt eine leicht abgeänderte Bedeutung: ein Isomorphismus

$$|E| \times_{|B|} U \;\approx\; |E| \times U \;,$$

wo das Produkt auf der rechten Seite nicht mit der *Produkt-Topologie* versehen ist, sondern mit der “kompakt-erzeugten” Variante davon: es werden zusätzlich solche Teilmengen W als ‘offen’ deklariert, die die Eigenschaft haben, daß für jedes Kompaktum K der Durchschnitt $W \cap K$ eine offene Menge in K ist.

Diese Variante ist aber unschädlich für den uns bekannten Beweis der HLEP. Der Witz ist, daß es für einen *kompakten* Raum P (z.B. ein Polyeder), und eine Abbildung $f : P \to |E| \times U$, für die Frage der Stetigkeit keinen Unterschied macht, ob der Zielraum mit der üblichen Topologie versehen ist oder mit der genannten Variante: wenn f für die übliche Topologie eine stetige Abbildung ist, dann auch für die kompakt-erzeugte Variante; denn in einem *kompakten* Unterraum, wie z.B. $f(P)$, kommen ja keine neuen offenen Mengen dazu. $\square$

Minimale Kan-Komplexe, minimale Kan-Faserungen

Ein Kan-Komplex heißt *minimal*, wenn er die Eigenschaft hat: Je zwei Simplizes, die homotop sind relativ Rand, sind schon zueinander gleich.

Ähnlich auch heißt eine Kan-Faserung $p : E \to B$ minimal, wenn je zwei Simplizes in E, die relativ Rand homotop sind über B (d.h. die Homotopie ist, nach B projiziert, konstant) schon gleich sind.

Satz. *Sei X Kan-Komplex. In X gibt es einen minimalen Kan-Komplex $\overline{X}$, der starker Deformationsretrakt von X ist.*

Ähnlich auch, wenn $p : E \to B$ Kan-Faserung ist, so gibt es eine minimale Kan-Faserung $\overline{p} : \overline{E} \to B$, so daß $\overline{E}$ starker Deformationsretrakt von E über B ist.

Ein Detail, das wir im Beweis des Satzes benötigen werden, behandeln wir vorweg. Nämlich, sobald zwei ausgeartete Simplizes auch nur denselben Rand haben, so sind sie schon zueinander gleich:

Lemma. *In einer simplizialen Menge seien x und y zwei n-Simplizes, die beide ausgeartet sind. Es sei $d_i(x) = d_i(y)$ für $0 \leq i \leq n$. Dann ist $x = y$.*

Beweis. Wenn x im Bild der i-ten Ausartungs-Abbildung liegt, $x = s_i(v)$, so ist $v = d_i(x)$; also $x = s_i(d_i(x))$. Es sei, ähnlich, $y = s_j(d_j(y))$. Wenn $i = j$, dann haben wir sofort, daß $x = y$. Andernfalls sei etwa $i < j$. Es ist dann

$$x = s_i\, d_i\, x = s_i\, d_i\, y = s_i\, d_i\, s_j\, d_j\, y = s_i\, s_{j-1}\, d_i\, d_j\, y = s_j\, s_i\, d_i\, d_j\, y \ .$$

Also ist x auch eine j-te Ausartung, $x = s_j(z)$, wo $z = s_i\, d_i\, d_j\, y$. Wie oben folgt daraus

$$x = s_j(z) = s_j(d_j(x)) = s_j(d_j(y)) = y \ .$$

$\square$

Beweis des Satzes. Man kann den Beweis auf zwei verschiedene Weisen beschreiben. Die erste Methode ist “konstruktiv”: das gewünschte $\overline{X}$ (bzw. $\overline{E}$) wird mit Hilfe einer induktiven Konstruktion beschrieben; und danach die gewünschte Homotopie dann ebenfalls. Die zweite Methode ist “summarisch”: es wird ein Ding mit wünschenswerten Eigenschaften beschrieben; danach wird konstatiert, wenn dieses Ding *maximal* ist (das gibt es, nach Zorn’s Lemma), dann ist es das gewünschte. Wir skizzieren zunächst die konstruktive Methode und beschreiben mit mehr Detail danach die summarische.

Die Simplizes von X (bzw. von E) werden in Äquivalenzklassen eingeteilt: Zwei Simplizes sind *äquivalent*, wenn zwischen ihnen eine Homotopie, relativ Rand, existiert (bzw. eine solche Homotopie über B) — wie wir wissen, ist das eine Äquivalenz-Relation. Das gewünschte $\overline{X}$ (bzw. $\overline{E}$) hat insbesondere dann die Eigenschaft, daß es aus jeder Äquivalenzklasse höchstens einen Repräsentanten enthält.

Bei der konstruktiven Methode nimmt man für $\overline{X}_0$ irgendeine Teilmenge von X_0, die aus jeder Äquivalenzklasse in X_0 genau einen Repräsentanten enthält. Danach, für die Konstruktion von $\overline{X}_1$, beginnt man nicht mit ganz X_1. Vielmehr betrachtet man nur diejenigen 1-Simplizes, deren Ränder in $\overline{X}_0$ liegen. Von diesen nimmt man dann aus jeder Äquivalenzklasse einen Repräsentanten; und zwar, wenn es einen solchen gibt, einen ausgearteten. Und so weiter. Es ist nicht ganz selbstverständlich, daß die so konstruierte Folge von Mengen eine Unter-simpliziale-Menge von X ist.

Es sei jetzt (die summarische Methode) $\overline{X}_0$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, $\ldots$, irgendein System von Teilmengen von X_0, X_1, $\ldots$, mit den nun aufgelisteten Eigenschaften; die Elemente von $\overline{X}_n$ werden als die *auserwählten n-Simplizes* bezeichnet. Die Forderungen sind:
— es gibt aus jeder Äquivalenzklasse höchstens ein auserwähltes Simplex;
— ein solches ist ausgeartet, wenn es zu einem ausgearteten Simplex äquivalent ist;
— jeder Rand von einem auserwählten Simplex ist auch auserwählt;
— das System ist maximal (in Bezug auf die drei vorigen Forderungen).
Es gilt dann: *Das System der auserwählten Simplizes ist eine Unter-simpliziale-Menge.*

Wir müssen zeigen, das System ist abgeschlossen gegenüber Rand- und Ausartungs-Abbildungen. Die nicht-triviale Sache dabei ist der Nachweis dafür, daß die ausgearteten Simplizes dabei sind, soweit sie es müssen. Sei also x ein Simplex, $x \in \overline{X}_n$ (bzw. $\in \overline{E}_n$). Sei $s_i(x)$ davon eine Ausartung. Wir müssen uns davon überzeugen, daß $s_i(x)$ zu $\overline{X}_{n+1}$ gehört (bzw. zu $\overline{E}_{n+1}$). Für diesen Nachweis dürfen wir, induktiv, annehmen, daß die entsprechende Sache für kleinere Dimensionen als n schon geklärt ist. Nun sind die Ränder von $s_i(x)$, von x selbst abgesehen, sämtlich ausgeartet. Und sie sind auch Ausartungen von "iterierten Rändern" von x. Die Induktionsvoraussetzung ist also anwendbar, und wir schließen, daß die Ränder von $s_i(x)$ alle schon dazugehören.

Als nächstes wenden wir die Forderung der Maximalität an. Da die Ränder von $s_i(x)$ alle dazugehören, könnten wir notfalls $s_i(x)$ dazunehmen; das würde aber der Forderung der Maximalität widersprechen — es sei denn, es gibt einen anderen Hinderungsgrund; nämlich ein zu $s_i(x)$ äquivalentes Simplex, das schon dazugehört. Wir schließen, daß es unter den auserwählten Simplizes ein solches gibt, das zu $s_i(x)$ äquivalent ist.

Nach dem vorangestellten Lemma enthält die Äquivalenzklasse von $s_i(x)$ höchstens ein ausgeartetes Simplex. Da sie $s_i(x)$ enthält, enthält sie also genau ein ausgeartetes Simplex. Das auserwählte Simplex in der Äquivalenzklasse von $s_i(x)$ ist folglich $s_i(x)$ selbst — wegen der Forderung, daß das auserwählte Simplex in einer Äquivalenzklasse auf jeden Fall ausgeartet zu sein hat, wenn eine solche Wahl möglich ist.

Die erhaltene Unter-simpliziale Menge wird unser $\overline{X}$ (bzw. $\overline{E}$) sein.

Im Falle von $\overline{X}$ überzeugen uns jetzt davon, daß $\overline{X}$ ein starker Deformationsretrakt von X ist. Das Argument kann man am nettesten formulieren, wenn man wieder einen "Maximalitäts"-Trick verwendet, und wir wollen das auch so tun.

Dazu betrachten wir Paare (Y,h), bestehend aus einer Unter-simplizialen-Menge Y von X und einer Homotopie

$$Y \times \Delta^1 \xrightarrow{h} X \ ,$$

wo h eine Homotopie von der Inklusion $Y \to X$ zu einer Retraktion $Y \to \overline{X}$ ist; und zwar eine Homotopie, die auf $\overline{X}$ konstant ist.

Ein Beispiel, wenn auch kein besonders interessantes, für ein solches Paar besteht aus $\overline{X}$ selbst, zusammen mit der konstanten Homotopie. Um ein interessanteres Beispiel zu bekommen, verlangen wir jetzt zusätzlich, daß das Paar (Y,h) *maximal* sein soll (in Bezug auf die beschriebene Eigenschaft). Das Resultat ist dann wirklich interessant: *Es folgt aus der Maximalität, daß Y schon ganz X ist.*

Denn angenommen, Y wäre kleiner. Wir könnten dann das Paar (Y,h) durch ein größeres ersetzen, im Widerspruch zur vorausgesetzten Maximalität: Sei dazu x ein Simplex in X, das nicht in Y enthalten ist. Die Dimension n von x sei so klein wie möglich. Die charakteristische Abbildung $\overline{x} : \Delta^n \to X$ hat in dem Fall die Eigenschaft, daß der Rand $\partial\Delta^n$ nach Y abgebildet wird. Wir können also Y' definieren durch "Zusammenkleben", $Y' = Y \cup_{\partial\Delta^n} \Delta^n$. Wir prüfen nach, daß die Abbildung h zu einer Abbildung $h' : Y' \times \Delta^1 \to X$ fortgesetzt werden kann, mit den analogen Eigenschaften.

In einem ersten Versuch wenden wir dazu die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft auf die Inklusion $Y \to Y'$ an. Die resultierende Homotopie $h'' : Y' \times \Delta^1 \to X$ hat zwei der drei gewünschten Eigenschaften: sie startet bei der Inklusion $Y' \to X$, und sie ist relativ zu $\overline{X}$. Die dritte Eigenschaft wäre ebenfalls erfüllt, wenn wir voraussetzen könnten, daß die (zusammengesetzte) Abbildung

$$\Delta^n \times 1 \xrightarrow{\overline{x} \times 1} Y' \times 1 \xrightarrow{h''} X$$

ihr Bild in $\overline{X}$ hat — was natürlich nicht der Fall sein muß.

Die Einschränkung von letzterer Abbildung auf $\partial\Delta^n \times 1$ ist alternativ auch beschreibbar als

$$\partial\Delta^n \times 1 \xrightarrow{\overline{x} \times 1} Y \times 1 \xrightarrow{h} X \ .$$

Sie *hat* also ihr Bild in $\overline{X}$. Wegen der "Maximalität" in der Definition von $\overline{X}$ gibt es also ein "auserwähltes" Simplex, das zu dem Simplex $h''(x \times 1)$ äquivalent ist. Das bedeutet, es existiert eine Homotopie, relativ $\partial\Delta^n$, von der Abbildung

$$\Delta^n \ \approx \ \Delta^n \times 1 \xrightarrow{\overline{x} \times 1} Y' \times 1 \xrightarrow{h''} X$$

zu einer Abbildung mit Bild in $\overline{X}$. Per Zusammenkleben resultiert daraus eine Homotopie h''', relativ Y, von der Abbildung

$$Y' \ \approx \ Y' \times 1 \xrightarrow{h''} X$$

zu einer Abbildung mit Bild in $\overline{X}$.

Wenn es möglich wäre, eine Zwei-Schritt-Homotopie kommentarlos durch eine Ein-Schritt-Homotopie zu ersetzen, so würden wir das für die Hintereinanderschaltung der Homotopien h'' und h''' tun und bekämen so die Homotopie h'. Diese Ersetzung geht nun zwar nicht, aber, da X Kan-Komplex ist, können wir die Transitivität der Homotopie-Relation zitieren und auf die Weise das h' doch bekommen.

Es resultiert, nachträglich, nun auch, daß die simpliziale Menge $\overline{X}$ die Erweiterungs-Bedingung erfüllt: es ist klar (oder?), daß das aus der Tatsache folgt, daß $\overline{X}$ Retrakt von X ist.

Im Falle der Kan-Faserungen verfährt man ganz ähnlich; nur daß als weiteres Detail die Buchführung über Struktur-Abbildungen nach B zu berücksichtigen ist: Man betrachtet Paare (D, h), wo D Unter-simpliziale-Menge von E ist, und h eine Homotopie, relativ $\overline{E}$ und über B, von der Inklusion $D \to E$ zu einer Retraktion $D \to \overline{E}$; insbesondere hat man also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} D \times \Delta^1 & \xrightarrow{h} & E \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ D & \longrightarrow & B \end{array}$$

Wieder argumentiert man, wenn D nicht schon gleich dem ganzen E ist, dann ist das Paar (D, h) nicht maximal in Bezug auf die genannten Dinge. Der Unterschied zu dem schon gemachten Fall ist dabei einzig der, daß die Homotopien in der Konstruktion von dem "vergrößerten" Paar (D', h') ebenfalls nun als Homotopien über B zu nehmen sind; insbesondere "Homotopie-Erweiterung" ist in dem Sinne zu verstehen.

Aus der Tatsache, daß $\overline{E}$ Deformations-Retrakt (und insbesondere deshalb, Retrakt) von E über B ist, folgt schließlich auch noch, daß $\overline{E} \to B$ Kan-Faserung ist. $\square$

Minimale Kan-Komplexe haben eine frappierende Starrheits-Eigenschaft: Eine Homotopie-Äquivalenz ist automatisch(!!) schon ein Isomorphismus. Eine ähnliche Starrheits-Aussage gibt es auch für Abbildungen von minimalen Kan-Faserungen. Im übrigen ist, wie sich herausstellt, eine minimale Kan-Faserung automatisch auch schon lokal-trivial (ein lokal-triviales Bündel).

Der Beweis dieser Dinge beruht auf dem folgenden, etwas technisch aussehenden Lemma. Das Lemma läuft darauf hinaus, in einer leicht trickreichen Weise die Idee der Homotopie-Liftung zu kombinieren mit der Idee der Minimalität.

Lemma. *Sei $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to B$ eine minimale Kan-Faserung. Sei X eine simpliziale Menge, und seien f_0 und f_1 zwei Abbildungen, $f_i : X \to \widetilde{E}$. Es gelte, daß f_0 zu f_1 homotop ist, und zwar homotop über B. Es gelte, daß die Abbildung f_0 ein Isomorphismus ist. Dann ist die Abbildung f_1 ebenfalls ein Isomorphismus.*

Daß man in dem Lemma eine Homotopie "über B" hat, bedeutet, daß man ein kommutatives Diagramm hat:

$$
\begin{array}{ccc}
X \times \Delta^1 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{E} \\
{\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{p}} \\
X & \xrightarrow[q]{} & B
\end{array}
$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, ein kommutatives Diagramm:

$$
\begin{array}{ccc}
X \times \Delta^1 & \xrightarrow{(\,\widetilde{f}\,,\,\mathrm{pr}_2\,)} & \widetilde{E} \times \Delta^1 \\
{\scriptstyle q \times \mathrm{Id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{p} \times \mathrm{Id}} \\
B \times \Delta^1 & \xrightarrow[=]{} & B \times \Delta^1
\end{array}
$$

Nun ist es klar (oder?), daß in letzterem Diagramm die Abbildung $\widetilde{E} \times \Delta^1 \longrightarrow B \times \Delta^1$ ebenfalls eine Kan-Faserung ist, und zwar auch wieder eine minimale.

Als Variante des Lemmas können wir deshalb noch die folgende Verallgemeinerung notieren, wo "Deformation" sich nicht nur auf die Abbildungen bezieht, sondern auch auf die Faserung selbst; wo wir also statt einer Faserung über B nunmehr eine Faserung über $B \times \Delta^1$ betrachten:

Lemma (2. Form). *Sei $p : E \longrightarrow B \times \Delta^1$ eine minimale Kan-Faserung, und sei $q : X \to B$ eine Abbildung. Es sei*

$$f : \; X \times \Delta^1 \longrightarrow E$$

eine Abbildung derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{array}{ccc}
X \times \Delta^1 & \xrightarrow{f} & E \\
{\scriptstyle q \times \mathrm{Id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\
B \times \Delta^1 & \xrightarrow[=]{} & B \times \Delta^1
\end{array}
$$

Sei $E_0 = p^{-1}(B \times 0)$ und $E_1 = p^{-1}(B \times 1)$. Wenn die Abbildung $f_0 : X \to E_0$,

$$f_0 \;=\; f \,|\, (X \times 0)\,,$$

ein Isomorphismus ist, dann ist die Abbildung $f_1 : X \to E_1$,

$$f_1 \;=\; f \,|\, (X \times 1)\,,$$

ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Der Beweis ist eigentlich nur eine Bemerkung: erstens, wegen der Kan-Bedingung, existieren "Prismen-Füllungen"; und zweitens, wegen der Minimalität, gibt es für solche Prismen-Füllungen nicht nur eine Existenz- sondern auch eine Eindeutigkeits-Aussage. Wir kommen zur Benennung der Details — sie sind etwas umfänglich.

Wie bei einer früheren Gelegenheit besprochen, so kann man das Prisma $\Delta^n \times \Delta^1$, von dem Teil

$$\Delta^n \times 0 \cup_{\partial\Delta^n \times 0} \partial\Delta^n \times \Delta^1$$

ausgehend, durch iteriertes Trichter-Füllen bekommen; wir nennen das eine "Prismen-Füllung von links nach rechts". — Ebenso gibt es auch eine "Prismen-Füllung von rechts nach links", wo man entsprechend ausgeht von $\Delta^n \times 1 \cup_{\partial\Delta^n \times 1} \partial\Delta^n \times \Delta^1$.

Wenn eine "Prismen-Füllungs"-Aufgabe ("von links nach rechts") ein kommutatives Diagramm der Art

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n \times 0 \cup_{\partial\Delta^n \times 0} \partial\Delta^n \times \Delta^1 & \longrightarrow & E \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Delta^n \times \Delta^1 & \longrightarrow & B \times \Delta^1
\end{array}$$

bezeichnet, so hat, wegen der Kan-Bedingung, jede solche Aufgabe eine Lösung: eine Abbildung von unten links nach oben rechts, so daß das resultierende Diagramm kommutativ ist. — Und entsprechend auch mit Prismen-Füllungs-Aufgaben "von rechts nach links".

Für unsere Zwecke wird die Abbildung $\Delta^n \times \Delta^1 \longrightarrow B \times \Delta^1$ in dem Diagramm von sehr spezieller Art sein: das Produkt einer Abbildung $\Delta^n \to B$ mit der identischen Abbildung auf Δ^1. In dem Fall bekommen wir bei einer Trichter-Füllung von links nach rechts als deren "rechtes Ende" folglich eine Abbildung

$$\Delta^n \xrightarrow{\varphi} E_1 = p^{-1}(B \times 1) .$$

Es ist diese Abbildung, an deren Eindeutigkeit wir interessiert sind.

Wenn die Kan-Faserung p minimal ist, dann ist die Abbildung φ eindeutig bestimmt.

Denn angenommen, wir haben zwei Prismen-Füllungen ψ_0 und ψ_1:

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{\psi_i} & E \\
{\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & \downarrow \\
\Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{\chi \times \mathrm{Id}} & B \times \Delta^1
\end{array}$$

Wir können diese beiden dann in eine neue Liftungs-Aufgabe einbauen: die Abbildung

$$\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow B \times \Delta^1$$

ist definiert als die Komposition

$$\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_{1,2}} \Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{\chi \times \mathrm{Id}} B \times \Delta^1$$

(wo $\mathrm{pr}_{1,2}$ die Projektion auf die ersten beiden Faktoren bezeichnet).

Für eine Liftung dieser Abbildung nach E machen wir eine Vorgabe über einem Teil von $\Delta^1 \times \Delta^1$, nämlich (wenn wir uns den neuen Faktor Δ^1 als die vertikale Richtung vorstellen) eine Vorgabe über den Teil $\underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{\uparrow}}$ des Randes: links haben wir die alte Abbildung $\Delta^n \times 0 \to E$ (wo der neue Faktor Δ^1 nichts tut — weg-projiziert wird) und oben und unten haben wir die beiden zu vergleichenden Prismen-Füllungen ψ_0 und ψ_1.

Es kann $\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1$ durch Trichter-Füllen aus $\Delta^n \times \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{\uparrow}}$ erhalten werden; oder auch aus $\partial\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \cup \Delta^n \times \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{\uparrow}}$ (wir haben solches im Zusammenhang mit "Homotopie-Liftung" und "Homotopie-Relation" besprochen). Also existiert die gewünschte Liftung

$$\Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1 \longrightarrow E \ .$$

Die Einschränkung davon auf $\Delta^n \times 1 \times \Delta^1$ hat nun die Eigenschaft, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & E \arrow[d] \\
\Delta^n \arrow[r, "\chi \times 1"] & B \times \Delta^1
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Das heißt, es handelt sich hier um eine Homotopie (relativ $\partial\Delta^n$), die eine *Homotopie über* $B \times \Delta^1$ ist. Wegen der vorausgesetzten Minimalität der Faserung ist diese Homotopie folglich konstant. Insbesondere sind die Abbildungen an ihren Enden dieselben; das heißt, die beiden Abbildungen φ_0 und φ_1 stimmen überein. — Für Prismen-Füllungen in der anderen Richtung (von rechts nach links) hat man eine analoge Eindeutigkeits-Aussage.

Wir kommen nun zum Beweis dessen, daß die Abbildung f_1 bijektiv ist. Wir nehmen, induktiv, an, dies sei schon gezeigt in Dimensionen $< n$. Unter der Voraussetzung zeigen wir jetzt, daß f_1 auch in der Dimension n erstens injektiv und zweitens surjektiv ist.

— *Injektivität.* Seien x_1 und x_2 zwei n-Simplizes von X, die unter der Abbildung f_1 dasselbe Bild haben; seien $\overline{x}_i : \Delta^n \to X$ ihre charakteristischen Abbildungen. Nach der induktiv vorausgesetzten Injektivität von f_1 in Dimensionen $< n$ haben x_1 und x_2 dieselben Ränder; oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$\overline{x}_1 \,|\, \partial\Delta^n \;=\; \overline{x}_2 \,|\, \partial\Delta^n \ .$$

Wir bekommen eine Prismen-Füllungs-Aufgabe (von rechts nach links)

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \times 1 \cup_{\partial\Delta^n \times 1} \partial\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r, "f_1 \circ \overline{x}_i \,\cup\, f \circ (\overline{x}_i \times \mathrm{Id})"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
\Delta^n \times \Delta^1 \arrow[r] & B \times \Delta^1
\end{tikzcd}$$

wo wir nicht spezifizieren müssen, ob $i = 1$ oder $= 2$, da ja die beiden Abbildungen $f \circ \overline{x}_i$ sowohl auf $\partial\Delta^n \times \Delta^1$ als auch auf $\Delta^n \times 1$ übereinstimmen. Andererseits ergeben die beiden Abbildungen $f \circ (\overline{x}_i \times \mathrm{Id})$ nun *zwei* Lösungen der Prismen-Füllungs-Aufgabe.

