Universität Bielefeld
F. Gähler

Wintersemester 2017/18
Abgabe bis 20.10.2017, 16 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 1

Aufgabe 1
Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Beispielen um Gruppen handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $(\mathbb{N}_0, +)$, wobei $+$ die übliche Addition ist.

b) $(\mathbb{R}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation ist.

c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$, wobei $+$ die übliche Addition ist.

d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation ist.

e) $(M, \cdot)$, mit $M = \{1, i, -1, -i\}$, wobei i die imaginäre Einheit und $\cdot$ die übliche Multiplikation komplexer Zahlen bedeutet.

(0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 2 Punkte)

Aufgabe 2
Sei K ein Körper, $a, b \in K$. Zeigen Sie:

a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

b) $a \cdot (-b) = -(ab) = (-a) \cdot b$

c) $-(-a) = a$

d) $(-1)a = -a$

e) $a \cdot b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass es eine Gruppe mit genau zwei Elementen gibt. Betrachten Sie dazu die Menge $\{e, a\}$ und geben Sie eine Gruppenmultiplikation an, die alle gewünschten Eigenschaften besitzt. Ist diese eindeutig?

b) Zeigen Sie, dass es einen Körper mit genau zwei Elementen gibt. Schreiben Sie dazu die Gruppe aus a) additiv, und ergänzen Sie sie um eine geeignete Multiplikationsregel.

(2 + 2 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 4
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und $H \subseteq G$. Dann heißt $(H, \cdot)$ Untergruppe von $(G, \cdot)$, wenn $(H, \cdot)$ ebenfalls eine Gruppe ist. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $(H, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(G, \cdot)$.

b) Für beliebige Elemente $a, b \in H$ gilt: sowohl $a^{-1} \in H$ als auch $ab \in H$.

c) Für beliebige Elemente $a, b \in H$ gilt: $a^{-1}b \in H$.

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 20.10.2017, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128