Universität Bielefeld
F. Gähler

Wintersemester 2017/18
Abgabe bis 10.11.2017, 16 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 4

Aufgabe 1
Sei T ein Unterraum von einem Vektorraum V, und $\overline{T} := \{\lambda \in V^* \mid \lambda(v) = 0 \ \forall v \in T\}$. V^* ist der Dualraum zu V (Raum der Linearformen auf V). Zeigen Sie, dass dann $\dim(T) + \dim(\overline{T}) = \dim(V)$ gilt.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Sei $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie A^2, A^4, A^8 und A^{-1}. Was ist A^n mit $n \in \mathbb{Z}$? Wie wirkt die lineare Abbildung f_A geometrisch auf $\mathbb{R}^2$?

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Sei $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung, K ein Körper.

a) Zeigen Sie, dass $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq n$.

b) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = m$ gilt.

(1+2+2 Punkte)

Aufgabe 4
Wir betrachten die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $k, \ell \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$\sigma_k \sigma_\ell = i \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{k\ell m} \sigma_m + \delta_{k\ell} \cdot \mathbb{1}_2,$$

wobei $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$, $\delta_{k\ell} = 1$ falls $k = \ell$, 0 sonst.

b) Zeigen Sie, dass $\{\sigma_k, \sigma_l\} = \delta_{kl} \cdot \mathbb{1}_2$, wobei $\{A, B\} := \frac{1}{2}(AB + BA)$.

(3+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 10.11.2017, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128