Wegen der oben diskutierten Eindeutigkeits-Aussage schließen wir, daß die beiden am linken Ende übereinstimmen:

$$f \circ \overline{x}_1 \mid \Delta^n{\times}0 \;=\; f \circ \overline{x}_2 \mid \Delta^n{\times}0 \;.$$

Da die Abbildung $f_0 \;=\; f \,|\, X{\times}0$ injektiv ist (eine Voraussetzung des Lemmas), folgt daraus, daß auch $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ übereinstimmen; also, daß $x_1 = x_2$.

— *Surjektivität.* Sei y_1 ein n-Simplex in E_1, sei $\overline{y}_1$ seine charakteristische Abbildung. Wegen der induktiv vorausgesetzten Surjektivität von f_1 in Dimensionen $< n$ kommt der Rand her von X; das heißt, es gibt eine Abbildung

$$z : \; \partial\Delta^n \longrightarrow X$$

so daß $f_1 \circ z \;=\; \overline{y}_1 \,|\, \partial\Delta^n$. Wir bekommen eine Prismen-Füllungs-Aufgabe (von rechts nach links):

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n{\times}1 \cup_{\partial\Delta^n\times 1} \partial\Delta^n{\times}\Delta^1 & \xrightarrow{\;\overline{y}_1 \,\cup\, f\circ\,(z\times \mathrm{Id})\;} & E \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{\qquad\qquad} & B \times \Delta^1
\end{array}$$

Eine Lösung davon ergibt, als ihr linkes Ende, eine Abbildung

$$\Delta^n \;\approx\; \Delta^n \times 0 \;\longrightarrow\; E_0 \;=\; p^{-1}(B \times 0)$$

und damit ein zugehöriges n-Simplex y_0 von E_0 (mit eben dieser Abbildung als charakteristischer Abbildung).

Wegen der vorausgesetzten Surjektivität der Abbildung $f_0 : X \to E_0$ (eine Voraussetzung des Lemmas) gibt es ein n-Simplex x in X, dessen Bild das Simplex y_0 ist, $y_0 = f_0(x)$. Wir haben nun eine Prismen-Füllungs-Aufgabe (von links nach rechts):

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n{\times}0 \cup_{\partial\Delta^n\times 0} \partial\Delta^n{\times}\Delta^1 & \xrightarrow{\;\overline{y}_0 \,\cup\, f\circ\,(z\times \mathrm{Id})\;} & E \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\Delta^n \times \Delta^1 & \xrightarrow{\qquad\qquad} & B \times \Delta^1
\end{array}$$

und für diese Aufgabe haben wir *zwei* Lösungen: die erste ist die von oben, anders herum gelesen; die zweite ist durch die Homotopie gegeben:

$$\Delta^n{\times}\Delta^1 \xrightarrow{\;f\circ\,(x\times \mathrm{Id})\;} E \;.$$

Aufgrund der Eindeutigkeits-Aussage stimmen die beiden am rechten Ende überein. Das heißt, $y_1 = f(x{\times}1)$; und y_1 ist somit im Bild der Abbildung f_1. $\square$

Nun zu den angekündigten Anwendungen:

Satz. (1) *Seien X und X' minimale Kan-Komplexe. Jede Homotopie-Äquivalenz von X zu X' ist ein Isomorphismus.*

(2) *Seien $p : E \to B$ und $p' : E' \to B$ minimale Kan-Faserungen. Jede Homotopie-Äquivalenz, über B, von $p : E \to B$ zu $p' : E' \to B$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. (1) Sei $f : X \to X'$ eine Homotopie-Äquivalenz. Dies bedeutet, daß eine Abbildung in der anderen Richtung existiert, $g : X' \to X$, so daß die beiden Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ jeweils homotop zu einer identischen Abbildung sind; z.B. im zweiten Falle existiert eine Abbildung:

$$X \times \Delta^1 \longrightarrow X \ ,$$

die eine Homotopie ist zwischen der identischen Abbildung auf X einerseits und der Abbildung $g \circ f$ andererseits. Da X als minimaler Kan-Komplex vorausgesetzt wurde, ist das vorangegangene Lemma anwendbar. Es liefert, daß die Abbildung $g \circ f$ ein Isomorphismus ist. Da von X' ebenfalls vorausgesetzt wurde, daß es minimaler Kan-Komplex ist, folgt auf die gleiche Weise, daß auch $f \circ g$ ein Isomorphismus ist. Offenbar folgt jetzt, daß auch f und g beide Isomorphismen sind.

(2) Das geht genauso; mit der Modifikation, daß die vorausgesetzten Homotopien solche über B sind und die resultierenden Isomorphismen ebenfalls. □

Korollar. (1) *Sei X Kan-Komplex. “Der” homotopie-äquivalente minimale Kan-Komplex ist bis auf* (nicht-kanonische!) *Isomorphie eindeutig bestimmt.*

(2) *Sei $p : E \to B$ Kan-Faserung. “Die” über B homotopie-äquivalente minimale Kan-Faserung ist bis auf* (nicht-kanonische!) *Isomorphie über B eindeutig bestimmt.*

□

Wenn $p : E \to B$ eine Kan-Faserung (bzw. eine minimale Kan-Faserung) ist, und $B' \to B$ eine Abbildung, dann ist die durch den Pullback gegebene induzierte Abbildung

$$B' \times_B E \ \longrightarrow \ B'$$

ebenfalls eine Kan-Faserung (bzw. eine minimale Kan-Faserung). Wenn die Abbildung den Namen f hat, $f : B' \to B$, dann schreiben wir abkürzend (und etwas mißbräuchlich) auch $f^*(E)$ für diese induzierte Faserung.

Satz. *Sei $p : E \to B$ eine minimale Kan-Faserung.*

(1) *Wenn f_1 und f_2 homotope Abbildungen $B' \to B$ sind, dann sind die induzierten Faserungen $f_1^*(E)$ und $f_2^*(E)$ isomorph.*

(2) *Wenn die identische Abbildung auf B homotop ist zu einer trivialen Abbildung, dann ist $p : E \to B$ ein triviales Bündel* (genauer: ein *trivialisierbares* Bündel).

(3) *Jede minimale Kan-Faserung ist ein lokal-triviales Bündel.*

Beweis. (1) Sei F eine Homotopie von f_1 zu f_2; also eine Abbildung

$$F : B' \times \Delta^1 \longrightarrow B ,$$

die an den Enden auf f_1, bzw. auf f_2 einschränkt. $F^*(E)$ ist dann eine minimale Kan-Faserung über $B' \times \Delta^1$, die an den beiden Enden $B' \times \Delta^0$ auf die beiden uns interessierenden Faserungen $f_1^*(E)$ und $f_2^*(E)$ einschränkt.

Um diese beiden zueinander in Beziehung zu setzen, vergleichen wir mit einer anderen minimalen Kan-Faserung über $B' \times \Delta^1$, nämlich dem Produkt $f_1^*(E) \times \Delta^1$; oder, um es etwas genauer zu sagen, der Abbildung

$$(B' \times_B E) \times \Delta^1 \longrightarrow B' \times \Delta^1 ,$$

wo der Pullback mit Hilfe der Abbildung $f_1 : B' \to B$ gebildet ist.

Mit einem kleinen Trick schaffen wir es, diese beiden Faserungen miteinander in Beziehung zu setzen. Nämlich wir denken uns als ein "Liftungs-Problem" das folgende kommutative Diagramm aus:

$$\begin{array}{ccc} B' \times_B E & \longrightarrow & F^*(E) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ (B' \times_B E) \times \Delta^1 & \longrightarrow & B' \times \Delta^1 \end{array}$$

In dem Diagramm sind der untere und der rechte Pfeil die Faser-Projektionen der beiden Kan-Faserungen über $B' \times \Delta^1$, während die beiden anderen Pfeile gegeben sind durch die Inklusion von $f_1^*(E)$ in der einen oder anderen dieser Faserungen.

Die Liftung existiert (Homotopie-Liftungs-Eigenschaft von Kan-Faserungen). Wir bekommen auf die Weise eine Abbildung von Faserungen; d.h., eine Abbildung, derart, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} (B' \times_B E) \times \Delta^1 & \longrightarrow & F^*(E) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ B' \times \Delta^1 & \xrightarrow{=} & B' \times \Delta^1 \end{array}$$

An einem Ende ist diese Abbildung ein Isomorphismus (nämlich die identische Abbildung auf $f_1^*(E)$). Da es sich um minimale Faserungen handelt, schließen wir mit dem vorangegangenen Lemma, daß wir am anderen Ende ebenfalls einen Isomorphismus haben; mithin einen Isomorphismus von $f_1^*(E)$ zu $f_2^*(E)$.

(2) Die Voraussetzung impliziert, nach (1), daß $E \to B$ isomorph ist zu einer anderen Faserung; nämlich zu einer solchen, die zurückgezogen ist entlang einer trivialen Abbildung. Es ist aber klar (oder?), daß dies ein triviales Bündel sein wird.

(3) Sei $\widetilde{E} \to \widetilde{B}$ eine minimale Kan-Faserung. Die Behauptung ist, daß, für jedes n und jede Abbildung $\Delta^n \to \widetilde{B}$, die zurückgezogene Faserung über Δ^n trivialisierbar ist. Dies folgt aus (2), sobald man weiß, daß die identische Abbildung auf Δ^n homotop ist zu einer trivialen Abbildung. Es ist aber klar (oder?), daß das so ist. $\square$

Azyklische Faserungen

Sei $q : Y \to Z$ eine Abbildung von simplizialen Mengen. Sie heißt eine *azyklische Faserung*, wenn
— für jedes Paar von simplizialen Mengen, $A \subset X$, und
— für jedes kommutative Diagramm:

$$(\dagger) \qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

gilt, daß in diesem Diagramm immer eine Liftung existiert: eine Abbildung $X \to Y$, so daß das resultierende Diagramm kommutativ ist.

Die Bedingung in der Definition der azyklischen Faserungen kann man durch eine dem Anschein nach schwächere ersetzen, wo man Liftungen nur für spezielle Paare (X, A) fordert, nämlich für solche vom Typ $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Tatsächlich ist die scheinbar schwächere Bedingung in Wirklichkeit gar nicht schwächer:

Satz. *Eine Abbildung $q : Y \to Z$ ist schon dann eine azyklische Faserung, wenn die Liftungsbedingung für die speziellen Paare $\partial\Delta^n \subset \Delta^n$ erfüllt ist,* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis. Sei ein Liftungs-Diagramm $(\dagger)$ gegeben. Es sei X' eine simpliziale Menge zwischen A und X (das heißt, $A \subset X' \subset X$) zusammen mit einer "partiellen Liftung": einer Abbildung $\eta : X' \to Y$ derart, daß das resultierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{Id}_Y \\ X' & \xrightarrow{\ \eta\ } & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

kommutativ ist. A selbst (zusammen mit der vorgegebenen Abbildung zu Y) ist dafür ein Beispiel. Wir nehmen nun an (wir dürfen das, wegen "Zorn's Lemma"), daß (X', η) 'maximal' ist in bezug auf diese Eigenschaft. Es stellt sich heraus, daß dann schon $X' = X$ ist. Denn angenommen, X' wäre kleiner. Sei x ein Simplex von X, das nicht in X' liegt; und zwar sei x so gewählt, daß seine Dimension, n, möglichst klein ist. Es ist dann x ein nicht-ausgeartetes Simplex, und seine charakteristische Abbildung, $\overline{x}$, bildet den Rand von Δ^n in die Unter-simpliziale-Menge X' ab. $\overline{x}$ gibt also Anlaß zu einer Abbildung von Paaren $\overline{x} : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (X, X')$ und deshalb, per Komposition, auch zu einer Abbildung $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (Z, Y)$.

Wir nutzen nun die Hypothese, daß die Liftungsbedingung (†) für $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ erfüllt ist; dies gibt eine kompatible Abbildung $\Delta^n \to Y$. Per Zusammenkleben resultiert daraus eine Abbildung $X' \cup_{\partial\Delta^n} \Delta^n \to Y$, die ebenfall eine partielle Liftung ist. Das ist ein Widerspruch zu der vorausgesetzten Maximalität von X'. □

Jede azyklische Faserung ist eine Kan-Faserung: Das liegt schlicht daran, daß die Trichter-Füllungen bei den Inklusionen $A \subset X$ zur Konkurrenz zugelassen sind.

Darüberhinaus hat eine azyklische Faserung $q : Y \to Z$ auch die Eigenschaft, daß Z starker Deformationsretrakt von Y ist. Denn über die folgenden beiden Liftungs-Diagramme bekommt man erstens einen Schnitt $i : Z \to Y$ von $q : Y \to Z$ und zweitens dann eine Homotopie von der Abbildung $i \circ q$ zu der identischen Abbildung auf Y:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{=} & Z \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} Y\times 0 \ \dot\cup\ Z & \xrightarrow{\mathrm{Id}\ \dot\cup\ i} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y\times\Delta^1 \cup_{Y\times 1} Z & \xrightarrow{q\circ \mathrm{pr}_1 \cup \mathrm{Id}} & Z \end{array}$$

Wir verzichten hier auf die Diskussion dessen, wie weit azyklische Faserungen durch Eigenschaften dieser Art schon charakterisiert sind. Die Begriffsbildung dient uns zur Formulierung des folgenden Lemmas, das wir unten benutzen werden:

Lemma. *Sei $p : E \to B$ eine Kan-Faserung. Die Abbildung p läßt sich schreiben als eine Komposition $p = \overline{p} \circ q$, wo q eine azyklische Faserung ist, und $\overline{p}$ eine minimale Kan-Faserung.*

Beweis. Wie wir gesehen haben, so gibt es eine minimale Kan-Faserung $\overline{p} : \overline{E} \to B$, die starker Deformationsretrakt von p ist. Das heißt, es gibt eine Inklusion $j : \overline{E} \to E$ und eine Projektion $q : E \to \overline{E}$ (beide über B), so daß $q \circ j = \mathrm{Id}_{\overline{E}}$ und so daß eine Homotopie H (auch über B) existiert, von der identischen Abbildung auf E zu der Abbildung $j \circ q$; wobei die Homotopie noch relativ zu $\overline{E}$ ist (also $H \,|\, \overline{E}\times\Delta^1 = j \circ \mathrm{pr}_1$):

$$\begin{array}{ccccc} \overline{E} & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{q} & \overline{E} \\ {\scriptstyle \overline{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} \\ B & \xrightarrow[=]{} & B & \xrightarrow[=]{} & B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} E\times\Delta^1 & \xrightarrow{H} & E \\ {\scriptstyle p\circ \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \xrightarrow[=]{} & B \end{array}$$

Wir werden uns jetzt davon überzeugen, daß die Abbildung $q \colon E \to \overline{E}$ automatisch schon eine azyklische Faserung ist. Sei, zum Test, ein Liftungs-Diagramm gegeben:

$$
(*) \qquad \begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "q"] \\ \Delta^n \arrow[r, "v"'] & \overline{E} \end{tikzcd}
$$

Durch die Komposition mit der Abbildung $\overline{p} : \overline{E} \to B$ einerseits und mit der Abbildung $j \circ q : E \to E$ andererseits bekommen wir hieraus zwei andere Liftungs-Diagramme:

$$
\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\overline{p} \circ v"'] & B \end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd} \partial\Delta^n \arrow[r, "j \circ q \circ u"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r, "\overline{p} \circ v"'] & B \end{tikzcd}
$$

Das zweite von diesen Diagrammen hat eine Liftung. Nämlich wegen $\overline{p} = p \circ j$ und $v \circ i = q \circ u$, ist die Abbildung $j \circ v : \Delta^n \to E$ eine solche Liftung.

Die obige Homotopie H, von der identischen Abbildung zu der Abbildung $j \circ q$, kann aufgefaßt werden als eine Homotopie von dem ersten dieser Diagramme zu dem zweiten (da ja die Homotopie eine *Homotopie über* B ist). Per Homotopie-Erweiterung über B (angewandt auf die Liftung mit der "rückwärts zu lesenden" Homotopie H) resultiert, daß auch das erste Diagramm eine Liftung hat; diese heiße $w : \Delta^n \to E$.

Es ist nun eine ganz erstaunliche Tatsache, daß die Abbildung w automatisch auch eine Liftung für das Diagramm $(*)$ ist. Zum Nachweis von dieser Behauptung ist die Kommutativität des unteren Dreiecks in dem ergänzten Diagramm nachzuprüfen; oder, was auf dasselbe hinausläuft: es ist zu zeigen, daß die beiden Abbildungen $q \circ w : \Delta^n \to \overline{E}$ und $v : \Delta^n \to \overline{E}$ in Wirklichkeit dieselben sind.

Wegen der Minimalität der Faserung $\overline{p} : \overline{E} \to B$ werden wir wissen, daß diese beiden Abbildungen übereinstimmen, sobald wir nur wissen, daß sie zueinander homotop sind, über B, mit einer Homotopie, die auf dem Rand konstant ist. Eine solche Homotopie werden wir nun konstruieren.

Das geht mit dem üblichen Trick, eine geeignete Liftungs-Aufgabe zu erfinden. Es wird eine Abbildung von $\Delta^n \times \square = \Delta^n \times \Delta^1 \times \Delta^1$ zu $\overline{E}$ (indirekt) angegeben als die Lösung einer Homotopie-Liftungs-Aufgabe (für Abbildungen $\Delta^n \times \Delta^1 \to \overline{E}$ über B); dabei ist die gesuchte 'Liftung' sowohl auf $\partial\Delta^n \times \square$ als auch auf $\Delta^n \times \sqsubset$ vorgegeben.

Als Vorgabe auf $\partial\Delta^n \times \square$ nehmen wir die Abbildung:

$$
(\partial\Delta^n \times \Delta^1) \times \Delta^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}} \partial\Delta^n \times \Delta^1 \xrightarrow{u \times \mathrm{Id}} E \times \Delta^1 \xrightarrow{H} E \xrightarrow{q} \overline{E}
$$

(wo 'pr' die Projektion weg von dem letzten Faktor bezeichnet, den wir uns in '$\square$' als den "vertikalen" Faktor vorstellen wollen). Auf den drei Teilen von $\Delta^n \times \sqsubset$ ist:

(oben): die Homotopie aus der Definition von w, gefolgt von der Abbildung q ;
(links): die 'konstante' Homotopie $\Delta^n \times \Delta^0 \times \Delta^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}} \Delta^n \xrightarrow{w} E \xrightarrow{q} \overline{E}$;
(unten): die Homotopie $\Delta^n \times \Delta^1 \ (\times \Delta^0) \xrightarrow{w \times \mathrm{Id}} E \times \Delta^1 \xrightarrow{H} E \xrightarrow{q} \overline{E}$. $\square$

Satz. *Die geometrische Realisierung einer Kan-Faserung ist eine Serre-Faserung.*

Beweis. Nach dem vorangegangenen Lemma kann eine vorgegebene Kan-Faserung, p, geschrieben werden als eine Komposition von einer azyklischen Faserung, q, und einer minimalen Kan-Faserung, $\overline{p}$. Nun ist es klar (oder?), daß die Zusammensetzung zweier Serre-Faserungen wieder eine Serre-Faserung ist. Wir werden also wissen, daß $|p| = |\overline{p} \circ q|$ eine Serre-Faserung ist, sobald wir wissen, daß $|\overline{p}|$ und $|q|$ es sind.

Den Fall einer minimalen Kan-Faserung haben wir früher schon behandelt: Es wurde gezeigt, daß eine minimale Kan-Faserung ein lokal-triviales Bündel ist; und es wurde skizziert, daß bei einem lokal-trivialen Bündel die geometrische Realisierung ebenfalls lokal-trivial ist (zumindest im "kompakt-erzeugten" Sinne); und, folglich, auch eine Serre-Faserung.

Es bleibt zu zeigen, daß die geometrische Realisierung einer azyklischen Faserung $q : X \to Y$ eine Serre-Faserung ist. Das geht mit einem kleinen Trick. Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "="] \arrow[d, "\mathrm{Id} \times q"'] & X \arrow[d, "q"] \\ X \times Y \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

Wegen der Injektivität von $X \xrightarrow{\mathrm{Id} \times q} X \times Y$, ist das Diagramm ein akzeptables Liftungs-Diagramm für die azyklische Faserung $q : X \to Y$. Es existiert also eine Liftung: eine Abbildung $l : X \times Y \to X$, die das resultierende Diagramm kommutativ macht.

Das ergänzte Diagramm, etwas anders betrachtet, ist nun ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Id} \times q"] \arrow[d, "q"'] & X \times Y \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[d, "q"'] \\ Y \arrow[r, "="'] & Y \arrow[r, "="'] & Y \end{tikzcd}$$

und die obere zusammengesetzte Abbildung in dem Diagramm ist die identische Abbildung auf X. Wir haben herausgefunden, daß die Abbildung q ein Retrakt von der Projektions-Abbildung pr_2 in dem Diagramm ist.

Die geometrische Realisierung der Projektions-Abbildung, $|\mathrm{pr}_2| : |X \times Y| \to |Y|$, ist (zumindest im "kompakt-erzeugten" Sinne) selbst eine Projektions-Abbildung (wie im Zusammenhang mit den lokal-trivialen Bündeln besprochen); und damit auch eine Serre-Faserung.

Der Retrakt $|q|$ von $|\mathrm{pr}_2|$ ist folglich ebenfalls eine Serre-Faserung. $\square$

Azyklisches Beispiel

Die Erweiterungs-Bedingung kann, wie wir wissen, erzwungen werden durch den Prozeß des "Trichter-Füllens". Diese Konstruktion ändert nicht den Homotopietyp der geometrischen Realisierung; z.B. eine Inklusion $Y \to Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$ induziert eine Homotopieäquivalenz $|Y| \to |Y| \cup_{|\Lambda_i^n|} |\Delta^n|$.

Daß das Trichter-Füllen nicht den Homotopietyp ändert, gilt zu einem gewissen Grad auch im simplizialen Kontext selbst:

Satz. *E und E' seien Kan-Komplexe. E' entstehe aus E durch Trichterfüllen. Dann ist E starker Deformationsretrakt von E'.*

Von diesem Sachverhalt benötigen wir den Fall $E = \Delta^0$:

Korollar. *E' sei Kan-Komplex und entstehe aus Δ^0 durch Trichterfüllen. Dann ist E' azyklischer Kan-Komplex.*

Beweis des Korollars. Daß E' azyklischer Kan-Komplex ist, bedeutet, nach Definition, daß die Abbildung $E' \to \Delta^0$ azyklische Faserung in dem früher besprochenen Sinne ist; oder, im Klartext: für jede Inklusion von simplizialen Mengen $K \subset L$ und jede Abbildung $K \to E'$ existiert eine Erweiterung dieser Abbildung auf L.

