Universität Bielefeld
F. Gähler

Wintersemester 2017/18
Abgabe bis 15.12.2017, 16 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra für Physik
Blatt 9

Aufgabe 1
Eine reelle Matrix heißt ganzzahlig, wenn alle ihre Einträge Elemente aus $\mathbb{Z}$ sind. Sei A eine ganzzahlige $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie: Gilt $\det A = \pm 1$, so ist A^{-1} ebenfalls ganzzahlig.

(1 Punkt)

Aufgabe 2
Sei $V = \ell_\infty$ der Vektorraum der beschränkten Folgen, d. h. $\ell_\infty := \{(x_i)_{i=1}^\infty \big| \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$.

a) Zeigen Sie: Auf ℓ_∞ ist durch $||x|| := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |x_k|$ eine Norm definiert.

b) Sei $e^{(n)} := \underset{\uparrow n\text{-te Stelle}}{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)}$. Dann ist durch $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ eine Folge in ℓ_∞ definiert. Zeigen Sie, dass $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ gegen $0 = (0, \ldots 0, \ldots)$ konvergiert.

c) Konvergiert die obige Folge $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ auch in der Maximumsnorm $||x||_\infty = \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$?

d) Sind die beiden Normen äquivalent, d. h. lassen sich Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ finden, sodass $||x||_\infty \leq c_1 ||x||$ und $||x|| \leq c_2 ||x||_\infty$ für alle $x \in \ell_\infty$ gilt?

(2+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 3
Sei x ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

a) x ist ein Eigenvektor von A^n für alle $n \geq 1$. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

b) Sei A invertierbar. Dann ist x auch Eigenvektor von A^{-1}. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

c) Sei $B = \sum_{i=1}^{k} a_i A^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$. Dann ist x auch Eigenvektor von B. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(1+1+1 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 4
In der Vorlesung wurde mit Hilfe der Potenzreihe für $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$ gezeigt, dass für $x \in \mathbb{R}$ folgende Gleichung gilt:

$$\exp(ix) = e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Daraus lassen sich eine Reihe interessanter Relationen ableiten:

a) Zeigen Sie, dass $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ gilt.

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 5
Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix
$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 15.12.2017, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128