Universität Bielefeld
F. Gähler

Wintersemester 2017/18
Abgabe bis 22.12.2017, 16 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 10

Aufgabe 1
Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) A und A^T besitzen die gleichen Eigenwerte.

b) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A^+.

c) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist λ^m ein Eigenwert von A^m für $m \in \mathbb{N}$.

(1+2+1 Punkt)

Aufgabe 2
Es seinen $A, B \in \mathrm{Mat}(n, K)$ mit $[A, B] := AB - BA = 0$. Zeigen Sie:

a) Ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so auch $y = Bx$.

b) Ist in der Situation von Teil (a) die algebraische Vielfachheit von λ gleich 1, so ist x auch Eigenvektor von B.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 3
Diesmal sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Zeigen Sie:

a) λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \lambda^{-1}$ ist Eigenwert von A^{-1}.

b) x ist Eigenvektor von $A \Leftrightarrow x$ ist Eigenvektor von A^{-1}.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 4
Eine Matrix N heißt *nilpotent*, wenn ein $s \in \mathbb{N}$ existiert, sodass N^s die Nullmatrix ist.

a) Zeigen Sie, dass eine nilpotente matrix N nur den Eigenwert 0 hat.

b) Zeigen Sie, dass

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist. Berechnen Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 0 für die Matrizen N, N^2, N^3. Wie hängt dies mit den Kernen dieser Matrizen zusammen?

(1+2 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 5
Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 22.12.2017, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128