Sei eine solche Abbildung $K \to E'$ gegeben. Nach dem Satz existiert eine Homotopie der identischen Abbildung auf E' zu einer trivialen Abbildung; folglich auch eine Homotopie der Abbildung $K \to E'$ zu einer trivialen Abbildung. Diese triviale Abbildung kann zu einer trivialen Abbildung auf L erweitert werden. Mit Hilfe der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft für Abbildungen in einen Kan-Komplex schließen wir, daß auch die ursprüngliche Abbildung $K \to E'$ zu einer Abbildung von L erweitert werden kann. □

Beweis des Satzes. Es wird genügen, die folgende Behauptung zu zeigen: $K \subset L$ sei eine Inklusion von simplizialen Mengen, wo L aus K durch Trichterfüllen entsteht. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ L & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Dann existiert eine Homotopie, relativ K, von der Abbildung $L \to E'$ zu einer Abbildung nach E.

Der Satz resultiert als der Spezialfall der Behauptung, wo die horizontalen Abbildungen in dem Diagramm die identischen Abbildungen auf E und E' sind.

Statt des allgemeinen Falles dieser Behauptung wird es genügen, den Fall einer einzigen Trichter-Füllung zu behandeln. Denn damit kann man den allgemeinen Fall bekommen mit Hilfe von Induktion und (eventuell unendlicher) Wiederholung.

Wir können also annehmen, daß $L = K \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$. Es wird sogar genügen, den ganz speziellen Fall $K = \Lambda_i^n$ zu behandeln. Denn aus diesem ganz speziellen Fall kommt man auf den Fall eines allgemeinen K durch "Zusammenkleben".

Das fragliche Diagramm lautet jetzt:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist E ein Kan-Komplex. Es existiert also eine Abbildung $\Delta^n \to E$, die die Abbildung $\Lambda_i^n \to E$ erweitert.

Die beiden Abbildungen $\Delta^n \to E'$ und die konstante Homotopie auf Λ_i^n ergeben zusammen eine Abbildung

$$\Delta^n \times 0 \ \cup \ \Lambda_i^n \times \Delta^1 \ \cup \ \Delta^n \times 1 \ \longrightarrow \ E' \ .$$

Auch E' ist nach Voraussetzung ein Kan-Komplex. Wegen des nachfolgenden Lemmas läßt sich die Abbildung folglich zu der gewünschten Homotopie

$$\Delta^n \times \Delta^1 \ \longrightarrow \ E'$$

erweitern. □

Lemma. $\Delta^n \times \Delta^1$ *entsteht aus* $\Delta^n{\times}0 \cup \Lambda_i^n{\times}\Delta^1 \cup \Delta^n{\times}1$ *durch Trichter-Füllen.*

Beweis. Das ist eine Variante von dem früher behandelten Sachverhalt, daß $\Delta^n \times \Delta^1$ durch Trichter-Füllen entsteht aus $\Delta^n \times 0 \cup \partial\Delta^n \times \Delta^1$. Dort hatten wir überlegt, daß man aus dem Prisma $\Delta^n \times \Delta^1$ die $(n{+}1)$-Simplizes, $n{+}1$ an der Zahl, der Reihe nach "ab-baut" (wegläßt), beginnend mit dem obersten.

Wir machen es hier genauso; mit den folgenden Änderungen:

Der Deckel von dem Prisma (d.h. $\Delta^n{\times}1$) steht hier als "freie Seite" nicht zur Verfügung. Die freie Seite für das *erste* wegzulassende Simplex wird deshalb eine n-dimensionale Seite sein, die in der wegzulassenden Seitenwand von dem Prisma liegt (der Seitenwand über der nicht in Λ_i^n vorkommenden i-ten Seite von Δ^n). Von den $(n{+}1)$-Simplizes haben alle bis auf eines eine n-dimensionale Seite mit der fraglichen Seitenwand gemeinsam. Das oberste $(n{+}1)$-Simplex nun steht immer als 'erstes' zur Verfügung, es sei denn, es ist $i = 0$; in dem Fall vertauscht man 'oben' und 'unten'.

Beginnend mit dem ersten, werden die $(n{+}1)$-Simplizes der Reihe nach von oben nach unten abgebaut. — Zum Schluß gibt es noch die Reste von der Seitenwand (von den n-dimensionalen Simplizes sind $n{-}1$ der ursprünglich n noch da). Die baut man auch noch ab. □

Simpliziale Approximation

Gegeben Simplizialkomplexe (oder simpliziale Mengen) und eine stetige Abbildung zwischen deren unterliegenden topologischen Räumen (bzw. geometrischen Realisierungen), so möchte man wissen, daß die vorgegebene Abbildung "approximiert" werden kann durch eine "bessere" Abbildung; nämlich eine solche, die mit der zusätzlichen Struktur kompatibel ist.

Wegen der 'Starrheit' simplizialer Strukturen gibt es im allgemeinen nicht so viele Abbildungen, wie man bräuchte. Für die Gültigkeit des Approximations-Satzes ist es deshalb notwendig, eine zusätzliche Voraussetzung zu machen: man fordert die *Erweiterungs-Bedingung* (für das Ziel der Abbildung).

Es bezeichne $|X|$ die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge X.

Satz. *Sei X eine simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Es sei $K \subset L$ ein Paar von simplizialen Mengen, und es seien Abbildungen*

$$K \xrightarrow{f} X \quad , \qquad |L| \xrightarrow{g} |X|$$

vorgegeben, derart, daß die Einschränkungen von $|f|$ und g auf $|K|$ übereinstimmen. Dann existiert eine Abbildung von simplizialen Mengen,

$$L \xrightarrow{f'} X \ ,$$

so daß die geometrische Realisierung der Abbildung f' homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu der Abbildung g.

Man kann die Sache auch so ausdrücken. Eine Abbildung $|L| \xrightarrow{g'} |X|$ werde als "realisiert" bezeichnet, wenn eine Abbildung von simplizialen Mengen existiert, $L \to X$, deren geometrische Realisierung die Abbildung g' ist (eine solche Abbildung ist eindeutig bestimmt, aber sie muß im allgemeinen natürlich nicht existieren). Die Erweiterungs-Bedingung garantiert (das sagt der Satz), jede Abbildung $g \colon |L| \to |X|$ ist zumindest homotop zu einer realisierten Abbildung; und zwar sogar homotop relativ zu einer vorgegebenen Realisierung auf einem Unterraum $|K|$.

Korollar. *X sei simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Dann ist X ein starker Deformationsretrakt von $\mathrm{S}|X|$, dem singulären Komplex der geometrischen Realisierung.*

Beweis. Das resultiert aus dem Satz, angewandt auf Abbildungen, die man aus der Adjungiertheit der beiden Funktoren $|-|$ (geometrische Realisierung) und $\mathrm{S}(-)$ (singulärer

Komplex) bekommt. Die Adjungiertheit der Funktoren bedeutet, wie sonst auch, daß, für simpliziale Mengen X und topologische Räume W, ein natürlicher Isomorphismus besteht:

$$\mathrm{Hom}_{\,\text{top.Räume}}\,(\,|X|\,,\,W\,)\quad\cong\quad\mathrm{Hom}_{\,\text{simp.Mengen}}\,(\,X\,,\,\mathrm{S}(W)\,)\ .$$

Insbesondere hat man die beiden sogenannten *Adjunktions-Transformationen*. Nämlich über den Isomorphismus der Hom-Mengen entspricht der identischen Abbildung auf $|X|$ eine Abbildung

$$X\ \longrightarrow\ \mathrm{S}|X|\ ,$$

und der identischen Abbildung auf $\mathrm{S}(W)$ entspricht, ähnlich, eine Abbildung

$$|\,\mathrm{S}(W)\,|\ \longrightarrow\ W\ .$$

Der Hom-Mengen-Isomorphismus läßt sich aus den Adjunktions-Transformationen rekonstruieren: einer Abbildung $f\colon |X|\to W$ ist die zusammengesetzte Abbildung

$$X\longrightarrow \mathrm{S}|X|\xrightarrow{\ \mathrm{S}(f)\ }\mathrm{S}(W)$$

zugeordnet; und einer Abbildung $g\colon X\to \mathrm{S}(W)$ ist, ähnlich, die Abbildung

$$|X|\xrightarrow{\ |g|\ }|\mathrm{S}(W)|\longrightarrow W$$

zugeordnet.

Insbesondere (man nimmt für $g\colon X\to \mathrm{S}|X|$ die eine Adjunktions-Transformation) bekommt man so, daß die aus den beiden Adjunktionstransformationen zusammengebaute Abbildung

$$|X|\ \longrightarrow\ |\,\mathrm{S}|X|\,|\ \longrightarrow\ |X|$$

gleich der identischen Abbildung auf $|X|$ ist. Wir haben, folglich, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |X| & \xrightarrow{\ =\ } & |X| \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{=} \\ |\,\mathrm{S}|X|\,| & \longrightarrow & |X| \end{array}$$

auf das wir den Satz anwenden können. Wir schließen, daß eine Homotopie existiert, relativ zu dem Unterraum $|X|$, von der Abbildung $|\,\mathrm{S}|X|\,|\to|X|$ zu der geometrischen Realisierung einer Abbildung $\mathrm{S}|X|\to X$.

Die Homotopie ist eine Abbildung $|\,\mathrm{S}|X|\times\Delta^1\,|\ \cong\ |\,\mathrm{S}|X|\,|\times[0,1]\ \xrightarrow{\ h\ }\ |X|$. Per Adjunktion entspricht ihr eine Abbildung

$$\mathrm{S}|X|\times\Delta^1\ \longrightarrow\ \mathrm{S}|X|\ .$$

Das ist die im Korollar behauptete Homotopie. Denn daß diese Homotopie die gewünschten Eigenschaften hat, kann man daraus sehen, daß die Homotopie, als eine adjungierte Abbildung, ja beschreibbar ist als die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathrm{S}|X|\times\Delta^1\ \longrightarrow\ \mathrm{S}|\,\mathrm{S}|X|\times\Delta^1\,|\ \xrightarrow{\ \mathrm{S}(h)\ }\ \mathrm{S}|X|\ .$$

□

Korollar (Kombinatorische Beschreibung von Elementen von Homotopiegruppen). *Sei X simpliziale Menge, mit Basispunkt $x_0 : \Delta^0 \to X$. Es sei vorausgesetzt, daß X die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Jedes Element von $\pi_n(\,|X|\,,\,|x_0|\,)$ ist repräsentierbar durch eine Abbildung*

$$\alpha : \ (\,\Delta^n\,,\,\partial\Delta^n\,) \ \longrightarrow \ (\,X\,,\,x_0\,) \ .$$

Ein solches Element ist dann, und nur dann, trivial, wenn die Abbildung $\alpha : \Delta^n \to X$ sich fortsetzen läßt zu einer Abbildung $\widetilde{\alpha} : \Delta^{n+1} \to X$, mit α als der Abbildung der letzten Seite, und wo alle anderen Seiten in den Basispunkt x_0 abgebildet werden.

Beweis. Ein Element von $\pi_n(\,|X|\,,\,|x_0|\,)$ ist, nach Definition, repräsentierbar durch eine Abbildung

$$(\,|\Delta^n|\,,\,|\partial\Delta^n|\,) \ \longrightarrow \ (\,|X|\,,\,|x_0|\,) \ .$$

Nach dem Satz ist die Abbildung homotop, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, zu einer "realisierten" Abbildung. Das gibt die Abbildung α.

Wenn die Abbildung α das triviale Element repräsentiert, dann gibt es eine Erweiterung der Abbildung $|\alpha|$ zu einer Abbildung

$$(\ |\Delta^{n+1}|\ ,\ |\Lambda^{n+1}_{n+1}|\ ) \ \longrightarrow \ (\,|X|\,,\,|x_0|\,) \ .$$

Nach dem Satz ist die Abbildung homotop, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^{n+1}|$, zu einer "realisierten" Abbildung. Das gibt die Abbildung $\widetilde{\alpha}$. □

Lemma. *Für den Beweis des Satzes genügt es, den Spezialfall*

$$(L, K) \ = \ (\Delta^n, \partial\Delta^n) \quad , \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \, ,$$

zu behandeln.

Beweis. Wir nehmen diesen Spezialfall hier als gegeben an und zeigen, wie daraus der allgemeine Fall des Satzes folgt.

Bezeichne L^n das n-Skelett von L, relativ zu K; also die Unter-simpliziale-Menge von L, die erzeugt ist von den Simplizes der Dimension $\leq n$, zusammen mit denjenigen von K. Eine auf $|L|$ definierte Abbildung g entspricht einem kompatiblen System $\{g_n\}$ von Abbildungen auf den $|L^n|$, und die Abbildung g wird "realisiert" sein dann, und nur dann, wenn die g_n es alle sind; ähnlich auch entspricht eine Homotopie von auf $|L|$ definierten Abbildungen einem kompatiblen System solcher Homotopien für die $|L^n|$. Es wird folglich genügen, geeignete kompatible Systeme anzugeben.

Sei $n \geq 0$. Es werde, induktiv, angenommen, daß bis $n{-}1$ einschließlich solche Systeme schon konstruiert sind; oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß die eingeschränkte Abbildung $g \,\big|\, |L^{n-1}|$ schon deformiert wurde zu einer "realisierten" Abbildung. Per Homotopie-Erweiterung für die Inklusion von CW-Komplexen $|L^{n-1}| \subset |L|$ können wir annehmen, daß nicht nur die eingeschränkte Abbildung, sondern auch die Abbildung g selbst entsprechend deformiert wurde; wir behalten die Bezeichnung g für die Abbildung.

Es ist
$$L^n \;=\; L^{n-1} \cup_{J_n \times \partial\Delta^n} J_n \times \Delta^n \ ,$$
wo die Indexmenge J_n gegeben ist durch die Menge der nicht-ausgearteten n-Simplizes von L, soweit diese nicht in K liegen. Für einen solchen Index $j \in J_n$ bezeichne $\chi_j : \Delta^n \to L$ die zugehörige charakteristische Abbildung. Die resultierende zusammengesetzte Abbildung
$$|\Delta^n| \xrightarrow{|\chi_j|} |L| \xrightarrow{g} |X|$$
hat als ihre Einschränkung die Abbildung $|\partial\Delta^n| \xrightarrow{|\chi_j|} |L^{n-1}| \xrightarrow{g} |X|$, die, nach Induktions-Hypothese, eine "realisierte" Abbildung ist. Nach dem Spezialfall des Satzes, den wir hier als gegeben annehmen, existiert deshalb eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, von der Abbildung $g\circ|\chi_j|$ zu einer ebenfalls "realisierten" Abbildung.

Die resultierende Homotopie von der Abbildung auf der disjunkten Vereinigung,
$$\left| \textstyle\coprod_{j\in J_n} \Delta^n \right| \xrightarrow{\ |\coprod_{j\in J_n} \chi_j|\ } |L| \xrightarrow{\quad g \quad} |X| \ ,$$
zusammen mit der konstanten Homotopie auf $|L^{n-1}|$, liefert, per Zusammenkleben, eine Homotopie, relativ zu dem Unterraum $|L^{n-1}|$, von der (vorher schon etwas modifizierten) Abbildung g, eingeschränkt auf $|L^n|$, zu der gewünschten "realisierten" Abbildung g_n. Der Induktions-Schritt ist damit fertig. $\square$

Beweis des Satzes. Mit dem vorangegangenen Lemma haben wir uns darauf zurückgezogen, den Satz in der folgenden Form zu zeigen:

Sei X eine simpliziale Menge, die die Erweiterungs-Bedingung erfüllt. Seien Abbildungen
$$\partial\Delta^n \xrightarrow{f} X \quad , \qquad |\Delta^n| \xrightarrow{g} |X|$$
gegeben, derart, daß die Einschränkungen von $|f|$ und g auf $|\partial\Delta^n|$ übereinstimmen. Dann existiert eine Abbildung von simplizialen Mengen,
$$\Delta^n \xrightarrow{f'} X \ ,$$
so daß die geometrische Realisierung der Abbildung f' homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, zu der Abbildung g.

Der Fall $n = 0$. In dem Fall ist $\partial\Delta^n$ nicht da, $g(|\Delta^n|)$ ist ein Punkt in $|X|$, und die Behauptung ist, daß dieser Punkt in eine 0-Zelle (geometrische Realisierung von einem 0-Simplex) deformiert werden kann. Es ist klar (oder?), daß das geht.

Der Fall $n \geq 1$. Bei der Behandlung dieses Falles werden wir, induktiv, voraussetzen, daß die Angelegenheit für $n{-}1$ schon geklärt ist.

Für einen sogleich durchzuführenden Trick ist es angebracht, eine zusätzliche Voraussetzung technischer Art über die Abbildung $f : \partial\Delta^n \to X$ zu machen. Diese Voraussetzung ist, daß mindestens eine der Seiten von Δ^n, sagen wir die 0-te, von der Abbildung f *trivial* abgebildet wird.

Die zusätzliche Voraussetzung ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Denn zunächst ist die Abbildung $\Delta^{n-1} \to X$ (die Einschränkung von f auf die 0-te Seite) homotop zu einer trivialen Abbildung (dies benutzt nicht einmal die Erweiterungs-Bedingung). Da nun X die Erweiterungs-Bedingung erfüllt, sind wir in der Lage, "Homotopie-Erweiterung" für Abbildungen nach X zu zitieren; es existiert also eine Homotopie von f, die die genannte Homotopie erweitert. Schließlich existiert auch eine Erweiterung der induzierten Homotopie von $|f|$ zu einer Homotopie der Abbildung g. — Nachdem mit dem noch zu beschreibenden Argument die Existenz einer Homotopie, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, von g zu einer "realisierten" Abbildung etabliert ist, werden die Hilfs-Homotopien rückgängig gemacht; dabei ist wieder "Homotopie-Erweiterung" für Abbildungen nach X zu benutzen.

Im übrigen ist es keine zusätzliche Mühe, nicht nur die 0-te Seite trivial abzubilden, sondern auch die Vereinigung davon mit der 0-ten Ecke (denn diese beiden werden offenbar in dieselbe Zusammenhangskomponente von X abgebildet). Diese Modifikation wollen wir auch noch machen.

Nun zum Argument. Als einen *Basispunkt* $x_0 : \Delta^0 \to X$ wählen wir dasjenige 0-Simplex, in das die Abbildung f die 0-te Seite von Δ^n abbildet (und die 0-te Ecke auch). Das zu beschreibende induktive Argument beruht darauf, daß man aus der Inklusion des Basispunktes eine Kan-Faserung $p\colon E \to X$ machen kann:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^0 & \xrightarrow{\;i\;} & E \\ \big\downarrow & & \big\downarrow p \\ X & \xrightarrow[=]{} & X \end{array}$$

Wir möchten die Abbildung f gegen die Kan-Faserung p liften. Dazu liften wir zunächst zumindest einen großen Teil davon:

Behauptung. *Die eingeschränkte Abbildung* $\Lambda^n_0 \xrightarrow{\text{Inkl}} \partial\Delta^n \xrightarrow{f} X$ *hat eine Liftung zu einer Abbildung* $\widetilde{f} : \Lambda^n_0 \to E$.

Beweis. Zunächst liftet man die Ecke Nr. 0 von Δ^n. Das geht, weil diese Ecke in den Basispunkt abbildet (das haben wir oben so eingerichtet), und weil sicherlich das Urbild unter p von dem Basispunkt x_0 nicht-leer ist.

Anschließend wird f der Reihe nach auf den $(n{-}1)$-Simplizes geliftet, die den Trichter Λ^n_0 ausmachen. Dabei hat man jedesmal, was wir früher bezeichnet haben als eine verallgemeinerte Trichter-Füllungs-Aufgabe vom Typ V^{n-1}_0: die Aufgabe ist, die Abbildung auf dem Simplex Δ^{n-1} zu liften, relativ zu einer vorgegebenen Liftung auf einer Vereinigung von Unter-Simplizes, deren jedes die Ecke Nr. 0 enthält.

Im Falle von der ersten Seite (das ist hier tatsächlich die Seite mit der Nr. 1), besteht die genannte Vereinigung von Unter-Simplizes nur aus der 0-ten Ecke. Im Falle der zweiten Seite hat man den Durchschnitt der zweiten Seite mit der ersten. Und so weiter. $\square$

Behauptung. *Die Abbildung* $g : |\Delta^n| \to |X|$ *hat eine Liftung* $\widetilde{g} : |\Delta^n| \to |E|$, *die die geometrische Realisierung der Abbildung* $\widetilde{f} : \Lambda_0^n \to E$ *erweitert.*

Beweis. Wir wissen, daß die geometrische Realisierung der Kan-Faserung $p : E \to X$ eine Serre-Faserung ist. □

Behauptung. *Die Abbildung* $\widetilde{g} : |\Delta^n| \to |E|$ *kann deformiert werden* (mit einer Homotopie relativ zu dem Unterraum $\widetilde{g}(|\Lambda_0^n|)$; und über $|X|$) *zu einer Abbildung* $\overline{g} : |\Delta^n| \to |E|$, *deren Einschränkung auf den gesamten Rand* $|\partial\Delta^n|$ *"realisiert" ist.*

Beweis. Es ist in der Rechtfertigung dieser Behauptung, wo wir den Induktions-Schritt von $n{-}1$ auf n machen. Es bezeichne dazu F die Faser der Kan-Faserung $p : E \to X$ über dem Basispunkt x_0,

$$F \;=\; E \times_X \Delta^0 \, .$$

Es ist klar (oder?), daß F die Erweiterungs-Bedingung erfüllt.

Der Witz des Arguments ist nun, daß die Einschränkung von $\widetilde{g}$ auf die 0-te Seite von $|\Delta^n|$ ganz in $|F|$ hinein abbildet: das liegt an unserer technischen Voraussetzung, daß die 0-te Seite von Δ^n durch die Abbildung f ganz in den Basispunkt abgebildet werden sollte. Die Einschränkung von $\widetilde{g}$ auf den Rand dieser 0-ten Seite ist eine "realisierte" Abbildung: sie ist die geometrische Realisierung von der Abbildung $\widetilde{f}$, eingeschränkt auf den 'Rand' des Trichters Λ_0^n.

Also können wir, per Induktions-Voraussetzung, unseren Satz anwenden, um zu schließen, daß die Einschränkung von $\widetilde{g}$ auf die 0-te Seite von $|\Delta^n|$ homotop ist, relativ Rand, zu einer "realisierten" Abbildung. Aus dieser Homotopie erhalten wir, per Homotopie-Erweiterung, eine Homotopie (relativ zu dem Unterraum $\widetilde{g}(|\Lambda_0^n|)$; und über $|X|$) von der Abbildung $\widetilde{g}$ zu der gewünschten Abbildung $\overline{g}$. □

Abschluss des Beweises. Es bezeichne $\overline{f} : \partial\Delta^n \to E$ die Abbildung, deren geometrische Realisierung die Abbildung $\overline{g}\,\big|\,|\partial\Delta^n|$ ist ($\overline{f}$ existiert nach Definition dessen, was es heißt, daß die letztere Abbildung eine "realisierte" Abbildung ist). Die Abbildung $\overline{f}$ hat die Eigenschaft, daß ihre Komposition mit der Faser-Projektion p gleich der ursprünglichen Abbildung f ist.

