Universität Bielefeld
F. Gähler

Wintersemester 2017/18
Abgabe bis 24.11.2017, 16 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 6

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie folgende Produkte in S_6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die inversen Permutationen zu den Produkten an.
Führen Sie dieselbe Rechnung auch in Zyklenschreibweise durch.

b) Zeigen Sie, dass die Symmetrische Gruppe S_n für $n \geq 3$ *nicht* kommutativ ist.

c) Zeigen Sie (mit Hilfe vollständiger Induktion), dass die Anzahl der Elemente der symmetrischen Gruppe S_n gleich $n!$ ist.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Zahl der Fehlstände der Transposition
$\tau = (k\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k-1 & \ell & k+1 & \cdots & \ell-1 & k & \ell+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$ mit $k < \ell$.
Wie lautet $\operatorname{sign}(\tau)$?

b) Berechnen Sie $\tau = \sigma^{-1} \circ (12) \circ \sigma$, wobei $k := \sigma^{-1}(1), \ell := \sigma^{-1}(2)$.
Hinweis: Berechnen Sie $\tau(k), \tau(\ell)$ und $\tau(i)$ für $i \neq k, \ell$.

c) Begründen Sie, warum man jede Transposition $\tau = (k\ell)$ in der Form $\tau = \sigma^{-1} \circ (12) \circ \sigma$ darstellen kann. Wenn Sie alle σ angeben, für die $\tau = \sigma^{-1} \circ (12) \circ \sigma$ gilt, erhalten Sie einen Bonuspunkt.

(2+2+1 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 3
Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

indem Sie sie auf obere Dreiecksform bringen. **(1+1 Punkte)**

Aufgabe 4
Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$, $\lambda \in K$. Zeigen Sie:

a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

b) $\det(A) = \det(A^t)$

(1+1 Punkte)

Aufgabe 5
Für welche a ist $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Determinante! **(2 Punkte)**

Abgabe bis Freitag, 24.11.2017, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128