Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 5

Aufgabe 1
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & \text{-1} \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

Geben Sie den vollen Lösungsraum an.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Prüfen Sie nach, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind, und berechnen Sie ggf. die Inverse mit der Methode der elementaren Zeilentransformationen.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(1+2 Punkte)

Aufgabe 3
Betrachten Sie das Gleichungssystem $BX = E_2$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und X eine 3×2–Matrix ist.

a) Woran kann man sofort erkennen, dass eine Lösung X existiert?

b) Finden Sie alle Lösungen X.

c) Zeigen Sie, dass kein X die Gleichung $XB = E_3$ erfüllt.

(1+2+1 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 4
Sei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass B eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Berechnen Sie die dazu duale Basis.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 5
Sei $K = \mathbb{R}$ und V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$.

a) Sei $\mu : V \to K$ definiert durch $P \mapsto \mu(P) := \int_\alpha^\beta P(x)dx$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest$)$.

b) Sei $\nu : V \to K$ definiert durch $P \mapsto \nu(P) := P^{(n)}(\alpha)$, $(\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$ fest$)$.

Dabei ist $P^{(n)}$ die n-te Ableitung von P. Zeigen Sie, dass μ und ν Linearformen auf V sind (also Elemente von V^*). Warum können wir μ und ν hier nicht sinnvoll als Zeilenvektoren schreiben?

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 17.11.2017, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128