Wir benutzen nun, daß die Inklusion $i : \Delta^0 \to E$ eine *Homotopie-Äquivalenz* in einem sehr starken Sinne ist: Es ist nicht nur Δ^0 starker Deformationsretrakt von E nach der geometrischen Realisierung. Sondern Δ^0 ist auch starker Deformationsretrakt von E im simplizialen Sinne: E ist "azyklischer Kan-Komplex".

Es folgt, daß die Abbildung $\overline{f}$ erweitert werden kann zu einer Abbildung $\overline{f}\,'$; und daß $|\overline{f}\,'|$ homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|\partial\Delta^n|$, zu der Abbildung $\overline{g}$.

Die Projektion von $\overline{f}\,'$ (das heißt, die Komposition davon mit p) ist nun die gewünschte Abbildung f'. Und die Projektion der Homotopie ist die gewünschte Homotopie von $|f'|$ zu g. □

Für Simplizialkomplexe gibt es eine Version des Approximations-Satzes, die nicht auf die Erweiterungs-Bedingung verweist, sondern stattdessen auf die Möglichkeit, einen der beteiligten Komplexe (die Quelle der Abbildung) zu *unterteilen*.

Bei früherer Gelegenheit haben wir diskutiert, wie ein Simplizialkomplex, zumindest nachdem man ihn 'angeordnet' hat, als ein Spezialfall einer simplizialen Menge aufgefaßt werden kann (die Konstruktion des "Hinzunehmens ausgearteter Simplizes"). Die auf solche Weise entstehenden simplizialen Mengen sind untypisch insofern, als sie sowohl "endlich" als auch "nicht-singulär" sind im Sinne der beiden folgenden Definitionen (von denen die erste für uns nicht neu ist):

Definition. Eine simpliziale Menge ist *endlich*, wenn es nur endlich viele nicht-ausgeartete Simplizes gibt.

Definition. Eine simpliziale Menge ist *nicht-singulär*, wenn gilt: für jedes nicht-ausgeartete Simplex ist die charakterische Abbildung eine injektive Abbildung.

Es ist klar (oder?), daß die charakteristische Abbildung von einem n-Simplex schon dann injektiv sein wird, wenn die $n{+}1$ Ecken von dem Simplex alle verschieden sind.

Beispiele. (1) Der übliche 'Kreis' (je ein nicht-ausgeartetes 0-Simplex und 1-Simplex) ist 'singulär' (d.h. nicht 'nicht-singulär' im Sinne der obigen Definition).

(2) Es gibt einen 'Kreis' mit je zwei nicht-ausgearteten 0-Simplizes und 1-Simplizes. Dieser 'Kreis' ist nicht-singulär, er kommt aber nicht von einem Simplizialkomplex her.

Der "Unterteilungs"-Begriff, den wir hier verwenden, ist eine Variante von dem früheren Begriff der *baryzentrischen Unterteilung*. Er ist Variante in zweifacher Hinsicht:

— es werden nicht alle Simplizes unterteilt;

— die Spezifizierung der Anordnung der Ecken ist anders (und komplizierter).

Sei dazu L eine simpliziale Menge, die endlich und nicht-singulär ist, und $K \subset L$ eine Unter-simpliziale-Menge. Eine *Stern-Unterteilung von L, weg von K*, wird, nach Definition, auf die folgende Weise erhalten: Für ein K', mit $K \subset K' \subset L$, werden die nicht-ausgearteten Simplizes von L, die nicht in K' liegen, *stellar* unterteilt; und zwar in der Reihenfolge aufsteigender Dimension: erst 1, dann 2, usw.; ein Simplex "stellar" zu unterteilen, heißt dabei, es zu ersetzen durch den Kegel auf seinem (schon vorher unterteilten!) Rand. — Die Definition ist bisher insofern unvollständig, als noch zu spezifizieren ist, wie die Eckenanordnung in den Simplizes sein soll (was die simpliziale Struktur festlegt). Es liegt in der Natur der Sache, daß diese Spezifizierung erst später gemacht werden kann (s. unten für die nachzuholenden Details).

Eine *iterierte Stern-Unterteilung von L, weg von K*, entsteht durch endlich viele Wiederholungen dieser Konstruktion (wobei die diversen K' nichts miteinander zu tun haben müssen; außer, daß sie alle K enthalten). Das Resultat der Konstruktion ist eine simpliziale Menge $\overline{L}$ (bis auf die noch nachzuholende Spezifizierung), die auch endlich und nicht-singulär ist, die ebenfalls K enthält, und deren geometrische Realisierung zu derjenigen von L isomorph ist (isomorph relativ zu der identischen Abbildung auf $|K|$).

Satz. *Sei X eine simpliziale Menge. Sei $K \subset L$ ein Paar von endlichen nicht-singulären simplizialen Mengen. Es seien Abbildungen*

$$K \xrightarrow{f} X \quad , \qquad |L| \xrightarrow{g} |X|$$

vorgegeben, derart, daß die Einschränkungen von $|f|$ und g auf $|K|$ übereinstimmen. Es existiert dann $\overline{L}$, eine iterierte Stern-Unterteilung von L, weg von K; und es existiert eine Abbildung von simplizialen Mengen, $f' \colon \overline{L} \to X$, derart, daß die Abbildung

$$|L| \;\approx\; |\overline{L}| \xrightarrow{|f'|} |X|$$

homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu der Abbildung g.

Beweis. Aus dem X machen wir einen Kan-Komplex durch den Prozeß des 'Trichter-Füllens': die früher beschriebene Konstruktion $X \mapsto \Psi(X)$.

[Zur Erinnerung: Es entsteht $\Phi(Z)$ aus Z durch "Füllen aller Trichter"; und es ist definiert $\Phi^n(X) = \Phi(\Phi^{n-1}(X))$, $\Phi^0(X) = X$, und $\Psi(X) = \bigcup_n \Phi^n(X)$.]

Wir können den oben gegebenen Satz dann anwenden auf die zusammengesetzte Abbildung $\widetilde{g}$:

$$|L| \xrightarrow{g} |X| \xrightarrow{\text{Inkl}} |\Psi(X)|$$

Wir erhalten, daß eine Homotopie davon existiert, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu einer 'realisierten' Abbildung $\widetilde{g}'$.

Nun ist $|\Psi(X)| = \bigcup_n |\Phi^n(X)|$ die Vereinigung einer aufsteigenden Folge:

$$|X| \;=\; |\Phi^0(X)| \;\subset\; |\Phi^1(X)| \;\subset\; |\Phi^2(X)| \;\subset\; \cdots$$

und $\widetilde{g}'(|L|)$ ist *kompakt* (wegen der Endlichkeit von L). Es existiert also ein m, so daß schon $\widetilde{g}'(|L|) \subset |\Phi^m(X)|$. Per absteigender Induktion über dieses m folgt der Satz deshalb aus dem folgenden Lemma:

Lemma. *Sei Y eine simpliziale Menge, $K \subset M$ ein Paar von endlichen nicht-singulären simplizialen Mengen, und*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \text{Inkl}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{Inkl}} \\ M & \xrightarrow[\widetilde{f}]{} & \Phi(Y) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Es existiert M', eine Stern-Unterteilung von M, weg von K, und eine Abbildung $f' \colon M' \to Y$ derart, daß die Abbildung

$$|M| \;\approx\; |M'| \xrightarrow{|f'|} |Y| \xrightarrow{\text{Inkl}} |\Phi(Y)|$$

homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K|$, zu der Abbildung $|\widetilde{f}|$.

Beweis. Für den Beweis werden wir so tun, als entstünde $\Phi(Y)$ aus dem Y durch eine einzige Trichter-Füllung (und nicht durch ganz viele gleichzeitig).

[Für das richtige Vorgehen muß man die vielen Trichter-Füllungen durch einen angehängten Index kennzeichnen; und diesen Index dann an viele andere Dinge ebenfalls anhängen. — Alternativ könnte man argumentieren, daß von den Trichter-Füllungen ohnehin nur endlich viele wirklich verwendet werden (wegen der Kompaktheit von $|M|$). Diese endlich vielen kann man dann nacheinander behandeln; was auf eine weitere Induktion hinausläuft. Bei solchem induktiven Vorgehen sollte man allerdings das Wort "Stern-Unterteilung" in der Formulierung des Lemmas ersetzen durch die Worte "iterierte Stern-Unterteilung".]

Statt von $\Phi(Y)$ reden wir also jetzt von $Y^+ = Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$. Die Idee für das weitere Vorgehen ist, die beiden hinzugekommenen Simplizes in Y^+ ihrerseits zu unterteilen; und zwar in der Weise, daß für das durch die Modifikation entstehende Y' nunmehr eine Retraktion in die Unter-simpliziale-Menge Y hinein definiert werden kann. Wenn es nun noch gelingt, eine kompatible Unterteilung M' von M zu finden, so wird man eine Abbildung $M' \to Y'$ haben. Die gesuchte Abbildung kann dann definiert werden als die Komposition $M' \to Y' \to Y$.

Bei der Ausführung der Details treffen wir auf das folgende Problem. Da wir über die Anhefte-Abbildung $\Lambda_i^n \to Y$ nichts voraussetzen können, dürfen wir insbesondere auch nicht annehmen, daß sie eine injektive Abbildung ist. Es kann deshalb sein, daß Y^+ *singulär* ist; selbst dann, wenn Y es nicht ist. 'Singularität' aber ist schlecht für Unterteilung: da Unterteilungen konstruiert werden durch die induktive Behandlung *nicht-ausgearteter* Simplizes, werden wir auf Komplikationen gefaßt sein müssen, wenn wir nicht voraussetzen können, daß ein nicht-ausgeartetes Simplex als Ränder auch nur nicht-ausgeartete Simplizes hat.

Zum Glück läßt dieses spezielle Problem sich sehr leicht umgehen. Was wir anstreben, ist ja nur eine *lokale* Änderung: wir wollen nur solche Simplizes in M unterteilen, die über den beiden neuen Simplizes von Y^+ liegen. Eine Pullback-Konstruktion gibt uns nun die Möglichkeit, uns auf diese 'lokale' Situation zu konzentrieren. Der Witz dabei ist, daß 'Nicht-Singularität' eine automatische Konsequenz sein wird.

Wir definieren $K_0 = M \times_{Y^+} \Lambda_i^n$ und $M_0 = M \times_{Y^+} \Delta^n$. Dann sind K_0 und M_0 nicht-singulär (denn Produkte von nicht-singulären simplizialen Mengen sind wieder nicht-singulär; und Unter-simpliziale-Mengen ebenfalls), und M entsteht aus dem Teil über Y durch Ankleben von M_0 entlang K_0,

$$M \;=\; (M \times_{Y^+} Y) \cup_{K_0} M_0 \;\; .$$

Per 'Zusammenkleben' folgt das Lemma also aus dem folgenden speziellen Fall:

Behauptung. *Seien $K_0 \subset M_0$ endliche nicht-singuläre simpliziale Mengen. Es sei ein kommutatives Diagramm von Abbildungen simplizialer Mengen gegeben:*

$$\begin{tikzcd} K_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\text{Inkl}"'] & \Lambda_i^n \arrow[d, "\text{Inkl}"] \\ M_0 \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & \Delta^n \end{tikzcd}$$

Dann existiert M_0', eine Stern-Unterteilung von M_0, weg von K_0, und es existiert eine Abbildung $f'\colon M_0' \to \Lambda_i^n$ derart, daß die Abbildung

$$|M_0| \;\approx\; |M_0'| \xrightarrow{|f'|} |\Lambda_i^n| \xrightarrow{\text{Inkl}} |\Delta^n|$$

homotop ist, relativ zu dem Unterraum $|K_0|$, zu der Abbildung $|\widetilde{f}|$.

Beweis. Die Existenz der Homotopie wird eine automatische Konsequenz sein, wegen der Zusammenziehbarkeit von $|\Delta^n|$. Es geht nur um die Existenz der Abbildung f'; vorausgesetzt, diese Abbildung f' wird eine Erweiterung der Abbildung f sein.

Die Nicht-Singularität kommt auf die folgende Weise ins Spiel. Wenn W eine *nicht-singuläre* simpliziale Menge ist, dann macht es Sinn, die nicht-ausgearteten Simplizes von W *alleine* zu betrachten. Man bekommt, was wir früher als eine Δ-*Menge* bezeichnet haben; einen (kontravarianten) Funktor, nicht auf der ganzen Kategorie Δ, sondern auf der Unterkategorie inj-Δ, die aus den *injektiven Abbildungen* in Δ besteht:

$$\overline{W}:\quad (\text{inj-}\Delta)^{\text{op}} \longrightarrow (\text{Mengen})\ , \qquad [n] \longmapsto \overline{W}_n\ ;$$

wo eben, nach Definition, $\overline{W}_n$ die Menge der nicht-ausgearteten Simplizes in W_n ist.

Die Δ-Menge $\overline{W}$ ihrerseits hat eine zugeordnete simpliziale Menge (per Hinzunahme von ausgearteten Simplizes), und diese simpliziale Menge ist W selbst (bis auf kanonische Isomorphie). Das liegt daran, daß jedes Simplex in W auf eine, und nur eine, Weise dargestellt ist als "Ausartung von einem nicht-ausgearteten Simplex". Ferner hat $\overline{W}$ eine geometrische Realisierung als Δ-Menge,

$$\overline{W} \;\longmapsto\; \text{Real}(\overline{W})$$

(es wird nur mit Hilfe der Rand-Abbildungen zusammengeklebt). Wie wir wissen, gibt es schließlich auch einen kanonischen Isomorphismus zu der 'richtigen' geometrischen Realisierung:

$$\text{Real}(\overline{W}) \;\cong\; |W|$$

Der Nachweis der Behauptung geht nun wie folgt.

Zusatz S. 61

Die in der letzten Zeile auf S. 61 aufgestellte Behauptung bedarf einer Rechtfertigung.

Denn einerseits soll das anzuheftende M_0 ja modifiziert werden zu M_0' (durch Sternunterteilung, weg von K_0). Andererseits hat man keinen Grund zu der Annahme, daß die Anhefte-Abbildung

$$(M \times_{Y^+} Y) \longleftarrow K_0$$

injektiv ist. Deshalb ist es nicht selbstverständlich, daß das resultierende

$$M' \;=\; (M \times_{Y^+} Y) \cup_{K_0} M_0' \;.$$

tatsächlich nicht-singulär ist.

Um zu sehen, daß das Problem nicht wirklich auftritt, überlegen wir uns, daß das verwendete M_0 (also der ominöse Pullback $M \times_{Y^+} \Delta^n$) auch durch etwas anderes, kleineres ersetzt werden könnte.

In $Y^+ = Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$ gibt es genau zwei nicht-ausgeartete Simplizes, die nicht in Y liegen. Diese beiden kommen von Δ^n, es sind der Erzeuger von Δ^n und der von dessen i-ter Seite.

Wir betrachten diejenigen Simplizes in M, die unter der Abbildung $M \to Y^+$ *nicht* nach Y abbilden. Ein solches Simplex bildet dann ab auf eines, das über einem der beiden genannten Simplizes liegt (d.h. davon eine Ausartung ist). Und die Abbildung von einem solchen Simplex *liftet* (*in eindeutiger Weise*) zu einer Abbildung nach Δ^n.

Wenn also N_0 definiert wird als die von diesen Simplizes erzeugte Unter-simpliziale-Menge von M (bzw. als die von den nicht-ausgearteten unter den genannten Simplizes erzeugte simpliziale Menge — das läuft natürlich auf dasselbe hinaus), so liftet die Abbildung $N_0 \to Y^+$ zu einer Abbildung $N_0 \to \Delta^n$. Das bedeutet, daß die Inklusion $N_0 \to M$ liftet zu einer Inklusion in den Pullback, $N_0 \to M_0$.

Wir können nun M_0 ersetzen durch die Unter-simpliziale-Menge N_0. Das Problem ist dann nicht mehr da, da die Anhefte-Abbildung für N_0,

$$(M \times_{Y^+} Y) \longleftarrow K_0 \cap N_0$$

eine *injektive* Abbildung ist.

Wir sehen aber auch, im Nachhinein, daß es vorher ein Problem nicht wirklich gab. Denn wenn man von der simplizialen Menge M_0 die Sternunterteilung weg von K_0 bildet, so sind von der Konstruktion nur solche Simplizes betroffen, die in N_0 liegen.

Es werde $\mathrm{U}(\Delta^n)$ definiert als eine Stern-Unterteilung von $\overline{\Delta^n}$, weg von $\overline{\Lambda_i^n}$; und zwar so, daß die beiden Simplizes von $\overline{\Delta^n}$, die nicht in $\overline{\Lambda_i^n}$ liegen, wirklich unterteilt sind.

Die Ecken-Numerierung soll dabei so gewählt werden, daß eine Retraktion von $\mathrm{U}(\Delta^n)$ nach $\overline{\Lambda_i^n}$ definiert werden kann. Dazu bekommt der 'Baryzenter' der $(n{-}1)$-dimensionalen Seite die Nummer i, und der 'Baryzenter' von dem n-Simplex selbst die Nummer $i\frac{1}{2}$ (eine Nummer, die zwischen i und $i{+}1$ liegt). Es ist klar (oder?), daß mit diesen Vorgaben die gewünschte Retraktion wirklich existiert.

Der Übergang von $\overline{M}_0$ zu $\overline{M}_0'$ besteht in einer Stern-Unterteilung, weg von $\overline{K}_0$. Dazu werden, induktiv, diejenigen Simplizes stellar unterteilt, die über den beiden unterteilten Simplizes in $\overline{\Delta^n}$ liegen; nennen wir diese beiden Simplizes A_1 und A_2.

Wenn B ein solches Simplex bezeichnet, dann ist bei der Unterteilung von B auf einige Dinge besonders zu achten: Bei der Wahl des Isomorphismus

$$\mathrm{Real}(B) \quad \cong \quad \mathrm{Real}(\,\mathrm{Unt}(B)\,)$$

ist der für die Unterteilung verwendete (Kegel-) Punkt in $\mathrm{Real}(B)$ so zu wählen, daß er über dem entsprechenden Punkt in $\mathrm{Real}(A_1)$ bzw. $\mathrm{Real}(A_2)$ liegt. Wie oben angedeutet, so wird man für den Kegelpunkt in A_j den Baryzenter genommen haben. Es wird aber im allgemeinen *nicht* möglich sein, für den darüber liegenden Punkt in B ebenfalls den Baryzenter zu nehmen. [Zum Beispiel, wenn man ein 2-Simplex affin und eckenerhaltend auf ein 1-Simplex abbildet, so ist der Baryzenter von dem 2-Simplex nicht enthalten im Urbild von dem Baryzenter vom 1-Simplex.] Man wird sich damit begnügen müssen, *irgendeinen* inneren Punkt von B in diesem Urbild zu nehmen. Es ist klar (oder?), daß es einen solchen Punkt gibt: das Urbild ist (nicht leer und) isomorph zu einem Produkt von Simplizes; nämlich isomorph zum Produkt derjenigen Simplizes in B, die die Urbilder der Ecken von A_j sind.

Schließlich muß man auch noch darauf achten, daß die Nummer für die neue Ecke geeignet gewählt wird. $\square$

Beschreibung simplizialer Homotopien

Es geht hier um eine "kategorielle" Beschreibung simplizialer Homotopien. Unser Interesse daran ist nicht so sehr die große Allgemeinheit, die damit (auch) erreicht wird. Es geht vielmehr darum, in relevanten Fällen eine effiziente Beschreibung von Homotopien zur Verfügung zu haben.

Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie. Sei A ein Objekt von $\mathcal{D}$. Man definiert, in dieser Situation, eine Kategorie

$$\mathcal{D}/A \ ,$$

die "Kategorie der Objekte in $\mathcal{D}$ über A". Die Objekte sind die Paare (D, d) :

$$\begin{aligned} D &\in \mathcal{D} \quad (\text{ein Objekt aus } \mathcal{D}), \\ d : D &\to A \quad (\text{ein Morphismus in } \mathcal{D} \text{ zu dem ausgewählten Objekt } A) \ . \end{aligned}$$

Und ein Morphismus in $\mathcal{D}/A$, von (D_0, d_0) zu (D_1, d_1), ist ein Morphismus

$$D_0 \xrightarrow{f} D_1$$

in $\mathcal{D}$, der mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist. Das heißt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} D_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_0"'] & D_1 \arrow[d, "d_1"] \\ A \arrow[r, "="'] & A \end{tikzcd}$$

Für unsere gegenwärtigen Zwecke benötigen wir von dieser Begriffsbildung den Fall, wo $\mathcal{D}$ die Kategorie Δ der geordneten Mengen $[0]$, $[1]$, $[2]$, ... ,

$$[n] \ = \ \{ 0 < 1 < \cdots < n \} \ ,$$

und ihrer schwach monotonen Abbildungen ist; und A das spezielle Objekt

$$[1]$$

in Δ.

Die Objekte der Kategorie $\Delta/[1]$ sind also die Paare $([n], a)$, bestehend aus einer geordneten Menge $[n]$ und einer schwach monotonen Abbildung $a : [n] \to [1]$. Und ein Morphismus in $\Delta/[1]$, von $([n_0], a_0)$ zu $([n_1], a_1)$, ist eine schwach monotone Abbildung $[n_0] \to [n_1]$, die mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist.

Es gibt eine offensichtliche "Vergiß"-Abbildung von $\Delta/[1]$ zu Δ. Wir bezeichnen diesen Funktor mit π; also

$$\pi : \ \Delta/[1] \longrightarrow \Delta \quad , \qquad ([n]\,, a) \longmapsto [n] \ .$$

Umgekehrt gibt es auch zwei ebenso offensichtliche Abbildungen von Δ zu $\Delta/[1]$,

$$\begin{array}{rlcrl} \iota_0 : & \Delta \longrightarrow \Delta/[1] & \qquad\qquad & \iota_1 : & \Delta \longrightarrow \Delta/[1] \\ & [n] \longmapsto ([n]\,, \text{‘0’}) & & & [n] \longmapsto ([n]\,, \text{‘1’}) \ , \end{array}$$

wo ‘0’ (bzw. ‘1’) die triviale Abbildung $[n] \to [1]$ mit Wert 0 (bzw. 1) bezeichnet.

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein *simpliziales Objekt* in $\mathcal{C}$ ist, nach Definition, ein Funktor

$$X : \ \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C} \quad , \qquad [n] \longmapsto X_n \ .$$

Die simplizialen Objekte in $\mathcal{C}$ bilden ihrerseits eine Kategorie: eine Abbildung von X zu Y ist (nach Definition) eine natürliche Transformation von Funktoren.

Wenn X ein simpliziales Objekt in $\mathcal{C}$ ist, so bezeichnen wir mit X^* den Funktor von $(\Delta/[1]\,)^{\mathrm{op}}$ zu $\mathcal{C}$, der definiert ist als die Zusammensetzung

$$(\Delta/[1]\,)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \pi\ } \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ X\ } \mathcal{C} \ .$$

Definition. Seien X und Y simpliziale Objekte in $\mathcal{C}$. Eine *simpliziale Homotopie*, von Abbildungen von X zu Y, ist eine natürliche Transformation von Funktoren $X^* \to Y^*$.

