Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 8

Aufgabe 1

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, und seien die Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in V$ nicht trivial und paarweise orthogonal, d.h., $x_i \neq 0$ und $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig sind.

(2 Punkte)

Aufgabe 2

Auf dem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ sei ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert. Dann ist duch $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ eine Norm auf V definiert. Zeigen Sie, dass diese die folgende Eigenschaften besitzt:

a) $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x + y, x - y \rangle$,

b) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$,

c) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$,

d) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

e) Man könnte nun auf die Idee kommen, den Spieß umzudrehen und auf einem normierten Raum durch (c) ein inneres Produkt zu definieren. Zeigen Sie, dass dies im Allgemeinen nicht möglich ist, indem Sie als Gegenbeispiel eine Norm finden, die (d) verletzt.

(1+1+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 3

Sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\| \cdot \|$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$$

gilt. Schließen Sie daraus, dass

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x\|$$

gilt für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2+1 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 4
Sei V ein euklidischer Vektorraum. In Aufgabe 2(d) wurde gezeigt, dass die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{1}$$

erfüllt ist, wenn die Norm duch ein inneres Produkt erzeugt wird, d.h., wenn ein inneres Produkt existiert, sodass $\|x\| = \langle x, y\rangle^{1/2}$ gilt. Zeigen Sie die Umkehrung, also dass

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

ein inneres Produkt definiert, falls (1) erfüllt ist.

Hinweis: Zum Beweis der Linearität zeigen Sie zuerst die Additivität, d.h.

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

durch geeignetes Anwenden der Parallelogrammgleichung. Sie können dazu die Gleichung

$$\begin{aligned}\|x+y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2 = &\left(\|x+y+z\|^2 + \frac{1}{2}\|x+y-z\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2\right) \\ &- \left(\|x-y-z\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y+z\|^2 + \frac{1}{2}\|x+y-z\|^2\right).\end{aligned}$$

verwenden. Zeigen Sie danach die Gleichung $\langle x, cy\rangle = c\langle x, y\rangle$ zuerst für ganzzahlige c, dann für rationale c, und schließen Sie dann mit Hilfe von Aufgabe 3 auf den Fall $c \in \mathbb{R}$.

(5 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 8.12.2017, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128