Naturgemäß werden wir erwarten, daß zu einer Homotopie zwei Abbildungen von X zu Y gehören: eine Abbildung f_0, wo die Homotopie ‘startet’, und eine andere, f_1, wo sie ‘aufhört’. Das ist auch der Fall:

Wir bekommen die Abbildung f_0 über die Bemerkung, daß der zusammengesetzte Funktor

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \iota_0\ } (\Delta/[1]\,)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ \pi\ } \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\ X\ } \mathcal{C} \ .$$

wieder X ist (da $\pi \circ \iota_0 \ = \ \mathrm{Id}_\Delta$); daß demgemäß die natürliche Transformation von X^* zu Y^*, per Zurückziehen entlang ι_0, eine natürliche Transformation von X zu Y induziert.

Ähnlich bekommen wir f_1 unter Zuhilfenahme von $\iota_1 : \Delta^{\mathrm{op}} \to (\Delta/[1]\,)^{\mathrm{op}}$.

Satz. *Wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen ist, dann ist "simpliziale Homotopie" der übliche Begriff: eine simpliziale Homotopie von f_0 zu f_1 entspricht einer Abbildung $F : X \times \Delta^1 \to Y$, die an ihren ‘Enden’ auf f_0 und f_1 einschränkt.*

Beweis. Eine solche Abbildung F ist eine natürliche Transformation; also ein kompatibles System von Abbildungen, indiziert durch die $[n]$ aus Δ^{op},

$$X_n \times \mathrm{Hom}_\Delta(\,[n]\,,\,[1]\,) \ = \ X_n \times (\Delta^1)_n \ \cong \ (\,X \times \Delta^1\,)_n \ \longrightarrow \ Y_n \ .$$

Das ist aber dasselbe wie ein kompatibles System von Abbildungen

$$X_n \longrightarrow Y_n$$

indiziert durch die $([n], \alpha)$ aus $\coprod_{[n]} \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1])$. Die Menge $\coprod_{[n]} \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1])$ ist aber auch die Menge der Objekte von $(\Delta/[1])^{\mathrm{op}}$. Eine natürliche Transformation von X^* zu Y^* ist also ebenfalls ein kompatibles System von Abbilungen

$$X_n \longrightarrow Y_n$$

indiziert durch $\coprod_{[n]} \mathrm{Hom}_\Delta([n], [1])$.

[Natürlich sollten wir hier im Prinzip nachprüfen, daß "kompatibel" in den beiden Fällen wirklich dasselbe bedeutet. Auf diese Nachprüfung paßt die Charakterisierung "La preuve se fait par l'âne qui trotte": man schreibt die Sachen aus und sieht, daß es wirklich so ist. Wir lassen das hier weg.]

Wir notieren noch, daß die Restriktion auf den 'Anfang' aus der Abbildung F resultiert durch die Einschränkung entlang der Inklusion der Ecke Nr. 0. Wenn man die Inklusion schreibt als

$$\Delta^0 \longrightarrow \Delta^1 \ , \quad [n] \longmapsto ([n], `0') \ ,$$

so ergibt sich die obige Beschreibung der Abbildung f_0. $\square$

Bemerkung. Für den Beweis des Satzes gibt es noch eine etwas andere Betrachtungsweise, die hier zumindest angedeutet werden soll.

Einer simplizialen Menge Z kann man eine Kategorie $\mathrm{simp}(Z)$ zuordnen. Die Objekte dieser Kategorie sind die Paare

$$([n], z) \ , \quad z \in Z_n \ .$$

Und ein Morphismus in $\mathrm{simp}(Z)$, von $([n_0], z_0)$ zu $([n_1], z_1)$, ist eine schwach monotone Abbildung $\alpha\colon [n_0] \to [n_1]$ (also eine Abbildung α in Δ von $[n_0]$ zu $[n_1]$) mit der Eigenschaft, daß $z_0 = \alpha^*(z_1)$.

Wenn W eine simpliziale Menge über Z ist (ein Paar bestehend aus der simplizialen Menge W und einer Abbildung $f : W \to Z$), so bekommt man über die "Urbild"-Funktion einen Funktor

$$\mathrm{simp}(Z)^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \ .$$

Da die Konstruktion mit Abbildungen verträglich ist, bekommt man so einen Funktor

$$(\text{simpliziale Mengen über } Z) \longrightarrow (\text{mengenwertige Funktoren auf } \mathrm{simp}(Z)^{\mathrm{op}}) \ .$$

Dieser Funktor ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Insbesondere bekommt man so eine Äquivalenz von der Kategorie der simplizialen Mengen über Δ^1 zu der Kategorie der mengenwertigen kontravarianten Funktoren auf

$$\mathrm{simp}(\Delta^1) \ \cong \ \Delta/[1] \ .$$

Ist X eine simpliziale Menge, so entspricht unter der Äquivalenz die simpliziale Menge $X \times \Delta^1$ (aufgefaßt als simpliziale Menge über Δ^1) dem oben mit X^* bezeichneten Funktor $(\Delta/[1])^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen})$. $\square$

Definition. Sei $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ ein simpliziales Objekt in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Der "Wege-Raum" von X ist definiert als das simpliziale Objekt, ebenfalls in $\mathcal{C}$, das aus X entsteht als der zusammengesetzte Funktor

$$PX : \quad \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\text{shift}} \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} \mathcal{C} \quad , \qquad (PX)_n \;=\; X_{n+1} \ .$$

Dabei ist 'shift' der Funktor $\Delta \to \Delta$, der $[n]$ auf $[n{+}1]$ abbildet; und der einer schwach monotonen Abbildung $a : [m] \to [n]$ die Abbildung $a' : [m{+}1] \to [n{+}1]$ zuordnet, die definiert ist durch $a'(0) = 0$ und $a'(i{+}1) \;=\; a(i) + 1$.

Die Tatsache, daß ein Wege-Raum als einen Deformationsretrakt den Raum der trivialen Wege besitzt, hat hier ein Analogon:

Satz. *PX ist simplizial-homotopie-äquivalent zu dem* (trivialen) *simplizialen Objekt* $[n] \mapsto X_0$.

Beispiel. Wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen ist, so ist das triviale simpliziale Objekt $[n] \mapsto X_0$ eine 'diskrete' simpliziale Menge. Wenn also X eine simpliziale Menge ist, die *reduziert* ist (das heißt, es gibt nur ein einziges 0-Simplex in X), dann ist $[n] \mapsto X_0$ isomorph zum '0-Simplex', Δ^0. Damit ist PX *zusammenziehbar* in dem Fall.

Beweis des Satzes. Die Abbildung $[0] \to [n{+}1]$, $0 \mapsto 0$, gibt eine Abbildung $(PX)_n \to (X_0)_n$. Für variables n sind diese Abbildungen mit den Struktur-Abbildungen verträglich (das liegt insbesondere daran, daß die 0-te Rand-Abbildung von X nicht in PX verwendet wird). Man hat also eine Abbildung von simplizialen Objekten

$$r : PX \longrightarrow X_0 \ .$$

Umgekehrt hat man auch eine Abbildung in der anderen Richtung, $s : X_0 \to PX$; sie ist gegeben durch die Abbildungen $X_0 \to X_{n+1}$, induziert von $[n{+}1] \to [0]$.

Es ist klar (oder?), daß die Komposition $r \circ s$ gleich der identischen Abbildung auf X_0 ist. Die andere Komposition, $s \circ r$, ist homotop zur identischen Abbildung auf PX : Die gewünschte Homotopie ist gegeben durch die natürliche Transformation

$$(\, a : \; [n] \to [1] \;) \;\longmapsto\; (\, \phi_a^* : \, X_{n+1} \;\longrightarrow\; X_{n+1} \,) \ ,$$

die induziert ist von

$$(\, a : \; [n] \to [1] \;) \;\longmapsto\; (\, \phi_a : \, [n{+}1] \;\longrightarrow\; [n{+}1] \,)$$

(eine natürliche Transformation kovarianter Funktoren $\Delta/[1] \to \Delta$,
nämlich von dem Funktor " $\text{shift} \circ \pi$ " zu sich selbst)

wo $\phi_a(0) \;=\; 0$ und

$$\phi_a(j{+}1) \quad = \quad \begin{cases} j{+}1\,, & \text{wenn } \ a(j) \;=\; 1 \\ 0\,, & \text{wenn } \ a(j) \;=\; 0 \ . \end{cases}$$

$\square$

Nerven von Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.[1] Man ordnet ihr eine simpliziale Menge zu, den sogenannten "Nerv" von $\mathcal{C}$. Diese simpliziale Menge wird mit $N\mathcal{C}$ bezeichnet.

Die simpliziale Menge $N\mathcal{C}$ ist so gemacht, daß die 0-Simplizes den Objekten von $\mathcal{C}$ entsprechen, und die 1-Simplizes den Morphismen. $N\mathcal{C}_0$ wird also die Menge der Objekte von $\mathcal{C}$ sein; und $N\mathcal{C}_1$ die Menge der Morphismen.

Allgemein ist $N\mathcal{C}_n$, die Menge der n-Simplizes, definiert als die Menge der Diagramme " vom Typ $[n]$ " in $\mathcal{C}$. Ein n-Simplex entspricht also einer Folge in $\mathcal{C}$:

$$c_0 \to c_1 \to \cdots \to c_{n-1} \to c_n$$

Mit Hilfe von einem kleinen Klimmzug kann man die Dinge noch ein wenig prägnanter ausdrücken. Nämlich die geordnete Menge $[n]$ kann ihrerseits als eine Kategorie angesehen werden. Die Objekte von $[n]$ sind $0, 1, \ldots, n$; und die Sache mit den Morphismen ist wie folgt geregelt: zu je zwei Objekten i und j in der Kategorie $[n]$ gibt es höchstens einen Morphismus von i zu j ; und zwar gibt es einen solchen Morphismus genau dann, wenn $i \leq j$. — Nach dieser Sprachschöpfung können wir nun sagen, daß ein n-Simplex von $N\mathcal{C}$ einem Funktor $[n] \to \mathcal{C}$ entspricht.

Eine schwach monotone Abbildung $\alpha : [m] \to [n]$ (also ein Morphismus in der Buchführungs-Kategorie Δ) wird zu einem 'Funktor' $[m] \to [n]$. Die Struktur-Abbildungen in der simplizialen Menge $N\mathcal{C}$ können deshalb über die Zusammensetzung von Funktoren definiert werden: $\alpha^* : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_m$ ist die Abbildung:

$$\Big(\ [n] \xrightarrow{f} \mathcal{C} \ \Big) \qquad \longmapsto \qquad \Big(\ \alpha^*(f) = f \circ \alpha : \ \ [m] \xrightarrow{\alpha} [n] \xrightarrow{f} \mathcal{C} \ \Big)$$

Die Konstruktion $\mathcal{C} \longmapsto N\mathcal{C}$ hat einige bemerkenswerte Eigenschaften:

[1] Um Verwirrungen mit der Terminologie zu vermeiden, wollen wir annehmen, daß $\mathcal{C}$ eine "kleine" Kategorie ist; daß also die Objekte von $\mathcal{C}$ eine "Menge" bilden (und nicht nur eine "Klasse"). Diese Art von Unterscheidung hat ihren Ursprung in den 'Grundlagen' der Mathematik; der Unterschied zwischen den Termen erklärt sich wie folgt. Wenn man versucht, Mathematik axiomatisch zu begründen, so muß man ja die Regeln festlegen. Insbesondere muß man sich darauf festlegen, ob bei einer *Menge* es immer eine erlaubte Operation sein soll, die Potenzmenge davon zu bilden. Ein unkritisches "ja" an dieser Stelle führt sehr schnell zu absurden Konsequenzen, wie man an Beispielen wie der "Menge aller Mengen" sieht (was wäre von dem Ding die Potenzmenge??). Ein relativ einfacher Ausweg aus dem Dilemma ist es, auch 'Mengen' zu benutzen, bei denen man ausdrücklich darauf verzichtet, etwa die Potenzmenge jemals bilden zu wollen; die nennt man dann, zur Unterscheidung, "Klassen". — Die Angelegenheit wurde angesprochen in der Hoffnung, auf die Weise Verwirrung zu vermeiden. Wir wollen sie jetzt ganz schnell vergessen.

Bemerkung. *Die Kategorie $\mathcal{C}$ ist aus der zugeordneten simplizialen Menge $N\mathcal{C}$ rekonstruierbar*: Die Menge der Objekte und die Menge der Morphismen sind durch die beiden Mengen $N\mathcal{C}_0$ und $N\mathcal{C}_1$ gegeben. Die (Ausartungs-)Abbildung:

$$N\mathcal{C}_0 \longrightarrow N\mathcal{C}_1 \ , \quad c_0 \quad \longmapsto \quad \big(\, c_0 \xrightarrow{=} c_0 \,\big)$$

gibt den "identischen Morphismus" eines Objekts c_0. Die beiden Rand-Abbildungen:

$$N\mathcal{C}_1 \longrightarrow N\mathcal{C}_0 \ , \quad \big(\, c_0 \xrightarrow{f} c_1 \,\big) \quad \longmapsto \quad c_0 \ , \ \text{bzw.} \ \longmapsto \quad c_1$$

geben "Quelle" und "Ziel" von einem Morphismus f. Schließlich, zu zwei Morphismen $c_0 \xrightarrow{g_1} c_1$ und $c_1 \xrightarrow{g_2} c_2$ (Ziel(g_1) = Quelle(g_2)!) gibt es ein (und nur ein) 2-Simplex

$$c_0 \xrightarrow{g_1} c_1 \xrightarrow{g_2} c_2$$

so daß die beiden vorgegebenen Morphismen davon die Bilder sind unter den Rand-Abbildungen

$$N\mathcal{C}_2 \longrightarrow N\mathcal{C}_1$$

mit den Nummern 0 (Weglassen von c_0) und 2 (Weglassen von c_2). Die Rand-Abbildung mit der Nummer 1 entspricht dem Weglassen von c_1; was darauf hinausläuft, daß das resultierende Element von $N\mathcal{C}_1$ dem zusammengesetzten Morphismus $c_0 \xrightarrow{g_2 \circ g_1} c_2$ entspricht. — Ansonsten sind in den simplizialen Identitäten noch einige Eigenschaften kodifiziert, die eine Kategorie nun einmal hat: Die Identität $d_0 s_0 = \text{Id} = d_1 s_0$ für Abbildungen $N\mathcal{C}_0 \to N\mathcal{C}_1 \to N\mathcal{C}_0$ drückt die Tatsache aus, daß Quelle oder Ziel von einem identischen Morphismus wieder das Ausgangs-Objekt ergeben. Die Identität $d_1 d_2 = d_1 d_1$ für Abbildungen $N\mathcal{C}_3 \to N\mathcal{C}_2 \to N\mathcal{C}_1$ ist das Assoziativitätsgesetz für die Komposition der Morphismen in $\mathcal{C}$.

Beispiel. *Für die 'Kategorie' $[k]$ ist $N[k] = \Delta^k$:* Denn ein 'Funktor' $[n] \to [k]$ ist dasselbe wie eine schwach monotone Abbildung. Folglich ist $(N[k])_n \approx \text{Hom}_\Delta([n],[k])$ in einer Weise, die mit den Struktur-Abbildungen verträglich ist.

Bemerkung. *Der Funktor*

$$(\text{Kategorien}) \ \longrightarrow \ (\text{simpliziale Mengen}) \ , \quad \mathcal{C} \longmapsto N\mathcal{C} \ ,$$

ist mit Produkten verträglich: Denn im Falle von einer Produkt-Kategorie $\mathcal{C}' \times \mathcal{C}''$ hat man eine natürliche Abbildung $N(\mathcal{C}' \times \mathcal{C}'') \longrightarrow N\mathcal{C}' \times N\mathcal{C}''$. Diese Abbildung ist in der Dimension n gegeben durch die Abbildung von Mengen von Funktoren:

$$\text{Fun}(\,[n]\,, \mathcal{C}' \times \mathcal{C}''\,) \ \longrightarrow \ \text{Fun}(\,[n]\,, \mathcal{C}'\,) \times \text{Fun}(\,[n]\,, \mathcal{C}''\,)$$

Es ist klar (oder?), daß letztere Abbildung ein Isomorphismus ist.

Bemerkung. Folgendes ist von geradezu phantastischer Wichtigkeit (wie sich herausstellt). Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Eine *natürliche Transformation* von Funktoren von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{D}$ kann ihrerseits beschrieben werden als ein Funktor von (anderen) Kategorien; nämlich als ein Funktor $\mathcal{C} \times [1] \longrightarrow \mathcal{D}$. Per Übergang zu Nerven resultiert daraus eine Abbildung

$$N\mathcal{C} \times \Delta^1 \ \cong \ N(\,\mathcal{C} \times [1]\,) \ \longrightarrow \ N\mathcal{D} \ ;$$

also eine "simpliziale Homotopie" von Abbildungen von $N\mathcal{C}$ zu $N\mathcal{D}$.

Beispiel. Sei G eine Gruppe. Bezeichne $<G>$ die Kategorie mit einem einzigen Objekt $*$ und mit

$$\mathrm{Hom}_{<G>}(*,*) = G \ .$$

Es ist dann

$$(\, N<G>\,)_n \;=\; \left\{ \, * \xrightarrow{g_1} * \xrightarrow{g_2} * \ \ldots \ * \xrightarrow{g_n} * \, \right\} \;\approx\; G^n$$

mit Rand-Abbildungen:

$$d_i(\, g_1, g_2, \ldots, g_n\,) \;=\; \begin{cases} (\, g_2, \ldots, g_n\,) & \text{für } \ 0 = i \\ (\, g_1, \ldots, g_i \cdot g_{i+1}, \ldots, g_n\,) & \text{für } \ 0 < i < n \\ (\, g_1, \ldots, g_{n-1}\,) & \text{für } \qquad i = n \end{cases}$$

und Ausartungs-Abbildungen:

$$s_j(\, g_1, \ldots, g_{n-1}\,) \;=\; (\, g_1, \ldots, g_j,\, 1\,, g_{j+1}, \ldots, g_{n-1}\,) \ , \qquad 0 \leq j \leq n{-}1 \ .$$

Bemerkung. Wenn G eine *kommutative* Gruppe ist, dann sind die Rand- und Ausartungs-Abbildungen von $N<G>$ Gruppenhomomorphismen; es ist klar (oder?), daß die übrigen Struktur-Abbildungen in dem Fall ebenfalls Gruppenhomomorphismen sind. Im kommutativen Fall ist also $N<G>$ eine simpliziale *Gruppe* (und zwar eine simpliziale abelsche Gruppe).

Beispiel. Sei G eine Gruppe, sei $f \in G$. Es gibt einen (und nur einen) Funktor

$$\tau_f : \ <G> \times [1] \ \longrightarrow \ <G> \ , \qquad \tau_f(\, g\,,\, 0\,) \, = \, g \ , \quad \tau_f(\, *\,,\, 0{\to}1\,) \, = \, f \ .$$

Erklärungen dazu: Die Kategorie $<G> \times [1]$ hat die beiden Objekte $(*,0)$ und $(*,1)$.

Die Kategorie $<G>\times[1]$ enthält zwei isomorphe Kopien von $<G>$, nämlich $<G>\times 0$ und $<G> \times 1$. Die Morphismen in $<G> \times 0$ werden mit $(g,0)$ bezeichnet.

$(*, 0{\to}1)$ bezeichnet den Morphismus von $(*,0)$ zu $(*,1)$, dessen erste Komponente das Eins-Element von G ist.

Die restlichen Daten des obigen Funktors sind erzwungen als $\tau_f(\, g\,,\, 1\,) \, = \, f^{-1}\, g\, f$; das ergibt sich aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\tau_f(\, *\,,\, 0\,) \arrow[rr, "g \, = \, \tau_f(\, g\,,\, 0\,)"] \arrow[d, "f"'] & & \tau_f(\, *\,,\, 0\,) \arrow[d, "f"] \\
\tau_f(\, *\,,\, 1\,) \arrow[rr, "f^{-1}\, g\, f"'] & & \tau_f(\, *\,,\, 1\,)
\end{tikzcd}$$

(Komposition in der Gruppe wird hier von links nach rechts gelesen).

Der Funktor beschreibt eine natürliche Transformation (und damit, nach Übergang zum Nerv, eine Homotopie) von der identischen Abbildung auf $<G>$ zu dem durch f gegeben "inneren Automorphismus". Der innere Automorphismus wird die Identität sein, wenn G kommutativ ist (oder, allgemeiner: wenn f zentrales Element ist). Die natürliche Transformation ist aber nur dann die Identität, wenn f das Eins-Element der Gruppe ist.

Die Bar-Konstruktion

Der Name für die Konstruktion kommt daher, so sagt eine Theorie, daß zwei Männer diese Konstruktion in einer Bar erfunden haben.

Eine andere Theorie sagt, der Name komme daher, daß Eilenberg und MacLane (das waren die beiden Männer) bei der Gruppen-Homologie eine Notation verwendeten, wo Tupel von Gruppen-Elementen vorkamen; und verschiedene Elemente waren jeweils durch einen Strich (englisch: bar) voneinander getrennt — etwa so: $(g_1|g_2|\ldots|g_n)$.

Definition. Sei G eine Gruppe. Es bezeichne BG die simpliziale Menge

$$BG: \ \Delta^{\mathrm{op}} \ \longrightarrow \ (\text{Mengen}) \ , \qquad [n] \ \longmapsto \ BG_n := G^n \ ,$$

mit Rand-Abbildungen $d_i : BG_n \to BG_{n-1}$,

$$d_i(\, g_1 \,|\, g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) \quad = \quad \begin{cases} (\, g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) & \text{für } \ 0 = i \\ (\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_i \cdot g_{i+1} \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) & \text{für } \ 0 < i < n \\ (\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) & \text{für } \qquad i = n \end{cases}$$

und Ausartungs-Abbildungen $s_i : BG_{n-1} \to BG_n$,

$$s_j(\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) \quad = \quad (\, g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_j \,|\, 1 \,|\, g_{j+1} \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) \ , \qquad 0 \leq j \leq n{-}1$$

(wo “ 1 ” das Eins-Element von G bezeichnet).

Bemerkung. Es ist klar (oder?), daß die simpliziale Menge BG dasselbe ist wie die früher mit $N{<}G{>}$ bezeichnete simpliziale Menge: der *Nerv* der Kategorie ${<}G{>}$; wo eben ${<}G{>}$ die Kategorie mit einem einzigen Objekt $*$ ist und mit Morphismen-Menge

$$\mathrm{Hom}_{<G>}(*,*) = G \ .$$

□

Es sei erinnert an den Begriff des *prinzipalen* G*-Bündels*. Es handelt sich dabei um eine simpliziale Menge E zusammen mit einer Operation von G auf E, die *frei* ist. Es folgt daraus, wie wir wissen, daß die Projektion von E auf E/G (die simpliziale Menge der Bahnen) ein *lokal-triviales Bündel* ist.

Satz. *Es gibt ein* G*-Prinzipalbündel* EG, *mit Bahnenraum* $(EG)/G \approx BG$, *derart, daß* EG *‘zusammenziehbar’ ist im schwachen Sinn* (das heißt, die geometrische Realisierung $|EG|$ ist homotopie-äquivalent zum ein-punktigen Raum).

Korollar. *Die geometrische Realisierung $|BG|$ ist ein Eilenberg-MacLane Raum für die Dimension 1, mit Fundamentalgruppe G.*

Beweis. $EG \to BG$ ist ein lokal-triviales Bündel, mit Faser G; die geometrische Realisierung $|EG| \to |BG|$ ist deshalb eine Serre-Faserung. Da $|EG|$ zusammenziehbar ist, bedeutet dies, daß der 'Schleifenraum' von $|BG|$ homotopie-äquivalent ist zu dem (diskreten) Raum $|G|$. Also

$$\pi_n|BG| \;\approx\; \pi_{n-1}|G| \;\approx\; \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } n > 1\;; \\ G\,, & \text{wenn } n = 1\;. \end{cases}$$

□

Korollar. *Die Homologie der Gruppe G* (mit ganz-zahligen Koeffizienten) *ist berechenbar aus dem Kettenkomplex, wo die n-te Kettengruppe die freie abelsche Gruppe ist, erzeugt von den*

$$(\, g_1 \,|\, g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) \quad \in \quad G^n \;\;;$$

und wo die Rand-Abbildung gegeben ist durch $d \;=\; \sum (-1)^i\, d_i$ (mit d_i wie oben).

Beweis. Die *Homologie der Gruppe G* ist definiert als die Homologie eines CW-Komplexes, der ein Eilenberg-MacLane-Raum für die Dimension 1 ist, mit Fundamentalgruppe G. Dies ist wohl-definiert, da, wie wir wissen, ein solcher Eilenberg-MacLane-Raum eindeutig bestimmt ist (bis auf Homotopie-Äquivalenz). Andererseits kann, wie wir wissen, die Homologie des Raumes $|BG|$ auch berechnet werden als die Homologie der simplizialen Menge BG. Diese resultiert, nach Definition, aus der von dieser simplizialen Menge erzeugten simplizialen abelschen Gruppe durch Übergang zum Kettenkomplex. Genau dieser Kettenkomplex ist im Korollar beschrieben. □

Beweis des Satzes. Die simpliziale Menge EG wird in ähnlich expliziter Weise definiert wie BG auch. Nämlich es bezeichne EG die simpliziale Menge

$$EG:\; \Delta^{\mathrm{op}} \;\longrightarrow\; (\text{Mengen})\;, \qquad [n] \;\longmapsto\; EG_n \;:=\; G^{n+1} \;\;,$$

mit Rand-Abbildungen $d_i : EG_n \to EG_{n-1}$,

$$d_i(\, g_0 \mid g_1 \,|\, g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) \;\;=\;\; \begin{cases} (\, g_0 \cdot g_1 \mid g_2 \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) & \text{für } 0 = i \\ (\, g_0 \mid g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_i \cdot g_{i+1} \,|\, \ldots \,|\, g_n \,) & \text{für } 0 < i < n \\ (\, g_0 \mid g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) & \text{für } \quad\;\; i = n \end{cases}$$

und Ausartungs-Abbildungen $s_i : EG_{n-1} \to EG_n$,

$$s_j(\, g_0 \mid g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,) \;\;=\;\; (\, g_0 \mid g_1 \,|\, \ldots \,|\, g_j \,|\, 1 \,|\, g_{j+1} \,|\, \ldots \,|\, g_{n-1} \,)\;, \quad 0 \leq j \leq n{-}1\;\;.$$

Die Gruppe G operiert auf EG, von links, durch Manipulation des (neu hinzugekommenen) " g_0 ". Nämlich $G \times EG_n \to EG_n$ ist die Abbildung

$$(\; g \;\;,\;\; (g_0 \mid g_1 \,|\, \ldots \,|g_n \,)\;) \;\longmapsto\; (\, g \cdot g_0 \mid g_1 \,|\, \ldots \,|g_n \,)\;\;.$$

Zusatz: S. 72

Warum wir wissen: Eine simpliziale Menge und ihre geometrische Realisierung haben dieselbe Homologie.

Die Homologie einer simplizialen Menge X berechnet sich (nach Definition) aus der simplizialen abelschen Gruppe $\mathbb{Z}[X]$; über den zugeordneten Kettenkomplex. Die Homologie des Raumes $|X|$ ist definiert als diejenige der simplizialen Menge $S|X|$ (singulärer Komplex). Die hier zur Rede stehende Behauptung ist, daß die kanonische Inklusion $X \to S|X|$ einen Isomorphismus auf der Homologie induziert.

Sei $X \longmapsto \Psi(X) = \bigcup_n \Phi^n(X)$ die Konstruktion "iteriertes Trichterfüllen", die aus dem X einen Kan-Komplex macht. Über die Inklusion $X \to X'$, wo $X' = \Psi(X)$, bekommt man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S|X| \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X' & \longrightarrow & S|X'| \end{array}$$

und wir werden wissen, daß der obere Pfeil einen Isomorphimus auf der Homologie induziert, sobald wir das für die drei anderen Pfeile wissen.

Rechter Pfeil: $|X| \to |X'|$, als Homotopie-Äquivalenz topologischer Räume, induziert einen Isomorphismus auf der Homologie.

Unterer Pfeil: $X' \to S|X'|$ ist *simpliziale* Homotopie-Äquivalenz (da X' Kan-Komplex ist); und induziert folglich einen Isomorphismus auf der Homologie.

Linker Pfeil: Es ist klar (oder?), daß es genügt, zu zeigen: Wenn Y^+ aus Y durch eine (einzige) Trichter-Füllung entsteht, $Y^+ = Y \cup_{\Lambda_i^n} \Delta^n$, dann ist die Inklusion $Y \to Y^+$ ein Isomorphismus auf der Homologie. Oder, äquivalent dazu: die relative Homologie $H_*(Y^+, Y)$ ist *null*.

Die relative Homologie berechnet sich aus der simplizialen abelschen Gruppe

$$\operatorname{coker}(\ \mathbb{Z}[Y] \longrightarrow \mathbb{Z}[Y^+]\ ) \cong \operatorname{coker}(\ \mathbb{Z}[\Lambda_i^n] \longrightarrow \mathbb{Z}[\Delta^n]\ ) .$$

Wir werden also wissen, daß sie null ist, sobald wir wissen, daß die Inklusion $\Lambda_i^n \to \Delta^n$ einen Isomorphismus auf der Homologie induziert. Hinreichend dafür ist es, zu wissen, daß die Inklusion "i-te Ecke"

$$\Delta^0 \longrightarrow \Lambda_i^n \quad , \qquad \Delta^0 \longrightarrow \Delta^n$$

in beiden Fällen einen Deformationsretrakt bezüglich simplizialer Homotopie ergibt. Dazu überlegt man, daß es eine Folge von (zwei) simplizialen Homotopien zwischen der jeweiligen identischen Abbildung und der trivialen Abbildung in die i-te Ecke gibt. [Man kommt mit einer einzigen Homotopie aus, wenn $i = 0$ oder $i = n$; ansonsten benötigt man zwei.]

Es ist klar (oder?), daß die Operation mit der simplizialen Struktur verträglich ist; und daß sie *frei* ist. Der Übergang zum Bahnenraum läuft nun einfach darauf hinaus, daß das neu hinzugekommene " g_0 " wieder weg gelassen wird; es ist also auch klar, daß die simpliziale Menge der Bahnen gleich BG ist.

Es bleibt zu zeigen, daß EG im schwachen Sinne 'zusammenziehbar' ist. Dazu zeigen wir, daß EG sogar im *starken* Sinne zusammenziehbar ist; nämlich, daß die identische Abbildung auf EG simplizial homotop ist zu einer trivialen Abbildung. Wir geben dafür drei Beweise — oder, wenn man so will: drei verschiedene (oder wenig verschiedene) Formulierungen von ein- und demselben Argument. (Selbstverständlich würde es auch reichen, von diesen drei Formulierungen nur eine einzige zu geben.)

1. Beweis für $EG \simeq *$. Wenn man den 'kombinatorischen Wegeraum' der simplizialen Menge BG bildet,

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\text{shift}} \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{BG} (\text{Mengen}) \ , \qquad [n] \longmapsto BG_{n+1} \ ,$$

so erhält man gerade die simpliziale Menge EG. Es folgt (wie wir wissen), daß EG simplizial homotopie-äquivalent ist zu dem trivialen simplizialen Objekt $[n] \mapsto BG_0$.

2. Beweis für $EG \simeq *$. Wir zeigen, daß EG ein 'azyklischer Kan-Komplex' ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß jede Abbildung $\partial\Delta^n \to EG$ fortgesetzt werden kann zu einer Abbildung $\Delta^n \to EG$.

Für $n = 0$ ist dafür nicht viel zu zeigen: es gibt mindestens eine Abbildung von Δ^0 zu EG, da EG nicht-leer ist.

Für $n > 0$ haben Δ^n und $\partial\Delta^n$ dasselbe 0-Skelett. Wir werden deshalb wissen, daß (für $n > 0$) die Einschränkungs-Abbildung

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, EG) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\partial\Delta^n, EG)$$

bijektiv ist (und insbesondere deshalb surjektiv), sobald wir wissen, daß (für alle n) die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(\Delta^n, EG) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Sk}_0(\Delta^n), EG)$$

bijektiv ist; das heißt, daß ein Simplex in EG bestimmt ist (und bestimmbar ist) durch die Menge seiner Ecken. Das ist aber klar. Zum Beispiel einem 2-Simplex $(g_0 \,|\, g_1 \,|\, g_2)$ entspricht die Eckenmenge (in $(EG_0)^3 = G^3$):

$$(\text{0-te Ecke}, \text{1-te Ecke}, \text{2-te Ecke}) \ = \ (\, g_0 \ , \ g_0 \cdot g_1 \ , \ g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \,) \ .$$

3. Beweis für $EG \simeq *$. EG ist selbst der Nerv einer Kategorie; nennen wir diese eG. Die Menge der Objekte von eG ist die unterliegende Menge von G. Und ein Morphismus in eG, von g_0 zu g_0', ist ein Gruppenelement g mit der Eigenschaft, daß $g_0 \circ g = g_0'$. Offenbar gibt es ein solches Gruppenelement, und zwar genau eines. Die Eindeutigkeit der Morphismen bedeutet, daß jedes Objekt in der Kategorie eG ein *terminales* Objekt ist. Man hat deshalb eine natürliche Transformation vom identischen Funktor zu einem konstanten Funktor (nämlich dem konstanten Funktor zu einem ausgewählten terminalen Objekt); folglich hat man auch, per 'Nerv', eine Homotopie von der identischen Abbildung auf EG zu einer konstanten Abbildung. □

Bi-simpliziale Mengen, simpliziale Räume

Wir haben eine Situation kennengelernt, wo eine simpliziale Struktur "generiert" wird: aus einer Gruppe entsteht durch die Bar-Konstruktion eine simpliziale Menge.

Wenn in solch einer Situation schon eine simpliziale Struktur da ist, so bekommt man durch die Konstruktion eine *zweite* simpliziale Struktur. In vernünftigen Fällen wird die zweite simpliziale Struktur mit der ersten 'kompatibel' sein. Zum Beispiel ist das so (wie sich herausstellt), wenn man die Bar-Konstruktion auf eine simpliziale Gruppe anwendet.

Zwei simpliziale Strukturen zusammen — und kompatibel — geben das, was wir als eine "bi-simpliziale Struktur" bezeichnen wollen:

Definition. Eine *bisimpliziale Menge* ist ein Funktor:

$$\begin{aligned} X:\quad \Delta^{\mathrm{op}}\times\Delta^{\mathrm{op}} &\longrightarrow \text{(Mengen)} \\ (\ [m]\,,\,[n]\ ) &\longmapsto X_{m,n} \end{aligned}$$

Ebenso wie man eine simpliziale Menge interpretieren kann als einen Code für das Zusammenkleben von geometrischen Standard-Simplizes ∇^n,

$$\nabla^n \;=\; \left\{\ (x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\ \middle|\ x_i\geq 0\ ,\ \textstyle\sum x_i=1\ \right\}\ ,$$

so kann man auch eine bisimpliziale Menge interpretieren als einen Code für einen Verklebe-Prozeß — nicht für das Zusammenkleben von Simplizes diesmal, sondern für das von Zusammenkleben von 'Prismen'; wo unter einem *Prisma* das Produkt von zwei Simplizes verstanden sein soll: $\nabla^m\times\nabla^n$.

Man definiert nämlich die *geometrische Realisierung* einer bisimplizialen Menge X wie folgt. Für jedes (m,n) und für jedes Element von $X_{m,n}$ nimmt man ein Prisma $\nabla^m\times\nabla^n$ und tut die alle zusammen; man bildet also die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{m,n}\ X_{m,n}\ \times\ \nabla^m\times\nabla^n\ .$$

Von dieser disjunkten Vereinigung nimmt man den Quotientenraum bezüglich einer Äquivalenzrelation (eine Variante dessen, was wir von der geometrischen Realisierung einer simplizialen Menge her kennen): für die "m–Richtung" hat man die Relation, daß für jede Abbildung $\alpha\colon [m]\to[m']$, für jedes n und jedes $x\in X_{m',n}$, die Abbildung

$$\alpha_*:\ \{\alpha^*(x)\}\times\nabla^m\times\nabla^n\ \longrightarrow\ \{x\}\times\nabla^{m'}\times\nabla^n$$

eine Identifizierung werden soll; und für die n–Richtung hat man die analoge Relation.

Wenn $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Kategorien sind, so bezeichne $\mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ die entsprechende Funktorkategorie: die Objekte von $\mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ sind die Funktoren von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{C}$, und die Morphismen sind die natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren. Man hat für Funktorkategorien das "Exponentialgesetz" :

$$\mathrm{Fun}(\,\mathcal{A}\,,\,\mathrm{Fun}(\,\mathcal{B}\,,\,\mathcal{C}\,)\,) \;\cong\; \mathrm{Fun}(\,\mathcal{A}\times\mathcal{B}\,,\,\mathcal{C}\,)$$

Insbesondere kann eine bisimpliziale Menge deshalb übersetzt werden in einen Funktor (ein "simpliziales Objekt in der Kategorie der simplizialen Mengen")

$$\Delta^{\mathrm{op}} \;\longrightarrow\; (\;\Delta^{\mathrm{op}} \;\longrightarrow\; (\text{Mengen})\;)\;\;.$$

Und zwar geht das auf zwei Weisen, je nachdem welche der beiden 'simplizialen Richtungen' man als die "erste" ansehen will; die eine der beiden Möglichkeiten ist:

$$[m] \;\longmapsto\; (\;[n] \;\mapsto\; X_{m,n}\;)\;\;.$$

Für festes m kann man die simpliziale Menge $[n] \mapsto X_{m,n}$ geometrisch realisieren. Da 'geometrische Realisierung' ihrerseits eine funktorielle Konstruktion ist, bekommt man so (wenn m nun wieder als variabel angesehen wird) einen Funktor

$$[m] \;\;\longmapsto\;\; \big|\;[n] \;\mapsto\; X_{m,n}\;\big|\;\;,$$

das heißt, ein "simpliziales Objekt in der Kategorie der topologischen Räume" ; oder, wie wir dafür kurz auch sagen wollen, einen "simplizialen Raum".

Der Konstruktion dieses simplizialen Raumes lag eine 'partielle' geometrische Realisierung zugrunde (eben die "Realisierung in der n-Richtung"). Durch einen weiteren Verklebe-Prozeß (die "Realisierung in der m-Richtung") bekommt man daraus die geometrische Realisierung der bisimplizialen Menge in der oben beschriebenen Form. Es ist angebracht, diesen zweiten Verklebe-Prozeß in etwas größerer Allgemeinheit zur Kenntnis zu nehmen:

Für einen *simplizialen Raum*, $[m] \mapsto Y_m$, ist die *geometrische Realisierung* definiert als derjenige Quotientenraum der disjunkten Vereinigung,

$$\big|\;[m] \mapsto Y_m\;\big| \quad := \quad \coprod_m Y_m \times \nabla^m \;\;/\;\sim\;\;,$$

wo die Äquivalenzrelation die 'übliche' ist: für jede Abbildung $\alpha\colon\,[m] \to [m']$, für jedes $y \in Y_{m'}$ und jedes $t \in \nabla^m$, sind die beiden Punkte

$$Y_m \times \nabla^m \quad\ni\quad (\,\alpha^*(y)\,,\,t\,) \quad \text{und} \quad (\,y\,,\,\alpha_*(t)\,) \quad\in\quad Y_{m'} \times \nabla^{m'}$$

miteinander zu identifizieren.

Mit dieser Begriffsbildung ist die geometrische Realisierung der bisimplizialen Menge $(\;[m]\,,\,[n]\;) \;\longmapsto\; X_{m,n}$ nunmehr beschreibbar als die 'iterierte' Realisierung:

$$\Big|\;\;[m] \;\;\longmapsto\;\; \big|\;[n] \;\mapsto\; X_{m,n}\;\big|\;\;\Big|$$

(dabei benutzen wir, insbesondere, daß die beiden Konstruktionen "Bildung eines Quotientenraumes" und "Produkt mit ∇^m" miteinander kompatibel sind).

Beispiel. Seien $[m] \mapsto V_m$ und $[n] \mapsto W_n$ simpliziale Mengen. Wir definieren eine bisimpliziale Menge als das 'Produkt' dieser beiden:

$$([m] , [n]) \longmapsto V_m \times W_n \ .$$

Die partielle Realisierung davon ("Realisierung in n-Richtung") ist der simpliziale Raum

$$[m] \longmapsto \Big| [n] \mapsto V_m \times W_n \Big| \cong V_m \times \Big| [n] \mapsto W_n \Big| \ .$$

Das heißt, in Dimension m hat man hier das Produkt von der Menge V_m mit dem Raum $\big| [n] \mapsto W_n \big|$; einem Raum, der von der Dimension m in gar keiner Weise abhängt. Es folgt, daß die geometrische Realisierung von dem simplizialen Raum

$$[m] \longmapsto V_m \times \Big| [n] \mapsto W_n \Big|$$

isomorph ist zu dem Produkt von dem Raum $\big| [n] \mapsto W_n \big|$ mit der geometrischen Realisierung von der simplizialen Menge $[m] \mapsto V_m$; jedenfalls folgt das bis auf das übliche technische Detail, daß man ein wenig aufpassen muß, wenn man möchte, daß eine Quotientenraumkonstruktion (wie bei der geometrischen Realisierung von $[m] \mapsto V_m$) kompatibel sein soll mit der Produktbildung mit einem Raum (wie $\big| [n] \mapsto W_n \big|$). — Wie wir wissen, so ist die fragliche Kompatibilität jedenfalls dann gewährleistet, wenn $\big| [n] \mapsto W_n \big|$ *kompakt* (oder *lokal-kompakt*) ist ; alternativ: auch dann, wenn vereinbart wird, daß "Räume" für unsere Zwecke sämtlich mit der kompakt-erzeugten Topologie versehen sein sollen.

Aufgrund der Diskussion in diesem Beispiel folgt der uns bekannte Satz " $|X \times Y|$ ist isomorph zu $|X| \times |Y|$ " (vorausgesetzt, sagen wir, daß $|Y|$ kompakt ist) aus dem nun folgenden Satz:

Definition. Sei $([m] , [n]) \mapsto X_{m,n}$ eine bisimpliziale Menge. Die *diagonale simpliziale Menge*, $[n] \mapsto X_{n,n}$, ist die Komposition:

$$\Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\text{Diagonale}} \Delta^{\mathrm{op}} \times \Delta^{\mathrm{op}} \xrightarrow{X} (\text{Mengen})$$

Satz. *Die geometrische Realisierung einer bisimplizialen Menge* $([m] , [n]) \mapsto X_{m,n}$ *ist in natürlicher Weise isomorph zu der geometrischen Realisierung ihrer diagonalen simplizialen Menge* $[n] \mapsto X_{n,n}$.

Beweis (Skizze). Das geht in zwei Schritten. Zunächst prüft man die Behauptung nach in dem Spezialfall des repräsentierbaren Funktors

$$([m] , [n]) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\Delta \times \Delta}(([m] , [n]) , ([k] , [l])) \ .$$

Dieser Funktor ist dasselbe wie das Produkt von Δ^k und Δ^l, *aufgefaßt als bisimpliziale Menge*. Die geometrische Realisierung davon, im Sinne von bisimplizialen Mengen (s. oben), ist $\nabla^k \times \nabla^l$. Die Diagonale dieser bisimplizialen Menge ist ebenfalls das Produkt $\Delta^k \times \Delta^l$, wobei aber diesmal das Produkt als *simpliziale Menge* gebildet wird. Die erforderliche Nachprüfung, daß $|\Delta^k \times \Delta^l| \cong |\Delta^k| \times |\Delta^l|$, hatten wir seinerzeit gemacht in einem Fall, der (wie sich herausstellt) nicht sehr weit vom allgemeinen Fall entfernt ist; nämlich dem Fall, wo $l = 1$ (wo aber k nicht weiter eingeschränkt ist).

Der zweite Schritt des Beweises ist kategorien-theoretischer Art. Wir müssen dafür ein wenig ausholen. Sei $\mathcal{C}$ eine (kleine) Kategorie. Bezeichne $\widehat{\mathcal{C}}$ die Kategorie der kontravarianten mengenwertigen Funktoren auf $\mathcal{C}$,

$$\widehat{\mathcal{C}} \;=\; \left\{\, F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \;\middle|\; F \text{ Funktor} \,\right\} .$$

$\mathcal{C}$ bildet nach $\widehat{\mathcal{C}}$ ab durch den Funktor

$$\mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} \;, \quad A \longmapsto F_A \;,$$

der jedem Objekt $A \in \mathcal{C}$ den davon repräsentierten Funktor F_A zugeordnet,

$$F_A : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}) \;, \qquad F_A(B) \;:=\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\, B \,,\, A\,) \;.$$

Für $A \in \mathcal{C}$ und $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ hat man eine Abbildung 'Evaluation',

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\, F_A \,,\, F\,) \;\longrightarrow\; F(A) \;;$$

sie resultiert daraus, daß man eine Abbildung $F_A \to F$ auswertet an der Stelle A, und insbesondere an dem Element

$$\mathrm{Id}_A \;\in\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\, A \,,\, A\,) \;=\; F_A(A) \;.$$

Lemma (Yoneda-Lemma). *Die Abbildung* $\mathrm{ev} : \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(F_A, F) \to F(A)$ *ist bijektiv.*

Beweis. Die Injektivität der Evaluations-Abbildung ist gleichbedeutend damit, daß eine natürliche Transformation $f : F_A \to F$ durch ihren Wert auf Id_A schon festgelegt ist. Das ist aber klar: Ist $a : B \to A$ ein Element von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \;=\; F_A(B)$, dann ist dies Element auch das Bild von Id_A unter der Abbildung $a^* : F_A(A) \to F_A(B)$. Unter der Abbildung f geht es also auf das Element $a^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A))$, wegen der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{array}{ccc}
F_A(B) & \xrightarrow{\;f\;} & F(B) \\
{\scriptstyle a^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle a^*} \\
F_A(A) & \xrightarrow[\;f\;]{} & F(A)
\end{array}$$

Umgekehrt kann man zu vorgegebenem $\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A)$ die Abbildung f *definieren* durch

$$f(a) \;:=\; a^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A))$$

(für jedes B und jedes $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$). Dies ist dann eine natürliche Transformation von Funktoren $F_A \to F$. Denn sind $b : C \to B$ und $a : B \to A$ komponierbare Morphismen, dann ist

$$b^*(f(a)) \;=\; b^*(a^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A))) \;=\; (ab)^*(\mathrm{ev}(\mathrm{Id}_A)) \;=\; f(ab) \;=\; f(b^*(a)) \;.$$

Daraus resultiert die geforderte Kommutativität der Diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
F_A(C) & \xrightarrow{\;f\;} & F(C) \\
{\scriptstyle b^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle b^*} \\
F_A(B) & \xrightarrow[\;f\;]{} & F(B)
\end{array}$$

□

Nach dem Lemma ist, insbesondere, die Abbildung $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ eine volle Einbettung (Bijektivität von $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(F_A, F_B) \to F_B(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ für A und B aus $\mathcal{C}$).

Für $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ definieren wir eine Kategorie $\mathcal{C}/F$. Die Objekte sind die Paare (A, a),

$$A \in \mathcal{C} \quad , \quad a \in F(A) \quad .$$

Und ein Morphismus in $\mathcal{C}/F$, von (A, a) zu (B, b), ist ein Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$, der der Bedingung genügt, daß die Elemente a und b über die Abbildung $F(f)$ zueinander in Beziehung stehen; also:

$$f : \ A \longrightarrow B \quad , \quad a \ = \ F(f)(b) \quad .$$

Beispiel. Wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie Δ der endlichen geordneten Mengen $[0]$, $[1]$, ... , ist, dann ist $\widehat{\mathcal{C}}$ die Kategorie der mengenwertigen kontravarianten Funktoren auf Δ ; also die Kategorie der simplizialen Mengen. Für eine simpliziale Menge F ist die hier mit Δ/F bezeichnete Kategorie dieselbe wie die, die früher mit $\mathrm{simp}(F)$ bezeichnet wurde.

Die Kategorie $\mathcal{C}/F$ ist also eine Abstraktion (und Verallgemeinerung) der früher betrachteten “Kategorie der Simplizes”.

Lemma (Yoneda-Lemma, Zusatz). *Sei $F \in \widehat{\mathcal{C}}$. F ist Colimes darstellbarer Funktoren:*

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{C}/F}(\ (A, a) \longmapsto F_A \ ) \quad \xrightarrow{\quad \approx \quad} \quad F \quad .$$

Beweis. Colimites in einer Funktorkategorie berechnen sich ‘stellenweise’; zumindest dann, wenn es sich bei der Funktorkategorie um eine Kategorie mengenwertiger Funktoren handelt. Wenn, zum Beispiel, G und G' zwei Funktoren in einer solchen Kategorie sind, dann ist deren disjunkte Vereinigung $G \,\dot{\cup}\, G'$ gegeben durch den Funktor, der an jeder Stelle D den Wert $G(D) \,\dot{\cup}\, G'(D)$ annimmt.

Ähnlich, eine Äquivalenzrelation auf einem solchen Funktor G'' zu haben, läuft darauf hinaus, daß man an jeder Stelle D eine Äquivalenzrelation auf der Menge $G''(D)$ hat; mit der Maßgabe, daß alle diese Äquivalenzrelationen miteinander kompatibel sind (bezüglich der durch den Funktor gegebenen Abbildungen).

Schließlich wird (zum Beispiel) eine Abbildung solcher Funktoren, $G \to G'$, dann surjektiv sein, wenn an jeder Stelle D die Abbildung $G(D) \to G'(D)$ surjektiv ist.

Der im Lemma genannte Colimes berechnet sich wie folgt. Man bildet zunächst die disjunkte Vereinigung (in der Kategorie $\widehat{\mathcal{C}}$)

$$\coprod_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/F)} F_A \quad = \quad \coprod_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \Big(\coprod_{a \in F(A)} F_A \Big)$$

und dann, in einem zweiten Schritt, den Quotienten davon bezüglich einer Äquivalenzrelation. Nämlich für jeden Morphismus $f : (A, a) \to (B, b)$ in $\mathcal{C}/F$ soll die induzierte Abbildung $(F_A, f^*(b)) \to (F_B, b)$ eine Identifikation werden (wo $f^*(b)$ kurz ist für $F(f)(b)$); das heißt: für jedes Objekt $C \in \mathcal{C}$ und jedes $x \in F_A(C)$ ist das Paar $(x, f^*(b))$ zu identifizieren mit seinem Bild, dem Paar $(f_*(x), b)$ in $(F_B(C), b)$.

Zu dem Index $(A,a) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}/F)$ gehört (nach dem Yoneda-Lemma) eine Abbildung $F_A \to F$; sie hat die Eigenschaft, daß $\mathrm{Id}_A \mapsto a$, und sie ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Man bekommt so eine Abbildung von dem Coprodukt,

$$\coprod_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/F)} F_A \longrightarrow F \ ;$$

diese Abbildung ist surjektiv (denn an der Stelle A ist jedes $a \in F(A)$ im Bild).

Die Abbildung ist mit der Äquivalenzrelation verträglich. Denn ist $f\colon (A,a) \to (B,b)$ ein Morphismus in $\mathcal{C}/F$, so ist $a = f^*(b)$, und das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} F_A & \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \,\mapsto\, f^*(b) \in F(A)} & F \\ {\scriptstyle f_*}\big\downarrow & & \big\| \\ F_B & \xrightarrow[\mathrm{Id}_B \,\mapsto\, b \in F(B)]{} & F \end{array}$$

Denn der linke Pfeil, f_*, bildet das Element $\mathrm{Id}_A \in F_A(A)$ ab auf das Element f in $F_B(A)$, was (nach Definition der Abbildung $F_B \to F$; und wegen $f = f^*(\mathrm{Id}_B)$ in F_B) durch den unteren Pfeil abgebildet wird auf $f^*(\,\mathrm{Bild}(\mathrm{Id}_B)\,) \in F(A)$; also auf $f^*(b)$.

Es bleibt zu zeigen, daß nach dem Übergang zu Äquivalenzklassen diese Abbildung injektiv wird. Nun hat jedes Element $d \in F(D)$ einen kanonischen Repräsentanten, nämlich $(\,\mathrm{Id}_D\,,\,d\,)$ in $(\,F_D(D)\,,\,d\,)$. Wir zeigen, daß jeder andere Repräsentant zu diesem äquivalent ist. Wenn $(e,a) \in (F_A(D),a)$ ein anderer Repräsentant ist, so heißt dies, daß $a \in F(A)$; und daß $e\colon D \to A$ eine Abbildung ist, die der Bedingung genügt:

$$e^*(a) \,=\, d \quad , \quad F(A) \xrightarrow{\ e^*\ } F(D) \ .$$

Nach Definition der Äquivalenzrelation gibt es in dieser Situation die Äquivalenz

$$(\,e\,,\,a\,) \;=\; (e_*(\mathrm{Id}_D)\,,\,a\,) \quad \sim \quad (\,\mathrm{Id}_D\,,\,e^*(a)\,) \;=\; (\,\mathrm{Id}_D\,,\,d\,) \ .$$

□

Beweis des Satzes (Fortsetzung). Nach dem Yoneda-Lemma (bzw. dem Zusatz) ist die bisimpliziale Menge X ein Colimes darstellbarer Funktoren:

$$X \;=\; \mathrm{colim}_{(\Delta\times\Delta)/X}\Big(\;(\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\,,\,z \in X_{k,l}\,) \;\longmapsto\; (\Delta\times\Delta)\,/\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\;\Big) \ .$$

Dabei ist $(\Delta\times\Delta)\,/\,(\,[k]\,,\,[l]\,)$ ein ‘Prisma’; nämlich das Produkt von Δ^k und Δ^l, aufgefaßt als bisimpliziale Menge.

Nun sind die für den Satz relevanten Konstruktionen, geometrische Realisierung einerseits und Diagonalisierung andererseits, beide mit Colimites verträglich; also:

$$\begin{aligned} \big|\,\mathrm{diag}(X)\big| \;&=\; \mathrm{colim}_{(\Delta\times\Delta)/X}\Big(\;(\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\,,\,z \in X_{k,l}\,) \;\longmapsto\; \big|\,\mathrm{diag}(\,(\Delta\times\Delta)\,/\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\,)\,\big|\;\Big) \\ &=\; \mathrm{colim}_{(\Delta\times\Delta)/X}\Big(\;(\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\,,\,z \in X_{k,l}\,) \;\longmapsto\; \big|\,(\Delta\times\Delta)\,/\,(\,[k]\,,\,[l]\,)\,\big|\;\Big) \;=\; \big|\,X\,\big| \end{aligned}$$

unter Benutzung dessen, daß wir die gewünschte Identifizierung im Spezialfall repräsentierbarer Funktoren schon kennen. □

Für den Umgang mit bisimplizialen Mengen hat man den folgenden fundamentalen Sachverhalt. Er spielt für die Praxis eine wichtige Rolle.

Satz (Realisierungs-Lemma). *Sei $X \to X'$ eine Abbildung von bisimplizialen Mengen. Es gelte, daß, für jedes m, die Abbildung von simplizialen Mengen*

$$(\ [n] \longmapsto X_{m,n} \ ) \quad \longrightarrow \quad (\ [n] \longmapsto X'_{m,n} \ )$$

eine schwache Homotopie-Äquivalenz ist (d.h. die Abbildung wird eine Homotopie-Äquivalenz nach geometrischer Realisierung). *Dann ist auch die Abbildung $X \to X'$ eine schwache Homotopie-Äquivalenz* (d.h. ...).

Korollar. *Sei X eine bisimpliziale Menge, derart, daß für jedes m die simpliziale Menge $[n] \mapsto X_{m,n}$ im schwachen Sinne zusammenziehbar ist* (d.h. die Abbildung zur trivialen simplizialen Menge ist eine schwache Homotopie-Äquivalenz). *Dann ist auch X selbst im schwachen Sinne zusammenziehbar.*

Beweis. Sei X' definiert als die triviale bisimpliziale Menge, wo jede der Mengen $X'_{m,n}$ ein einziges Element hat. Die geometrische Realisierung von diesem X' ist der ein-punktige Raum. Es gibt eine Abbildung $X \to X'$. Auf diese Abbildung ist der Satz anwendbar. $\square$

'Moralisch gesprochen' ist das Realisierungs-Lemma ein Spezialfall eines Satzes über simpliziale Räume:

"Satz". " *Sei $Y \to Y'$ eine Abbildung von simplizialen Räumen derart, daß, für jedes m, die Abbildung $Y_m \to Y'_m$ eine Homotopie-Äquivalenz ist. Dann ist auch die Abbildung $|Y| \to |Y'|$ eine Homotopie-Äquivalenz.* "

Die bei der Formulierung benutzten Anführungszeichen sollen andeuten, daß die gegebene Formulierung als Satz nicht ernst gemeint ist; und auch nicht ernst gemeint sein kann. Es gibt Gegenbeispiele.

Allerdings werden wir uns berechtigt fühlen, solche Gegenbeispiele (wir werden sie nicht explizit betrachten) als ein wenig pathologisch anzusehen. Wir werden klären, daß eine Bedingung technischer Art dazu geeignet ist, die Gegenbeispiele zu vermeiden. Das Realisierungs-Lemma resultiert dann daraus, daß die Bedingung automatisch erfüllt sein wird bei solchen simplizialen Räumen, die als partielle geometrische Realisierung einer bisimplizialen Menge auftreten.

Für die Diskussion müssen wir noch eine andere Art von geometrischer Realisierung betrachten:

Definition. Sei Y ein simplizialer Raum. $||Y||$ ist definiert als derjenige Quotientenraum der disjunkten Vereinigung,

$$\Big|\Big|\ [m] \mapsto Y_m\ \Big|\Big| \quad := \quad \coprod_m Y_m \times \nabla^m \ \Big/ \ \sim_{(\ \text{Mor-(inj-}\Delta)\ )} \quad ,$$

wo die Äquivalenzrelation die übliche ist, aber eingeschränkt auf die *injektiven* Abbildungen in der Kategorie Δ ; nämlich für jede injektive Abbildung $\alpha\colon\ [m] \to [m']$, für jedes $y \in Y_{m'}$ und jedes $t \in \nabla^m$, sind die beiden Punkte

$$Y_m \times \nabla^m \quad \ni \quad (\,\alpha^*(y)\,,\,t\,) \quad \text{und} \quad (\,y\,,\,\alpha_*(t)\,) \quad \in \quad Y_{m'} \times \nabla^{m'}$$

miteinander zu identifizieren.

Im Spezialfall simplizialer Mengen ist $||Y||$ das, was früher auch mit $\mathrm{Real}(Y)$ bezeichnet wurde.

Bemerkung. Sei Y ein simplizialer Raum. $||Y||$ kann auch auf andere Weise durch Verklebung erhalten werden. Nämlich $||Y||$ ist natürlich isomorph zu dem Quotientenraum der disjunkten Vereinigung,

$$\coprod_m Y_m \times ||\Delta^m|| \ \Big/ \ \sim_{(\ \text{Mor-}\Delta\ )} \quad ,$$

wo die Äquivalenzrelation wieder die 'übliche' ist: für jede Abbildung $\alpha\colon\ [m] \to [m']$, für jedes $y \in Y_{m'}$ und jedes $t \in ||\Delta^m||$, sind die beiden Punkte

$$Y_m \times \nabla^m \quad \ni \quad (\,\alpha^*(y)\,,\,t\,) \quad \text{und} \quad (\,y\,,\,\alpha_*(t)\,) \quad \in \quad Y_{m'} \times \nabla^{m'}$$

miteinander zu identifizieren.

Beweis. Das steht in engem Zusammenhang mit der Tatsache, daß für eine Δ-Menge deren geometrische Realisierung (im Sinne von Δ-Mengen) auch beschrieben werden kann als die 'richtige' geometrische Realisierung einer zugeordneten simplizialen Menge (sie entsteht aus der Δ-Menge durch das formale Hinzufügen ausgearteter Simplizes). Insbesondere ist $||\Delta^m||$ die geometrische Realisierung derjenigen simplizialen Menge, die aus Δ^m entsteht, indem man erstens die Ausartungsabbildungen vergißt (Übergang zu einer Δ^m-Menge) und zweitens dann ausgeartete Simplizes neu hinzunimmt.

Die resultierende simpliziale Menge hat als n-Simplizes die Paare

$$[n] \ \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \ [k] \quad , \qquad [k] \ \longrightarrow \ [m]$$

wo der zweite Pfeil,

$$(\ [k] \to [m]\ ) \quad \in \quad \mathrm{Hom}_\Delta(\,[k]\,,\,[m]\,) \quad ,$$

ein k-Simplex von Δ^m ist ; und der erste Pfeil,

$$\text{eine } \textit{Surjektion} \qquad [n] \twoheadrightarrow [k] \quad ,$$

davon eine formale Ausartung.

Die geometrische Realisierung dieser simplizialen Menge ist

$$\coprod_{\substack{(\ [n]\twoheadrightarrow[k]\ ,\ [k]\longrightarrow[m]\ ) \\ (\text{ alles variabel, außer } [m]\ )}} \nabla^n \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad .$$

Folglich kann die 'geometrische Realisierung'

$$\coprod_m Y_m \times ||\Delta^m|| \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad ,$$

auch geschrieben werden als:

$$\coprod_m Y_m \times \Bigg(\coprod_{(\ [n]\twoheadrightarrow[k]\ ,\ [k]\longrightarrow[m]\ )} \nabla^n \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \Bigg) \Bigg/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad .$$

Die 'erste' Äquivalenzrelation bezieht sich dabei auf die n-Variable; und die 'zweite' auf die m-Variable. Da es bei einer Kombination von Äquivalenzrelationen auf deren Reihenfolge nicht ankommt, so kann man die beiden Relationen ebensogut vertauschen. Wenn man die Terme noch ein wenig anders schreibt:

$$\coprod_n \nabla^n \times \Bigg(\coprod_{\substack{(\ [n]\twoheadrightarrow[k]\ ,\ [k]\longrightarrow[m]\ ) \\ (\text{außer } [n] \text{ alles variabel})}} Y_m \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \Bigg) \Bigg/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad ,$$

so sieht man, daß man kürzen kann. Man erhält:

$$\coprod_n \nabla^n \times \Bigg(\coprod_{\substack{[n]\twoheadrightarrow[k] \\ (\ [n] \text{ nicht variabel})}} Y_k \Bigg) \Bigg/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )}$$

oder, etwas umgeschrieben,

$$\coprod_{[n]\twoheadrightarrow[k]} \nabla^n \times Y_k \Bigg/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\ )} \quad .$$

Bei der verbliebenen Äquivalenzrelation kann man immer noch kürzen. Nämlich der Anteil zur Äquivalenzrelation, der sich auf die *surjektiven* Abbildungen bezieht, ist kürzbar. Es bleibt übrig:

$$\coprod_k \nabla^k \times Y_k \Bigg/ \sim_{(\text{ Mor-(inj-}\Delta)\ )} \quad ;$$

also die modifizierte geometrische Realisierung, $||Y||$. □

Wir wollen nun ein Kriterium dafür angeben, daß, für einen simplizialen Raum Y, die Abbildung $||Y|| \to |Y|$ eine Homotopie-Äquivalenz ist.

Da die Abbildung so zustande kommt, daß gewisse "ausgeartete Teile" in dem Raum $||Y||$ nachträglich noch 'kollabiert' werden, so wird man als eine geeignete Bedingung eine Hypothese der Art erwarten, daß es sich bei den zu kollabierenden Teilen um "vernünftige" Unterräume handelt; also etwas der Art, daß die Inklusions-Abbildung die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (HEE) hat.

Definition. Für einen simplizialen Raum Y bezeichne der 'ausgeartete' Unterraum

$$\operatorname{aus}(Y_m) \quad \subset \quad Y_m$$

die Vereinigung der Bilder der Ausartungs-Abbildungen $Y_{m-1} \to Y_m$. Der simpliziale Raum Y heiße *gut*, wenn jede der Inklusionen $\operatorname{aus}(Y_m) \to Y_m$ die HEE hat.

Tatsächlich benötigen wir etwas, das möglicherweise stärker ist als die gerade beschriebene Bedingung — möglicherweise aber auch nicht stärker. Um nicht diese, für uns nicht relevante, Angelegenheit diskutieren zu müssen, werden wir einfach die Bedingung in ihrer stärkeren Form fordern; die formulieren wir jetzt.

Definition. Ein simplizialer Raum Y heißt *sehr gut*, wenn, für jedes m und für jede Inklusion von simplizialen Mengen $K \subset L$, die resultierende Inklusion

$$\operatorname{aus}(Y_m) \times |L| \cup_{\operatorname{aus}(Y_m) \times |K|} Y_m \times |K| \quad \longrightarrow \quad Y_m \times |L|$$

die HEE hat.

Bemerkung. Wenn $(\,[m],[n]\,) \to X_{m,n}$ eine bisimpliziale Menge ist, und Y ein daraus durch partielle Realisierung entstehender simplizialer Raum,

$$Y_m \quad = \quad \Big|\ [n] \ \longmapsto \ X_{m,n}\ \Big|\ ,$$

dann ist Y 'sehr gut' im Sinne der gerade gegebenen Definition.

Beweis. Es bezeichne Z_m die (partielle) simpliziale Menge

$$Z_m \quad = \quad (\ [n] \mapsto X_{m,n}\ )\ ;$$

und $\operatorname{aus}(Z_m)$ die Unter-simpliziale-Menge darin, die gegeben ist durch die Bilder der Abbildungen $Z_{m-1} \to Z_m$ (Ausartungs-Abbildungen in der m-Richtung). Die fragliche Inklusion in der obigen Definition resultiert aus der Inklusion von simplizialen Mengen

$$\operatorname{aus}(Z_m) \times L \cup_{\operatorname{aus}(Z_m) \times K} Z_m \times K \quad \longrightarrow \quad Z_m \times L$$

durch die geometrische Realisierung. Es handelt sich folglich um eine zelluläre Inklusion von CW-Komplexen; und insbesondere, deshalb, um eine Abbildung mit der Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft. $\square$

Lemma. *Der simpliziale Raum Y sei 'sehr gut'. Die Abbildung*

$$||Y|| \longrightarrow |Y|$$

ist eine Homotopie-Äquivalenz.

Beweis. Die Idee für den Beweis ist, daß man die Abbildung schreiben kann als eine aufsteigende Vereinigung von Abbildungen von "Skeletten",

$$||Y||^k \longrightarrow |Y|^k ,$$

und daß es deshalb genügen wird, zu zeigen, daß jede von *diesen* Abbildungen eine Homotopie-Äquivalenz ist. Der Beweis dafür geht durch Induktion über k.

Aufgrund einer obigen Umformulierung können wir die Abbildung $||Y|| \to |Y|$ auch schreiben als eine von den Abbildungen $||\Delta^m|| \to |\Delta^m|$ induzierte Abbildung

$$\coprod_m Y_m \times ||\Delta^m|| \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\text{ })} \quad \longrightarrow \quad \coprod_m Y_m \times |\Delta^m| \Big/ \sim_{(\text{ Mor-}\Delta\text{ })} \quad .$$

Das k-Skelett, links, ist definiert als der aus den Y_m bis zur Nummer k gebildete Teilraum:

$$||Y||^k \quad = \coprod_{0 \leq m \leq k} Y_m \times ||\Delta^m|| \Big/ \sim \qquad \big(\text{induzierte Äquivalenzrelation}\big)$$

Wenn man dem letzten der Terme in dem Coprodukt eine Sonder-Rolle zuweist, so sieht man, daß $||Y||^k$ auch erhalten werden kann als das Resultat einer Verklebung; nämlich aus dem Klebe-Diagramm:

$$||Y||^{k-1} \longleftarrow \text{aus}(Y_k) \times ||\Delta^k|| \cup_{\text{aus}(Y_k) \times ||\partial\Delta^k||} Y_k \times ||\partial\Delta^k|| \longrightarrow Y_k \times ||\Delta^k||$$

Für das anlog definierte k-Skelett, rechts, hat man eine ähnliche Beschreibung durch ein Verklebe-Digramm.

Man hat nun eine Abbildung zwischen diesen Verklebe-Diagrammen; also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
||Y||^{k-1} & \longleftarrow & \text{aus}(Y_k) \times ||\Delta^k|| \cup_{\text{aus}(Y_k) \times ||\partial\Delta^k||} Y_k \times ||\partial\Delta^k|| & \longrightarrow & Y_k \times ||\Delta^k|| \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
|Y|^{k-1} & \longleftarrow & \text{aus}(Y_k) \times |\Delta^k| \cup_{\text{aus}(Y_k) \times |\partial\Delta^k|} Y_k \times |\partial\Delta^k| & \longrightarrow & Y_k \times |\Delta^k|
\end{array}$$

Wegen der Hypothese, daß Y ein "sehr guter" simplizialer Raum sein soll, ist die HEE sichergestellt für die horizontalen Pfeile auf der rechten Seite von dem Diagramm. Das Klebe-Lemma ist also anwendbar, und wir werden deshalb wissen, daß die Abbildung der verklebten Räume eine Homotopie-Äquivalenz ist, sobald wir wissen, daß die drei vertikalen Abbildungen in dem Diagramm sämtlich Homotopie-Äquivalenzen sind.

Für den linken Pfeil gilt das nach Induktions-Voraussetzung. Für den rechten Pfeil folgt es aus der uns bekannten Tatsache, daß, für simpliziale Mengen, die Abbildung

$$||Z|| \longrightarrow |Z|$$

(früher bekannt als $\mathrm{Real}(Z) \to |Z|$) eine Homotopie-Äquivalenz ist; insbesondere ist $||\Delta^k|| \longrightarrow |\Delta^k|$ eine Homotopie-Äquivalenz.

Für den mittleren Pfeil betrachten wir das weitere Klebe-Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{aus}(Y_k) \times ||\Delta^k|| \arrow[d] & \mathrm{aus}(Y_k) \times ||\partial\Delta^k|| \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Y_k \times ||\partial\Delta^k|| \arrow[d] \\
\mathrm{aus}(Y_k) \times |\Delta^k| & \mathrm{aus}(Y_k) \times |\partial\Delta^k| \arrow[l] \arrow[r] & Y_k \times |\partial\Delta^k|
\end{tikzcd}$$

Wieder ist die HEE für die rechten horizontalen Pfeile sichergestellt. Und die vertikalen Pfeile sind Homotopie-Äquivalenzen aus dem schon genannten Grund, daß, für eine simpliziale Menge Z, die Abbildung $||Z|| \to |Z|$ eine Homotopie-Äquivalenz ist. $\square$

Der noch zu beweisende Satz (‘Realisierungs-Lemma’) ist, nach einer oben gemachten Bemerkung (“eine partielle Realisierung einer bisimplizialen Menge ist ein ‘sehr guter’ simplizialer Raum”) ein Spezialfall von dem folgenden Satz.

Satz. *Sei $Y \to Y'$ eine Abbildung von simplizialen Räumen derart, daß, für jedes m, die Abbildung $Y_m \to Y'_m$ eine Homotopie-Äquivalenz ist. Y und Y' seien ‘sehr gute’ simpliziale Räume. Dann ist die Abbildung $|Y| \to |Y'|$ eine Homotopie-Äquivalenz.*

Beweis. Man hat ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
||Y|| \arrow[r] \arrow[d] & ||Y'|| \arrow[d] \\
|Y| \arrow[r] & |Y'|
\end{tikzcd}$$

Wegen dem vorangegangenen Lemma und der Hypothese ‘sehr gut’ sind die vertikalen Pfeile in diesem Diagramm Homotopie-Äquivalenzen. Es wird also genügen, zu zeigen, daß die Abbildung $||Y|| \longrightarrow ||Y'||$ eine Homotopie-Äquivalenz ist; und das werden wir auch zeigen.

Zum Beweis wird es genügen, die Abbildung $||Y|| \longrightarrow ||Y'||$ zu schreiben als eine aufsteigende Vereinigung von Abbildungen von “Skeletten” $||Y||_k \longrightarrow ||Y'||_k$ (die ‘Skelette’ sind andere als in dem vorigen Beweis); und dann zu zeigen, daß jede dieser Abbildungen eine Homotopie-Äquivalenz ist. Der Beweis dafür geht durch Induktion über k.

Wir verwenden wieder die andere Beschreibung von der 'groben' Realisierung, die ursprüngliche Definition:

$$||Y|| \quad = \quad \coprod_m Y_m \times \nabla^m \Big/ \sim_{(\text{ Mor-(inj-}\Delta\text{) })}$$

Wir schreiben $||Y||_k$ für den Teilraum, den wir bekommen, wenn wir nur die Y_m bis zur Nummer k verwenden:

$$||Y||_k \quad = \quad \coprod_{0 \le m \le k} Y_m \times \nabla^m \Big/ \backsim \qquad \big(\text{induzierte Äquivalenzrelation}\big)$$

Indem wir dem letzten Term in dem Coprodukt eine ausgezeichnete Rolle zuweisen, bekommen wir eine Darstellung von $||Y||_k$ als einen zusammengeklebten Raum, mit Hilfe von einem Verklebe-Diagramm:

$$||Y||_{k-1} \longleftarrow Y_k \times \partial\nabla^k \longrightarrow Y_k \times \nabla^k$$

(wo $\partial\nabla^k$ den Rand bezeichnet; oder, was dasselbe ist: $\partial\nabla^k = \partial|\Delta|^k := |\partial\Delta^k|$).

Mit einem ähnlichen Verklebe-Diagramm, den Zielraum $||Y'||$ betreffend, hat man nun eine Abbildung zwischen Verklebe-Diagrammen:

$$\begin{array}{ccccc}
||Y||_{k-1} & \longleftarrow & Y_k \times \partial\nabla^k & \longrightarrow & Y_k \times \nabla^k \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
||Y'||_{k-1} & \longleftarrow & Y'_k \times \partial\nabla^k & \longrightarrow & Y'_k \times \nabla^k
\end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind Homotopie-Äquivalenzen nach Voraussetzung (rechts und in der Mitte), bzw. nach Induktions-Voraussetzung (links). Mit dem Klebe-Lemma folgt, daß die Abbildung der verklebten Räume,

$$||Y||_k \longrightarrow ||Y'||_k \ ,$$

ebenfalls eine Homotopie-Äquivalenz ist.

$\square$

Friedhelm Waldhausen

Received: December 19, 1995

Communicated by Ulf Rehmann

Abstract. A re-make, not of the construction, but of its description.

By an *ordered graph* will be meant a triple of sets (P, N, E) together with a pair of structure maps, $N \leftarrow E \rightarrow P$. These data are to be thought of as 'positive vertices', 'negative vertices', 'edges', and 'incidence relations', respectively.

An ordered graph is a sort of ordered simplicial complex. It can be made into a simplicial set by adding degenerate simplices. The details of this step can be neatly described by means of an auxiliary category C_Γ associated to the ordered graph Γ. The set of objects of C_Γ is the disjoint union $N \dot\cup P$; the set of non-identity morphisms is the set E, and the source and target functions on E are given by the two maps $E \rightarrow N$ and $E \rightarrow P$, respectively. The category is a little unusual insofar as no two morphisms in it can be composable unless at least one of them is an identity morphism.

The *nerve* construction produces a simplicial set $N(C_\Gamma)$ now: an m-simplex is a functor $[m] \rightarrow C_\Gamma$ (where $[m]$ denotes the ordered set $(0 < 1 < \cdots < m)$, regarded as a category). The set of m-simplices is thus a disjoint union $N \dot\cup E \dot\cup \ldots \dot\cup E \dot\cup P$, with one entry "$E$" for each surjective monotone map $[m] \rightarrow [1]$. The simplicial set $N(C_\Gamma)$ is 1-*dimensional* in the sense that every non-degenerate simplex has dimension ≤ 1. Instead of $N(C_\Gamma)$ we will henceforth write $N(\Gamma)$ for this simplicial set.

The geometric realization $|N(\Gamma)|$ is a *CW* complex of dimension ≤ 1. The 0-cells of $|N(\Gamma)|$ are indexed by the set $N \dot\cup P$ (disjoint union), and the 1-cells are indexed by the set E.

We will suppose now that the ordered graph Γ is *connected* (equivalently, that the *CW*-complex $|N(\Gamma)|$ is) and *pointed* (i.e., equipped with the choice of an element $x \in P$). We may then speak of the *fundamental group* $\pi_1(\Gamma, x)$. It can be described as the fundamental group of the *CW*-complex $|N(\Gamma)|$ based at $|x|$ or else, in somewhat more combinatorial terms, as the *edge path group* of Γ based at x.

We may also speak of the *universal covering* of Γ (with respect to the chosen basepoint x). This is an ordered graph $\widetilde{\Gamma}$. It comes equipped with an action of $\pi_1(\Gamma, x)$, and with a map $\widetilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$; and these two pieces of data are such that they make $\widetilde{\Gamma}$ into a principal $\pi_1(\Gamma, x)$-bundle over Γ (by definition, this means that the action is free, and that the quotient by the action is identified to Γ by the given map). The construction of all this is as follows, by covering space theory. An element of $\widetilde{N}$ (a 'negative vertex' of $\widetilde{\Gamma}$) consists of a pair of data in Γ, namely (i) a 'negative vertex' v of Γ and (ii) a homotopy class of paths connecting v to the chosen basepoint x. The map $\widetilde{N} \rightarrow N$ is defined as the forgetful map which forgets the path; and the action of $\pi_1(\Gamma, x)$ on $\widetilde{N}$ is given by composing the path with the loop in question. The other data are given similarly.

As we have implicitly used before, the ordered graphs are the objects of a category in an evident way: a map in this category is a triple of maps of sets, $P \to P'$, $N \to N'$, $E \to E'$, so that these maps are compatible to the structure maps of the two ordered graphs in question. It makes sense, consequently, to speak of a *simplicial ordered graph*, a simplicial object in the category of ordered graphs. We note that a simplicial ordered graph will give rise to a bisimplicial set, by *nerve*, and hence to a *CW*-complex, by geometric realization (this particular geometric realization uses 'prisms'; an equivalent construction, up to canonical isomorphism, would be to pass to the diagonal simplicial set first and then take the geometric realization of that diagonal simplicial set). We are in a position now to describe our basic construction. The construction is implicit in Kan's paper [1], but it was not made explicit there.

CONSTRUCTION. Let $X\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{sets})$, $[n] \mapsto X_n$, be a simplicial set. There is an associated simplicial ordered graph. It has $P_n = X_n$, $N_n = X_0$, $E_n = X_{n+1}$, and the maps $E_n \to P_n$ and $E_n \to N_n$ are given by the 'last face' map and 'last vertex' map, respectively. This simplicial ordered graph will be denoted ΓX.

(Here are some more details. The simplicial set $P_{\bullet}$ is defined to be isomorphic to X itself, while $N_{\bullet}$ is defined as the set X_0 considered as a simplicial set in a trivial way. Concerning $E_{\bullet}$, if $\alpha\colon [n] \to [n']$ is a monotone map then $\alpha^* : E_{n'} \to E_n$ is defined to be the map $X_{n'+1} \to X_{n+1}$ induced from $\alpha \cup \{\infty\} : [n] \cup \{\infty\} \to [n'] \cup \{\infty\}$. The map $E_n \to P_n$ is defined to be the map $X_{n+1} \to X_n$ induced from the injective map $[n] \to [n{+}1]$ which misses $n{+}1$, and the map $E_n \to N_n$ is defined to be the map $X_{n+1} \to X_0$ induced from the map $[0] \to [n{+}1]$ taking 0 to $n{+}1$.)

Considering X as a simplicial ordered graph in a trivial way (no edges, no negative vertices) we have a natural inclusion $X \to \Gamma X$. The following will be shown later.

LEMMA. *The map $X \to \Gamma X$ is a weak homotopy equivalence.*

We will suppose now that the simplicial set X is connected and that it is equipped with a basepoint (that is, the choice of an element in X_0). Then $\Gamma_n X$, the ordered graph in degree n of the simplicial ordered graph ΓX, will also be connected (a proof of this fact will be given below) and it will be equipped with a basepoint x_n (namely the degenerate in degree n of the chosen element in X_0). ΓX can thus be considered as a simplicial object of *pointed* ordered graphs, and we can therefore define a simplicial group $G = G(X)$,

$$[n] \ \mapsto \ G_n := \pi_1(\Gamma_n X, x_n) \ .$$

THEOREM. *The simplicial group G is a loop group for X.*

PROOF. In view of the lemma it will suffice to show that there is a principal G-bundle over ΓX with weakly contractible total space ('weakly contractible' means that the map to the one-point-space is a weak homotopy equivalence). For by pulling back such a bundle along the map $X \to \Gamma X$ we can obtain a principal G-bundle over X, and the total space of the latter bundle will again be weakly contractible. (This is so since, for example, a map of principal bundles of simplicial sets is also a map of Kan fibrations [2, Satz 9.5] and the geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration [3]. So the Whitehead theorem applies.)

The universal covering of a pointed ordered graph, as described above, is *functorial*. Hence we have a simplicial ordered graph $[n] \mapsto \widetilde{\Gamma}_n X$, it is obtained from $[n] \mapsto \Gamma_n X$ (that is, from ΓX) by taking the universal covering degreewise. This simplicial ordered graph is weakly contractible in every degree; hence (by [4, Appendix A] for example) it is also weakly contractible globally.

The desired principal bundle is now obtained by observing that the simplicial group G acts on $\widetilde{\Gamma}X$, that the action is free, and that the quotient of $\widetilde{\Gamma}X$ by the action is just ΓX again. $\square$

Proof of Lemma. We give two proofs, both fairly self-contained. The short proof is in an appendix; here is the pedestrian one.

The category of ordered graphs, as well as the category of simplicial sets, is a *functor category*, namely the category of $\nwarrow\!\!\searrow\!\!\nearrow$-shaped, respectively of Δ^{op}-shaped, diagrams in the category of sets; and colimits in such a functor category are computed 'pointwise'. It results that the functor $X \mapsto \Gamma X$ commutes with colimits and, what is more to the point here, that the functor $X \mapsto N(\Gamma X)$ (and therefore also $X \mapsto |N(\Gamma X)|$) does so, too. We can apply this fact in two ways. First, by direct limit, we can reduce to proving the lemma for those simplicial sets which are *finite*; that is, there are only finitely many non-degenerate simplices. Next, a finite simplicial set can be obtained from a 'smaller' one by the attaching of a simplicial set *standard k-simplex*, for some k; by induction and the gluing lemma we can therefore reduce to proving the lemma for just the latter kind of simplicial set. In other words, we are reduced now to showing that $|N(\Gamma\Delta^k)|$ is contractible.

To show this, we will work out the cell structure of the *CW*-complex $|N(\Gamma\Delta^k)|$ explicitly. The cells in this complex are of three kinds. First, there are the cells coming from the *positive vertices*; these contribute the copy of $|\Delta^k|$ coming from the inclusion $\Delta^k \to N(\Gamma\Delta^k)$. Next, there are the cells coming from the *negative vertices*; these cells are all 0-dimensional, and there is one such for every vertex of Δ^k.

And, finally, there are the cells coming from the *non-degenerate edges*; of these there is a 'basic' edge for every negative vertex. Namely suppose that the negative vertex corresponds to the l-th vertex of Δ^k. Let $\mathrm{front}_l(\Delta^k)$ denote the copy of Δ^l inside Δ^k whose vertices are the vertex l and its predecessors. Then the *last degenerate* of the generating simplex of $\mathrm{front}_l(\Delta^k)$ gives an l-dimensional edge of the simplicial ordered graph, and this edge is non-degenerate. Conversely, every non-degenerate edge is either of this kind or is a face of one such. Indeed, suppose the edge corresponds to a simplex y of Δ^k and suppose that l is the highest vertex of Δ^k occurring in y. If any vertex $< l$ occurs twice in y, or if the vertex l occurs more than twice, then the edge associated to y is degenerate—contrary to assumption. If, on the other hand, some vertex $< l$ does not occur at all, or if the vertex l occurs only once rather than twice, then the edge associated to y is a proper face of one of higher dimension.

Returning to the 'basic' edge, we note that the associated cell has dimension $l{+}1$. Its closure is the image of a copy of $|\Delta^l| \times |\Delta^1|$ which is mapped in such a way that all of $|\Delta^l| \times 0$ is identified to a point (corresponding to the negative vertex in question), while $|\Delta^l| \times 1$ is identified to the geometric realization of $\mathrm{front}_l(\Delta^k)$. By induction, there are no identifications over faces of Δ^k which are not of this kind. It results that $|N(\Gamma\Delta^k)|$ is the union of the cones on $|\Delta^0|, |\Delta^1|, \dots, |\Delta^k|$, each glued along its base to the appropriate subsimplex in $|\Delta^k|$. This complex is indeed contractible. $\square$

Appendix (*on generators and relations*).

If the groups $G_n = \pi_1(\Gamma_n X, x_n)$ are expressed as *edge path groups*, one obtains a sort of description of the simplicial group G in terms of the structure of X. This description occurs as a definition of the loop group in [1, section 12]. Another definition of the loop group is given in [1, sections 7 and 9] in terms of *generators and relations*. The equivalence of the two definitions can be explained by combinatorial group theory. Namely, in a connected graph one can choose a *maximal tree*. The fundamental group of the graph can then be identified to the free group freely generated by the edges of the graph *not* in that maximal tree; equivalently, the fundamental group can be identified to the group generated by *all* the edges of the graph, where, however, the edges of the chosen maximal tree are also introduced as relations.

To make this description effective, one needs to know what a maximal tree in the ordered graph $\Gamma_n X$ will look like. The answer is as follows. If the simplicial set X is *reduced* (that is, if X_0, the set of 0-simplices, has only one element) then there is a maximal tree in $\Gamma_n X$ which is such that it contains exactly those edges where the corresponding simplex of X is a *last degenerate*. In the general case of a connected, but not necessarily reduced X, one has to choose a *maximal tree* in X first (a sub-simplicial-set which contains all of X_0 and whose geometric realization is a simply-connected CW-complex of dimension ≤ 1); the pieces in $\Gamma_n X$ coming from this sub-simplicial-set are then, additionally, in the maximal tree in $\Gamma_n X$.

We will justify this description of the maximal tree now (for much of the following, cf. [1, Lemma 9.1] and [1, section 14] in particular). We begin by explaining why, for connected X and for every n, the graph $\Gamma_n X$ is connected. First, every positive vertex of $\Gamma_n X$ can be connected to some negative vertex. Indeed, if the positive vertex corresponds to $x \in X_n$ then the last degenerate of x gives an edge in $\Gamma_n X$ which will connect this positive vertex to a negative vertex (namely the one associated with the 'last vertex' of that last degenerate or, what amounts to the same thing, the 'last vertex' of x itself). Next, all the negative vertices of $\Gamma_n X$ come from $\Gamma_0 X$, by degeneracy, hence it will suffice to show that they can be connected to each other inside $\Gamma_0 X$. It will, in fact, suffice to show this in the special case of two negative vertices where the associated 0-simplices of X are *adjacent* (in making this reduction we are using the assumed fact that X is connected). We are thus in the special case now where the two 0-simplices of X are the faces of some $y \in X_1$. We see that in this case the two negative vertices can be connected to each other by an edge path of length 2 in $\Gamma_0 X$; the two edges in the path are provided by the simplex y on the one hand and by the 1-dimensional degenerate of the last face of y on the other.

Next, suppose that the simplicial set X is a *tree*. We want to show that, in this case, the ordered graph $\Gamma_n X$ is a tree, too, for every n. Now the nerve $N(\Gamma_n X)$ is 1-dimensional, and connected; so it will be a tree if (and only if) it is *acyclic*. To prove the latter, since the functor $X \mapsto N(\Gamma_n X)$ commutes with colimits, we can further reduce, by direct limit and (inductively) the gluing lemma, to dealing with just the two cases where $X = \Delta^0$ or $X = \Delta^1$. We will write P_n, E_n, N_n, respectively, for the sets of positive vertices, edges, and negative vertices of $\Gamma_n X$. In the case $X = \Delta^0$, each of these sets has exactly one element, so $N(\Gamma_n \Delta^0)$ is isomorphic to Δ^1. In the case $X = \Delta^1$, the set P_n has $n{+}2$ elements which we denote $p_0, p_1, \dots, p_{n+1}$ (where p_{n+1} stands for the map $[n] \to [1]$ with image consisting of only $0 \in [1]$ and where, otherwise, p_i stands for the monotone map $[n] \to [1]$ having the property that

$i \in [n]$ is the smallest element whose image is $1 \in [1]$); the set E_n has $n{+}3$ elements, $e_0, e_1, \ldots, e_{n+2}$, and the set N_n has two elements, n_0 and n_1. The map $E_n \to P_n$ takes e_i to p_i for all $i \leq n{+}1$, and, in addition, it takes e_{n+2} to p_{n+1}. The map $E_n \to N_n$ takes the element e_{n+2} into n_0 and it takes all other elements of E_n into n_1. We see that $N(\Gamma_n \Delta^1)$ is a one-point-union of $n{+}1$ copies of Δ^1, together with one extra copy of Δ^1 hanging on to one of the whiskers. It is a tree indeed.

Let X be a connected simplicial set now. Choose a maximal tree T in X. Let P', E', N' denote, respectively, the sets of positive vertices, edges, and negative vertices of $\Gamma_n T$. Let P'' denote the subset of X_n which is complementary to the subset T_n. Let E'' be defined as the subset of X_{n+1} given by the image of P'' under the 'last degeneracy' map. One of the structure maps of $\Gamma_n X$ restricts to a map $E'' \to N'$ (all the negative vertices of $\Gamma_n X$ are contained in N' since T contains all the 0-simplices of X), and the other structure map restricts to a map $E'' \to P''$. The latter map is given by the 'last face' map, and is actually inverse to the above map $P'' \to E''$; in particular it is an isomorphism. In view of this fact, and using the fact established above, that the ordered graph

$$N' \,,\; E' \,,\; P' \;, \quad N' \leftarrow E' \rightarrow P'$$

is indeed a tree, we can now conclude that the sets, and maps,

$$N' \,,\; E' \cup E'' \,,\; P' \cup P'' \;, \quad N' \leftarrow E' \cup E'' \rightarrow P' \cup P''$$

do form a tree, too. The isomorphisms $N' \approx X_0$ and $P' \cup P'' \approx X_n$ show that this tree contains all the vertices of $\Gamma_n X$. It is therefore a maximal tree. $\square$

Appendix (*another view at the lemma*).

The geometric realization $|\Gamma X|$ may be identified to the double mapping cylinder of the following diagram (the terms involved have been defined in connection with the definition of ΓX),

$$|P_\bullet| \;\longleftarrow\; |E_\bullet| \;\longrightarrow\; |N_\bullet| \,.$$

As a consequence, the assertion of the lemma, that the inclusion

$$|X| \approx |P_\bullet| \;\longrightarrow\; |\Gamma X|$$

is a homotopy equivalence, will therefore result once one knows that the map

$$E_\bullet \;\longrightarrow\; N_\bullet$$

is a (weak) homotopy equivalence. But this is a well known fact: $E_\bullet$ is obtained from the simplicial set X by *shifting*, it is a sort of path space on X, and it is homotopy equivalent to the *subspace of constant paths*; that is, the set X_0 regarded as a simplicial set in a trivial way. The latter statement is in fact true with the strongest possible interpretation of homotopy equivalence, namely *simplicial homotopy equivalence*. An account can be found in [4, proposition 1.5]; another in [5, lemma 1.5.1].

REFERENCES.

[1] Daniel M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.* **67** (1958), 282–312

[2] Klaus Lamotke, Semisimpliziale algebraische Topologie, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **147**, Springer Verlag (1968)

[3] Daniel G. Quillen, The geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration, *Proc. AMS* **19** (1968), 1499–1500

[4] Graeme Segal, Categories and cohomology theories, *Topology* **13** (1974), 293–312

[5] Friedhelm Waldhausen, Algebraic K-theory of spaces, Algebraic and Geometric Topology, *Springer Lecture Notes* **1126** (1983), 318–419

Friedhelm Waldhausen
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Postfach 33501
D-33501 Bielefeld
Germany

fw@mathematik.uni-bielefeld.de